
Stanford University Libraries

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

Sechs und dreifsigster Band.

In vier Heften.

Mit acht lithographirten Tafeln.

Berlin, 1848.
Bei G. Reimer.
Et se trouve à Paris chez Mr. Bachelier (successeur de Mme Ve Courcier),
Libraire pour les Mathématiques etc. Quai des Augustins No. 55.

Inhaltsverzeichnifs

des sechs und dreifsigsten Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik.

1. Analysis.

1.

Nouvelles formules pour réduire l'intégrale $V = \int \frac{T\,dx}{\sqrt{X}}$ à la forme trigonométrique des transcendantes elliptiques; les polynomes T et X ayant cette forme:

$$T = G + G'x + G''x^2 + \frac{(H + H'\sqrt{-1})}{1 + (K + K'\sqrt{-1})x} + \frac{(H - H'\sqrt{-1})}{1 + (K - K'\sqrt{-1})x};$$

$$X = x^4 + \lambda x^3 + Ax^2 + Bx + D.$$

(Par Mr. J. *Plana* à Turin.)

---

§. 1.

Cette question embrasse toute la théorie de l'intégration par les transcendantes elliptiques de la différentielle

$$\frac{P}{Q} \cdot \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

lorsque $\frac{P}{Q}$ est une fraction rationnelle en x. J'ai entrepris de la résoudre par une analyse qui, à plusieurs égard me paraît nouvelle: mais, avant de l'exposer, je crois utile de faire les réflexions suivantes.

Soient x', x'', x''', x^{IV} les quatre racines de l'équation

$$(1.)\quad X = x^4 + \lambda x^3 + Ax^2 + Bx + D = 0,$$

que nous supposons disposées de manière que les sommes $x' + x''$, $x''' + x^{\text{IV}}$; ainsi que les produits $x'x''$, $x'''x^{\text{IV}}$ soient des quantités *réelles*. En désignant par $F(x)$ le résultat de l'intégration qui donnerait V en fonction de x, et nommant a la valeur initiale de x, on aurait en général

$$V = F(x) - F(a).$$

Actuellement, si l'on fait $x = f(\varphi)$ et $a = f(\varphi')$, la valeur de V, exprimée par la variable φ, sera

$$V = F[f(\varphi)] - F[f(\varphi')].$$

Quelle que soit la forme de la fonction $f(\varphi)$, il est évident que $Rd\varphi$ sera la forme de la différentielle de V par rapport à la variable φ. Mais, pour

remplir le but que l'on a en vue, il faudra, par un choix convenable de cette fonction, faire ensorte que l'intégrale V soit transformée dans une autre de la forme

$$V=\Gamma(\varphi)-\Gamma(\varphi')+\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta}\left\{L+L'\Delta^2+\frac{L''}{1-\mu^2\sin^2\varphi}+\frac{L'''}{1-\mu'^2\sin^2\varphi}+\frac{L^{IV}}{1-\mu''^2\sin^2\varphi}\right\},$$

où l'on ait $\Delta=\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}$.

La constante c, distinguée par le nom de *module*, doit être réelle, positive, et plus petite que l'unité. Et les trois coefficiens μ^2, μ'^2, μ''^2, que l'on nomme *paramètres*, doivent être chacun, réel, positif, et plus petit que l'unité. Suivant cette définition, ils ne pourront être que plus petits ou plus grands que c^2, et réductibles à l'une ou l'autre des deux formes

$$c^2\sin^2\theta \quad \text{et} \quad 1-b^2\sin^2\theta;$$

b étant le *module complémentaire;* c'est-à-dire que $b^2=1-c^2$.

Cette transformation doit être telle que la différence $\Gamma(\varphi)-\Gamma(\varphi')$ puisse être présentée délivrée du signe intégral: et en outre, l'intégration relative à φ qui demeure indiquée, doit avoir zéro pour première limite. En général, on ne peut remplir cette dernière condition sans introduire un plus grand degré de complication, soit dans l'expression de x en φ, soit dans celle de la fonction $\Gamma(\varphi)-\Gamma(\varphi')$. Mais, par là, on acquiert l'avantage d'éviter dans la transformée les différences qui doublent le nombre des quantités transcendantes, au moment où l'on veut évaluer une intégrale définie. Au reste on sait que l'intégrale algébrique trouvée par *Euler*, offre le moyen d'exprimer par une seule intégrale et une partie algébrique les différences entre deux transcendantes elliptiques.

On verra dans ce Mémoire que, si les coefficiens K' et H' de $\sqrt{-1}$ sont nuls, l'intégrale V contient seulement deux transcendantes elliptiques de troisième espèce; mais en général il y en a trois.

Relativement à l'intégrale

$$\int\frac{dx(G+G'x+G''x^2)}{\sqrt{X}},$$

il sera démontré, que la seule transcendante elliptique de troisième espèce qu'elle peut renfermer dans son expression, est toujours du genre de celles qui sont à *paramètre logarithmique*, c'est-à-dire de la forme $c^2\sin^2\theta$. Il est essentiel de bien établir cette distinction, maintenant que l'on sait, que ces transcendantes sont plus simples que celles dont les paramètres sont *circulaires;* c'est-à-dire de la forme $1-b^2\sin\theta^2$; de sorte que toute intégrale de la

forme $\int\frac{Pdx}{\sqrt{X}}$, dans laquelle P est un polynome entier et rationnel, est susceptible d'être exprimée par une seule transcendante elliptique à paramètre logarithmique. A cette circonstance il faut en ajouter une autre non moins importante; savoir, que le *module* peut toujours être exprimé d'une manière assez simple par les trois racines d'une équation du *troisième degré*, qui est précisément la *réduite* de l'équation $X=0$ du quatrième degré.

C'est en approfondissant les principes connus pour opérer la transformation dont je parle, que j'ai été conduit à plusieurs nouvelles formules fort remarquables, qui, dans leur ensemble, n'ont pas encore été publiées, que je sache. Si, je ne me trompe, elles pourront avoir de l'influence pour étendre les applications de cette branche du Calcul Intégral. Maintenant que nous possédons des tables pour évaluer les fonctions elliptiques, il faut avoir des formules, qui, abstraction faite de toute méthode d'approximation, offrent les moyens propres à mettre en évidence que, même avec la généralité inhérente à des coefficiens *littéralement exprimés*, on peut, dans chaque cas, calculer les élémens numériques qui constituent les argumens des ses Tables.

Lorsqu'il est uniquement question de transformer l'intégrale $\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$ dans une autre semblable, on peut varier à l'infini les moyens pour remplir cette condition: mais le cas général, qui est celui de l'intégrale

$$\int\frac{Tdx}{\sqrt{X}},$$

exige un choix convenable, si l'on veut que le même changement dans la variable primitive puisse être communiqué aux intégrales

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{X}},\quad \int\frac{x^2dx}{\sqrt{X}},\quad \int\frac{dx}{\{1+(k+k'\sqrt{-1})x\}\sqrt{X}}$$

sans rencontrer de nouveaux obstacles, ou une complication capable de diminuer, et même de faire disparaître les avantages que l'ont avait d'abord obtenus en traitant le cas le plus simple. C'est d'après cette réflexion que j'ai évité plusieurs transformations qui, à d'autres égards, ont paru préférables.

Par des motifs analogues, j'ai varié le procédé connu pour éliminer les paramètres imaginaires. J'ai obtenu des formules plus symétriques, en fesant sortir le symbole de l'imaginaire, $\sqrt{-1}$, du signe intégral, *avant* la réduction des différentielles à la forme trigonemétrique. Toutefois, on ne saurait disconvenir que, dans les cas particuliers, on rencontre assez souvent des réductions inattendues qui apportent des modifications heureuses, et justifient, par

le succès, un choix qui aurait été rejeté par un raisonnement fait *a priori*. Il serait absurde de croire, que le hasard seul produit les combinaisons de ce genre: il faut aussi avoir acquis ce tact qui nous rend capables de tirer parti, à chaque instant, des moindres lueurs qui peuvent jeter quelque clarté sur les points autour desquels les difficultés sont concentrées.

Le théorème de *Landen* offre la plus simple transformation des transcendantes elliptiques de première espèce en d'autres semblables, avec des modules différens: mais ce problème, considéré en général, était celui qui par sa solution devait amener la découverte des propriétés intimes de ces transcendantes, et même de celles de *troisième espèce*. Alors on a compris que l'on pouvait calculer ses dernières par des suites infinies fort convergentes. Une des données indispensables pour ce calcul étant la transcendante

$$\frac{1}{q} = e^{\frac{\pi F'(b)}{F'(c)}},$$

où l'on a

$$F'(c) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}, \qquad F'(b) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-b^2\sin^2\varphi)}},$$

j'ai placé à la fin de ce Mémoire une Table qui donne immédiatement le logarithme tabulaire de $\frac{1}{q}$, pour tous les angles du module c depuis 0^0 jusqu'à 45^0, de *dixième* en *dixième* de degré, et de degré en degré depuis 45^0 jusqu'à 90^0. On sait que la découverte des séries qui dépendent de cette transcendante est due à Mr. *Jacobi*. Mais en lisant son ouvrage il n'est pas facile de concevoir comment elle a été faite.

Cependant il y a, si je ne me trompe, un point de vue qui permet de saisir le fil des idées qui peuvent avoir fait trouver les mémorables formules par lesquelles on sait aujourd'hui multiplier à l'infini les transformations des transcendantes elliptiques de première espèce. J'ai consacré à cette question un assez long paragraphe afin de montrer clairement, comment, par le passage du réel à l'imaginaire et du fini à l'infini, en tombait sur les séries dépendantes de la transcendante $\frac{1}{q}$, qui, désormais, doit être considérée comme un des élémens principaux de l'analyse algébrique.

Pour offrir au moins un exemple de l'application des formules générales, j'ai repris une question de Géometrie transcendante qui n'est pas encore épuisée: celle de la surface et du développement sur un plan, d'un secteur conique à base elliptique. Par la comparaison entre ma solution et celle publiée en

1826 par *Legendre*, on verra que, par des transformations purement algébriques, on peut éviter les constructions géométriques et présenter cette intégration avec une symétrie remarquable, et propre à faciliter le calcul des cas particuliers.

L'analyse qu'on emploie pour résoudre ce problème de géométrie est, au fond, tout-à-fait analogue à celle qui donne l'attraction d'un anneau elliptique, suivant l'hypothèse imaginée par Mr. *Gauss* et publiée dans le Tome IV des Mémoires de Goettingue depuis l'année 1820. Mais afin de mieux établir ce rapprochement, j'ai termine ce Mémoire par les formules qui offrent une solution nouvelle de ce même problème.

Les analystes exercés saisiront d'un coup d'oeil le caractère distinctif des deux méthodes différentes pour parvenir à l'expression des trois composantes rectangulaires de la force attractive.

J'ajouterai encore une réflexion avant d'entrer en matière. En lisant les Mémoires d'*Euler* sur les transcendantes elliptiques, il faut se rappeler que ses deux types étaient

$$\int dx\sqrt{\frac{1-c^2x^2}{1-x^2}} \quad \text{et} \quad \int\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1-c^2x^2)}}.$$

Le premier représente l'arc elliptique compté depuis le sommet: le demi-grand axe étant pris pour unité, et la demi-excentricité étant une fraction désignée par c.

Le second type étant multiplié par $b^2=1-c^2$, représente l'arc hyperbolique dont l'unité est la distance du centre au foyer, et la fraction c l'axe transverse, de sorte que

$$Y=b^2\tang\varphi, \qquad X=\frac{c}{\cos\varphi}\cdot\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)},$$

sont les coordonnées orthogonales de l'hyperbole. *Euler* ne semble pas avoir remarqué qu'on a l'équation

$$\int\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1-c^2x^2)}}=\frac{x\sqrt{(1-c^2x^2)}}{b^2\sqrt{(1-x^2)}}-\frac{1}{b^2}\int dx\sqrt{\frac{1-c^2x^2}{1-x^2}}+\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}:$$

autrement il aurait pris pour types les deux intégrales

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},\quad \int dx\sqrt{\frac{1-c^2x^2}{1-x^2}}.$$

Le troisième type qu'il fallait ensuite considérer est l'intégrale

$$\int\frac{dx}{(1-nx^2)\sqrt{((1-x^2)(1-c^2x^2))}},$$

où n est un paramètre réel.

C'est à *Legendre* qu'on doit cette classification simple et lumineuse; ainsi que les premières formules propres à ramener les intégrales de cette dernière forme, qui ont le paramètre n imaginaire, à d'autres de même espèce où le paramètre est réel.

§. II.

En décomposant le polynome X dans ses deux facteurs réels du second degré, nous aurons

$$(2.)\quad X=\{x^2-(x'+x'')x+x'x''\}\{x^2-(x'''+x^{\text{IV}})x+x'''x^{\text{IV}}\};$$

et nous excluons les cas d'égalité entre deux des racines x', x'', x''', x^{IV} afin de prévenir les exceptions qui tiendraient à cette circonstance. Cela posé, nous ferons

$$(3.)\quad x=\frac{\alpha+\beta y}{1+y}=\beta-\frac{(\beta-\alpha)}{1+y};$$

ce qui donne $dx=\frac{(\beta-\alpha)dy}{(1+y)^2}$, et réciproquement

$$(4.)\quad y=\frac{\alpha-x}{x-\beta}=-1+\frac{\alpha-\beta}{x-\beta}.$$

Actuellement, afin de faire disparaître, sous le radical, les puissances impaires de y, nous déterminerons les deux constantes α et β de manière que l'on ait:

$$(5.)\quad x'x''-\tfrac{1}{2}(x'+x'')(\alpha+\beta)+\alpha\beta=0,$$

$$(6.)\quad x'''x^{\text{IV}}-\tfrac{1}{2}(x'''+x^{\text{IV}})(\alpha+\beta)+\alpha\beta=0.$$

Donc, en observant que l'on a l'équation

$$(7.)\quad x'+x''+x'''+x^{\text{IV}}=-\lambda,$$

si l'on fait pour plus de simplicité

$$(8.)\quad \begin{cases} X'=x'x''-x'''x^{\text{IV}}, \\ X''=x'x''(x'''+x^{\text{IV}})-x'''x^{\text{IV}}(x'+x''), \\ X'''=(x'+x'')-(x'''+x^{\text{IV}})=\lambda+2(x'+x''), \\ X^{\text{IV}}=X'^2-X''X''', \end{cases}$$

on aura

$$(9.)\quad \alpha+\beta=\frac{2X'}{X'''};\qquad \alpha\beta=\frac{X''}{X'''};$$

$$(10.)\quad \alpha=\frac{X'+\sqrt{X^{\text{IV}}}}{X'''};\qquad \beta=\frac{X'-\sqrt{X^{\text{IV}}}}{X'''}.$$

Et sur cela, il faut observer que la permutation des deux lettres α et β est permise, puisque les équations (5.) et (6.) ne changent pas par cette permu-

tation réciproque, de sorte que l'on peut aussi faire

$$x = \frac{\beta+\alpha y}{1+y}.$$

Les formules (10.) nous démontrent que les cas particuliers où l'on peut avoir $\beta = -\alpha$, sont ceux pour lesquels les racines de l'équation $X=0$ seraient telles que l'on aurait $X' = x'x'' - x'''x^{\text{IV}} = 0$. Or, cela peut avoir lieu pour toute équation de la forme

$$(11.) \quad X = x^4 + \lambda x^3 + Ax^2 + m\lambda x + m^2 = 0,$$

pour laquelle on a $x'' = \frac{m}{x'}$, $x^{\text{IV}} = \frac{m}{x'''}$. Effectivement, d'après ces racines, nous avons

$$X'' = m\left(x''' + \frac{m}{x'''} - x' - \frac{m}{x'}\right); \quad X''' = x' + \frac{m}{x'} - x''' - \frac{m}{x'''};$$

d'où l'on tire

$$(12.) \quad \alpha = \sqrt{m}; \quad \beta = -\sqrt{m}.$$

Maintenant, nous allons démontrer, que les racines x', x'', x''', x^{IV} peuvent toujours être disposées de manière, que la fonction de ces racines, désignée par X^{IV}, soit une quantité nécessairement positive.

Pour cela, j'observe d'abord que l'équation identique $(\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta$ donne, en y substituant pour $\alpha\beta$ sa valeur tirée de l'équation (6.):

$$(\alpha-\beta)^2 = \{(\alpha+\beta)+(x'''+x^{\text{IV}})\}^2 - (x'''-x^{\text{IV}})^2.$$

Donc, cette valeur de $(\alpha-\beta)^2$ sera nécessairement positive, lorsque l'équation $X=0$ aura, au moins, deux racines imaginaires: car en fesant

$$x''' = p+q\sqrt{-1}, \quad x^{\text{IV}} = p-q\sqrt{-1},$$

il est clair qu'on a

$$\alpha-\beta = \sqrt{(4q^2+(2p+\alpha+\beta)^2)},$$

c'est-à-dire une quantité réelle, puisque $\alpha+\beta$ est elle même une quantité réelle.

Le seul cas où il peut être douteux si α et β seront deux quantités réelles est donc celui où l'équation $X=0$ a ses quatre racines réelles. Mais en observant que la fonction X^{IV} devient nulle lorsque $x'=x'''$, on conçoit qu'elle doit être divisible par $x'-x'''$: ce qui deviendra évident en écrivant d'abord

$$\begin{aligned}
X' &= x'(x''-x^{\text{IV}}) + x^{\text{IV}}(x'-x'''),\\
X'' &= x'^2(x''-x^{\text{IV}}) - (x'-x''')\{x'(x''-x^{\text{IV}}) - x''x^{\text{IV}}\},\\
X''' &= (x'-x''') + (x''-x^{\text{IV}});
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$X^{IV}=(x'-x''')(x''-x^{IV})\{2x'x^{IV}+x'(x''-x^{IV})+x'(x'-x''')-x''x^{IV}-x'^2\}$$
$$+(x'-x''')\{(x'-x''')x^{IV2}-x''x^{IV}(x'-x''')\};$$

c'est-à-dire

$$(13.)\qquad X^{IV}=(x'-x''')(x'-x^{IV})(x''-x''')(x''-x^{IV}).$$

Or il est clair que la forme de cette expression suffit pour faire voir qu'il est toujours possible de rendre X^{IV} quantité positive, en disposant les quatre racines x', x'', x''', x^{IV} par ordre de leur grandeur décroissante, et mettant les négatives après les positives, en commençant par la plus petite négative, abstraction faite de son signe.

Au reste, pour rendre X^{IV} quantité positive, on peut aussi disposer les racines de manière que deux facteurs soient positifs et les deux autres négatifs. Car, on peut faire les six combinaisons deux à deux:

$$(x'+x''),\ (x'''+x^{IV});\quad (x'+x'''),\ (x''+x^{IV});\quad (x'+x^{IV}),\ (x''+x'''):$$

et prendre ensuite celui de ces trois couples qui donnera pour X^{IV} une quantité positive.

Le second de ces trois couples donne

$$\sqrt{X^{IV}}=\sqrt{((x'-x'')(x'-x^{IV})(x'''-x'')(x'''-x^{IV}))};$$
$$X'=x'x'''-x''x^{IV};\qquad X'''=(x'+x''')-(x''+x^{IV}),$$

pour les trois fonctions des racines avec lesquelles on devrait former les valeurs de α et β par les formules (10.). Et le troisième couple donne

$$\sqrt{X^{IV}}=\sqrt{((x'-x'')(x'-x''')(x^{IV}-x'')(x^{IV}-x'''))};$$
$$X'=x'x^{IV}-x''x''';\qquad X'''=(x'+x^{IV})-(x''+x''').$$

En distinguant par X^{IV}, X_1^{IV}, X_2^{IV} ces trois valeurs différentes de X^{IV} on a, en fesant leur produit,

$$X^{IV}\cdot X_1^{IV}\cdot X_2^{IV}$$
$$=\mp\{(x'-x'')^2(x'-x''')^2(x'-x^{IV})^2(x''-x''')^2(x''-x^{IV})^2(x'''-x^{IV})^2\}.$$

Or on sait que le produit des carrés des différences entre les racines d'une équation du quatrième degré doit être *positif*, si les quatre racines sont, ou réelles ou imaginaires; et *négatif*, si deux sont réelles et deux imaginaires. Donc on aura

$X^{IV}\cdot X_1^{V}\cdot X_2^{IV}=-g^2$ pour quatre racines réelles ou imaginaires;

$X^{IV}\cdot X_1^{IV}\cdot X_2^{IV}=+g^2$ pour deux racines réelles et deux imaginaires.

Mais, chacun des facteurs X^{IV}, X_1^{IV}, X_2^{IV} est réel dans le premier de ces deux cas: donc, alors, deux doivent être positifs et un seul négatif, puisqu'ils ne

sauraient être tous les trois négatifs. Et, dans le second cas, un seul de ces facteurs sera réel et positif: les deux autres seront imaginaires et de la forme

$$X_1^{\text{IV}} = G + H\sqrt{-1}, \quad X_2^{\text{IV}} = G - H\sqrt{-1},$$

puisque leur produit doit être positif.

Avant d'aller plus loin il importe de remarquer que, en fesant disparaître le second terme de l'équation $X = 0$, on obtiendrait pour α et β des valeurs absolues différentes, mais telles qu'en les désignant par α' et β', on aurait

$$\alpha' = \alpha + \tfrac{1}{4}\lambda; \quad \beta' = \beta + \tfrac{1}{4}\lambda.$$

En effet: en fesant $x = u - \frac{1}{4}\lambda$, et nommant U ce que devient le polynome X après cette substitution, il faudra poser l'équation

$$u = \frac{\alpha' + \beta' z}{1 + z}$$

pour faire disparaître, sous le radical, les puissances impaires de z. Or, les racines u', u'', u''', u^{IV} de l'équation $U = 0$ sont telles que l'on a

$$u' = \tfrac{1}{4}\lambda + x'; \quad u'' = \tfrac{1}{4}\lambda + x''; \quad u''' = \tfrac{1}{4}\lambda + x'''; \quad u^{\text{IV}} = \tfrac{1}{4}\lambda + x^{\text{IV}}.$$

Donc, en remplaçant x', x'', x''', x^{IV} par u', u'', u''', u^{IV}, respectivement, on voit, par les équations (8. et 13.) que les valeurs de X''' et X^{IV} ne subissent aucun changement, et que X' devra être remplacé par

$$u'u'' - u'''u^{\text{IV}} = x'x'' - x'''x^{\text{IV}} + \tfrac{1}{4}\lambda(x' + x'' - x''' - x^{\text{IV}}) = X' + \tfrac{1}{4}\lambda X'''.$$

Ainsi, en vertu des formules (10.) nous aurons effectivement

$$\alpha' = \frac{X' + \frac{1}{4}\lambda X''' + \sqrt{X^{\text{IV}}}}{X'''} = \alpha + \tfrac{1}{4}\lambda,$$

$$\beta' = \frac{X' + \frac{1}{4}\lambda X''' - \sqrt{X^{\text{IV}}}}{X'''} = \beta + \tfrac{1}{4}\lambda.$$

On verra plus loin l'utilité de cette remarque. J'ajouterai que, indépendamment de l'équation (13.), on pourrait démontrer par l'équation primitive $X^{\text{IV}} = X''^2 - X''X'''$, que la fonction X^{IV} demeure invariable en y augmentant chacune des racines de la même quantité $\frac{1}{4}\lambda$: et cette remarque suffirait pour faire découvrir ***a priori*** l'existence de l'équation (13.).

§. III.

D'après nos formules (10. et 13.) on pourra donc toujours établir les équations suivantes avec des valeurs réelles de α et β; savoir:

$$\sqrt{X} = \frac{\sqrt{Y'}}{(1+y)^2}; \quad \frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{(\beta - \alpha)\,dy}{\sqrt{Y'}},$$

en posant

$$Y' = (M_1+N_1y^2)(M_1'+N_1'y^2),$$

et,

$$\begin{aligned}
M_1 &= \alpha^2-(x'+x'')\alpha+x'x'',\\
N_1 &= \beta^2-(x'+x'')\beta+x'x'',\\
M_1' &= \alpha^2-(x'''+x^{\text{IV}})\alpha+x'''x^{\text{IV}},\\
N_1' &= \beta^2-(x'''+x^{\text{IV}})\beta+x'''x^{\text{IV}}.
\end{aligned}$$

En éliminant les produits $x'x''$, $x'''x^{\text{IV}}$ à l'aide des équations (5. et 6.), il est clair que l'on a

$$\begin{aligned}
M_1 &= (\alpha-\beta)M, & M_1' &= (\alpha-\beta)P,\\
N_1 &= (\alpha-\beta)N; & N_1' &= (\alpha-\beta)Q;
\end{aligned}$$

après avoir fait

$$(14.)\quad \left\{\begin{aligned}
\gamma &= \tfrac{1}{2}(x'+x''), & \gamma' &= \tfrac{1}{2}(x'''+x^{\text{IV}}) = -\gamma-\tfrac{1}{2}\lambda,\\
M &= \alpha-\gamma, & P &= \alpha-\gamma',\\
N &= \gamma-\beta; & Q &= \gamma'-\beta.
\end{aligned}\right.$$

Donc, en fesant

$$(15.)\qquad Y = (M+Ny^2)(P+Qy^2),$$

nous aurons

$$Y' = (\alpha-\beta)^2\cdot Y, \quad\text{et}\quad \sqrt{Y'} = \pm(\alpha-\beta)\sqrt{Y}.$$

Le radical $\sqrt{X}$ étant censé pris toujours positivement, nous affectons du double signe $\pm$ le facteur $(\alpha-\beta)$, afin que, en prenant aussi positivement le radical $\sqrt{Y}$, l'équation

$$\sqrt{X} = \frac{\pm(\alpha-\beta)\sqrt{Y}}{(1+y)^2}$$

soit toujours vraie, en prenant le signe supérieur ou le signe inférieur, suivant que $\alpha-\beta$ sera >0 ou <0.

Il suit de là, et de l'équation (3.), que

$$(16.)\qquad \frac{\sqrt{X}}{x-\beta} = \frac{\sqrt{Y}}{\pm(1+y)}.$$

Mais il est clair que la valeur de l'intégrale $\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$ sera donnée, sans ambiguité, par l'équation

$$(A.)\qquad \int\frac{dx}{\sqrt{X}} = \int\frac{dy}{\sqrt{Y}}.$$

Cette transformation fondamentale s'opère donc à l'aide des équations (3., 10., 13., 14., 15.) par des fonctions des quatre racines de l'équation $X=0$. Et

cela, de manière que les facteurs *binomes* du second degré de Y sont toujours réels, avec des coefficiens tels que, d'après les équations (14.) on a

$$(17.)\qquad M+N = P+Q = \alpha-\beta.$$

Ces mêmes équations donnent

$$\begin{aligned} MQ &= \alpha\gamma'+\beta\gamma-\gamma\gamma'-\alpha\beta,\\ PN &= \alpha\gamma+\beta\gamma'-\gamma\gamma'-\alpha\beta: \end{aligned}$$

donc en éliminant le produit $\alpha\beta$ à l'aide de l'équation (5.), on trouvera

$$(18.)\qquad \begin{cases} MQ = x'x''-\gamma\gamma'-\tfrac{1}{2}\alpha\cdot X''', \\ PN = x'x''-\gamma\gamma'-\tfrac{1}{2}\beta\cdot X''', \end{cases}$$

et par conséquent

$$(19.)\qquad PN = MQ = \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\cdot X''' = \sqrt{X^{\text{IV}}}.$$

Mais en substituant pour α, β, γ, γ' leurs valeurs, nous aurons, directement, en fonction des racines de l'équation $X=0$:

$$(20.)\qquad \begin{cases} MQ = \tfrac{1}{4}\{2(x'x''+x'''x^{\text{IV}})-(x'+x'')(x'''+x^{\text{IV}})-2\sqrt{X^{\text{IV}}}\}, \\ NP = \tfrac{1}{4}\{2(x'x''+x'''x^{\text{IV}})-(x'+x'')(x'''+x^{\text{IV}})+2\sqrt{X^{\text{IV}}}\}. \end{cases}$$

De là on tire une expression fort simple, non seulement de la somme $MQ+NP$, mais aussi du produit $MQ\cdot NP$. En effet, nous avons

$$16\cdot MQ\cdot NP = \{2(x'x''+x'''x^{\text{IV}})-(x'+x'')(x'''+x^{\text{IV}})\}^2-4X^{\text{IV}}:$$

donc en développant le carré, et substituant pour X^{IV} sa valeur fournie par l'équation $X^{\text{IV}}=X''^2-X''X'''$, on trouvera, après les réductions qui se présentent:

$$\begin{aligned} 16\cdot MQ\cdot NP = {} & \{(x'x'''+x''x^{\text{IV}})+(x'x^{\text{IV}}+x''x''')\}^2 \\ & -4x'x'''(x''x'''+x'x^{\text{IV}})-4x''x^{\text{IV}}(x''x'''+x'x^{\text{IV}}): \end{aligned}$$

d'où l'on conclud que le second membre de cette équation est un carré parfait, et que l'on a

$$(21.)\qquad 16\cdot MQ\cdot NP = \{(x'x'''+x''x^{\text{IV}})-(x'x^{\text{IV}}+x''x''')\}^2.$$

Ainsi, en fesant

$$(22.)\qquad u'''=x'x^{\text{IV}}+x''x''',\quad u'=x'x'''+x''x^{\text{IV}},\quad u''=x'x''+x'''x^{\text{IV}},$$

nous aurons par les équations (20. et 21.):

$$(23.)\qquad MQ+NP = u''-\tfrac{1}{2}(u'+u''') \quad\text{et}\quad 16\cdot MQ\cdot NP = (u'-u''')^2.$$

Mais on sait que l'équation du quatrième degré

$$x^4+\lambda x^3+Ax^2+Bx+D = 0$$

a pour *réduite* l'équation du troisième degré

$$(24.)\qquad u^3-Au^2+(\lambda B-4D)u+D(4A-\lambda^2)-B^2 = 0,$$

dont les trois racines sont u', u'', u''': en conséquence on pourra déterminer directement les produits MQ et NP en résolvant cette équation du troisième degré. Les équations (23.) donnent

$$(25.)\qquad (PN-MQ)^2 = (u''-u')(u''-u''') = X^{\text{IV}},$$

et comme X^{IV} doit être une quantité positive, il faudra prendre pour u'' la plus *grande* des trois racines de la réduite si elles sont toutes les trois réelles; et si elles sont, deux imaginaires et une réelle, il faudra prendre pour u'' la racine réelle. Si on observe en outre que l'on a $x'x''\cdot x'''x^{\text{IV}} = D$ et $x'x''+x'''x^{\text{IV}} = u''$, on en conclura les équations suivantes en fonctions des racines de l'équation (23.); savoir

$$(26.)\quad \begin{cases} X' = \sqrt{(u''^2-4D)}; \\ X''' = \sqrt{(4u''+\lambda^2-4A)} = 2\gamma-2\gamma'; \\ \sqrt{X^{\text{IV}}} = \sqrt{((u''-u')(u''-u'''))}; \\ 4\gamma = -\lambda+\sqrt{(4u''+\lambda^2-4A)}; \\ 4\gamma' = -\lambda-\sqrt{(4u''+\lambda^2-4A)}; \\ \alpha = \dfrac{\sqrt{(u''^2-4D)}+\sqrt{((u''-u''')(u''-u'))}}{\sqrt{(4u''+\lambda^2-4A)}}; \\ \beta = \dfrac{\sqrt{(u''^2-4D)}-\sqrt{((u''-u''')(u''-u'))}}{\sqrt{(4u''+\lambda^2-4A)}}. \end{cases}$$

En appliquant ces formules à l'équation (11.); sa réduite, conformément à l'équation (24.), sera

$$u^3-Au^2+(\lambda^2-4m)mu+m^2(4A-2\lambda^2) = 0.$$

Avec une légère attention on reconnait aussitôt que $u=2m$ est une racine de cette équation; et d'après cela on trouve que ses trois racines sont

$$(27.)\quad \begin{cases} u = 2m; \\ u = \tfrac{1}{2}A-m+\tfrac{1}{2}\sqrt{((A+2m)^2-4m\lambda^2)}; \\ u = \tfrac{1}{2}A-m-\tfrac{1}{2}\sqrt{((A+2m)^2-4m\lambda^2)}. \end{cases}$$

Si la quantité m est *positive* on fera $u''=2m$, et les deux autres racines étant désignés, respectivement, par u' et u''', on aura $(u''-u''')(u''-u')$ $=m(8m+\lambda^2-4A)$; ce qui donne, comme au §. II., $\alpha=\sqrt{m}$, $\beta=-\sqrt{m}$. Mais si la quantité m était *négative*, il faudrait prendre pour u' la première, pour u'' la seconde, et pour u''' la troisième des trois racines précédentes de la réduite. Alors les valeurs de α et β ne seraient plus égales et de signe contraire, et il faudrait former les valeurs de γ, γ', α, β avec les formules suivantes:

$$(28.)\quad\begin{cases}4\gamma=-\lambda+\sqrt{[\lambda^2-2A-4m+2\sqrt{((A+2m)^2-4m\lambda^2)}]};\\ 4\gamma'=-\lambda-\sqrt{[\lambda^2-2A-4m+2\sqrt{((A+2m)^2-4m\lambda^2)}]};\\ (u''-u''')(u''-u')=\tfrac{1}{2}\{A-6m+\sqrt{((A+2m)^2-4m\lambda^2)}\}\sqrt{((A+2m)^2-4m\lambda^2)};\\ \qquad u''^2-4m^2=\tfrac{1}{4}\{A-2m+\sqrt{((A+2m)^2-4m\lambda^2)}\}^2-4m^2.\end{cases}$$

§. IV.

L'équation (24.) aura ses trois racines réelles lorsque l'équation $X=0$ aura ses quatre racines, ou toutes réelles ou toutes imaginaires; pour l'un et l'autre de ces deux cas, le produit $MQ\cdot PN$ doit être nécessairement positif d'après la seconde des équations (23.). Mais il sera nécessairement négatif lorsque l'équation $X=0$ aura deux racines réelles et deux racines imaginaires. D'après cette remarque, il est facile de prévoir que, pour le cas où les racines de l'équation $X=0$ sont, ou réelles, ou imaginaires, on réduira l'intégrale $\int\frac{dy}{\sqrt{Y}}$ à la forme ordinaire des transcendantes elliptiques de première espèce, avec des coefficiens réels, en posant $y=H\tang\frac{1}{2}\psi$, et déterminant convenablement le coefficient H. En effet; la substitution de cette valeur de y donne

$$\int\frac{dy}{\sqrt{Y}}=H\int\frac{d\psi}{\sqrt{[2MP+QNH^4)+(2PM-2QNH^4)\cos\psi-(M-NH^2)(P-QH^2)\sin^2\psi]}}:$$

donc on pourra faire disparaître, sous le radical, le terme multiplié par $\cos\psi$ en prenant $H=\sqrt[4]{\frac{PM}{QN}}$; ce qui réduit cette équation à celle-ci:

$$\int\frac{dy}{\sqrt{Y}}=\int\frac{d\psi}{\sqrt{[4\sqrt{(MP\cdot NQ)}-(2\sqrt{(PM\cdot QN)}-PN-QM)\sin^2\psi]}}.$$

Il suit de là, et des équations (23.), qu'en disposant les trois racines de la réduite dans l'ordre décroissant u'', u', u''', on aura

$$\int\frac{dy}{\sqrt{Y}}=\int\frac{d\psi}{\sqrt{[(u'-u''')+(u''-u')\sin^2\psi]}},$$

ou bien

$$(29.)\quad\int\frac{dy}{\sqrt{Y}}=\int\frac{d\psi}{\sqrt{[-u'''+u'\cdot\cos^2\psi+u''\cdot\sin^2\psi]}}.$$

Les deux variables y et ψ sont liées par l'équation

$$(30.)\quad y=\sqrt[4]{\left(\frac{PM\cdot QN}{(QN)^2}\right)}\tang\tfrac{1}{2}\psi=\sqrt{\left(\frac{u'-u'''}{(\gamma-\beta)(\gamma'-\beta)}\right)}\tfrac{1}{2}\tang\tfrac{1}{2}\psi,$$

où l'on pourra toujours prendre positivement les deux quantités $u'-u'''$ et $(\gamma-\beta)(\gamma'-\beta)$, puisque ce produit peut être précédé du signe $+$ ou du signe $-$; car il est mis ici à la place de $\sqrt{(QN)^2}$.

Maintenant, si l'on fait $\varphi = \frac{1}{2}\pi - \psi$; et $c^2 = \frac{u''-u'}{u''-u'''}$, l'équation (29.) deviendra

$$(31.) \quad \int \frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{-1}{\sqrt{(u''-u''')}} \cdot \int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2 \sin^2\varphi)}};$$

où le module c sera une quantité nécessairement plus petite que l'unité, puisque, par hypothèse, les racines sont disposées de manière que l'on a $u''-u''' > u''-u'$. Ainsi, en posant

$$x = \frac{\alpha + \beta H \tang(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\varphi)}{1 + H \tang(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\varphi)} \quad \text{et} \quad \varDelta = \sqrt{(1 - c^2 \sin^2\varphi)},$$

on pourra établir l'équation

$$(32.) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{-1}{\sqrt{(u''-u''')}} \cdot \int \frac{d\varphi}{\varDelta}$$

avec des valeurs réelles de α, β, H, $\sqrt{(u''-u''')}$; et de plus avoir $c^2 < 1$, toutes les fois que les racines de l'équation $X=0$ sont inégales, et toutes les quatre ou réelles ou imaginaires.

Pour avoir les limites de φ correspondantes à celles de x, on a l'équation

$$(33.) \quad \tang(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\varphi) = 2\sqrt{\left(\frac{QN}{u'-u'''}\right)}\left\{\frac{\alpha-\beta}{x-\beta} - 1\right\}.$$

Il faut maintenant examiner le cas où deux des racines de la ***réduite*** sont imaginaires. Alors, en fesant $y = \cos\varphi . \sqrt{\left(-\frac{P}{Q}\right)}$, on obtient

$$\int \frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{-1}{\sqrt{(NP-MQ)}} \cdot \int \frac{dy}{\sqrt{\left(1 - \frac{NP}{NP-MQ} \cdot \sin^2\varphi\right)}}:$$

et en posant $y = \frac{\sqrt{\left(-\frac{P}{Q}\right)}}{\cos\varphi}$, on obtient

$$\int \frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{1}{\sqrt{(MQ-NP)}} \cdot \int \frac{dy}{\sqrt{\left(1 - \frac{MQ}{MQ-NP} \cdot \sin^2\varphi\right)}}.$$

Or en supposant positifs, les trois coefficiens M, N, P, et Q négatif, il faudra interpréter les équations (23. et 25.) de manière que l'on ait:

$$NP + MQ = u'' - \tfrac{1}{2}(u' + u'''),$$
$$NP - MQ = \sqrt{[(u''-u')(u''-u''')]};$$

et en supposant M, N, Q positifs, et P négatif, il faudra interpréter les mêmes équations de manière que l'on ait:

$$MQ + NP = u'' - \tfrac{1}{2}(u' + u'''),$$
$$MQ - NP = \sqrt{[(u''-u')(u''-u''')]}.$$

Donc, dans l'un et l'autre cas, la transformée de l'intégrale $\int \frac{dy}{\sqrt{Y}}$ sera la même au signe près; c'est-à-dire qu'en fesant

$$(34.)\qquad c^2 = \frac{2u'' - (u' + u''') + 2\sqrt{[(u''-u')(u''-u''')]}}{4\sqrt{[(u''-u')(u''-u''')]}},$$

on aura

$$(35.)\quad \begin{cases} y = \cos\varphi \cdot \sqrt{\left(-\frac{P}{Q}\right)}; \qquad P>0,\ M>0,\ N>0,\ Q<0; \\ x = \dfrac{\alpha + \beta\cdot\cos\varphi\cdot\sqrt{\left(-\frac{P}{Q}\right)}}{1+\cos\varphi\cdot\sqrt{\left(-\frac{P}{Q}\right)}}; \qquad \cos\varphi = \dfrac{\varphi - x}{x-\beta}\cdot\sqrt{\left(-\frac{P}{Q}\right)}; \\ \int \frac{dx}{\sqrt{X}} = -\dfrac{1}{\sqrt[4]{((u''-u')(u''-u'''))}}\cdot\int\frac{d\varphi}{\Delta}; \end{cases}$$

$$(36.)\quad \begin{cases} y = \frac{1}{\cos\varphi}\cdot\sqrt{\left(-\frac{P}{Q}\right)}; \qquad Q>0,\ M>0,\ N>0,\ P<0; \\ x = \dfrac{\alpha\cos\varphi + \beta\sqrt{\left(-\frac{P}{Q}\right)}}{\cos\varphi + \sqrt{\left(-\frac{P}{Q}\right)}}; \qquad \cos\varphi = \dfrac{x-\beta}{x-\alpha}\cdot\sqrt{\left(-\frac{P}{Q}\right)}; \\ \int\frac{dx}{\sqrt{X}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{[(u''-u')(u''-u''')]}}\cdot\int\frac{d\varphi}{\Delta}. \end{cases}$$

Les formules (32., 33., 35., 36.) comprennent tous les cas qui peuvent avoir lieu: car il est évident que, par la permutation de M, N en P et Q, et réciproquement; on obtient les formules relatives au cas où les deux coefficiens M, N seraient de signe contraire. Il est remarquable que, le module, et tous les autres coefficiens puissent être calculés, par ces formules, à l'aide des trois racines de la *réduite* de l'équation du quatrième degré $X = 0$, sans le concours explicite des racines mêmes de cette dernière.

Voici maintenant les autres formules dont nous aurons besoin pour étendre à l'intégrale donnée V les trois transformations dont on vient de parler.

D'après l'équation

$$y = \sqrt[4]{\left(\frac{PM}{QN}\right)}\cdot \text{tang}\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\varphi\right)$$

on a d'abord (en fesant $b^2 = 1 - c^2$):

$$\int\frac{y^2 dy}{\sqrt{Y}} = -\frac{(u'-u''')}{4QN\sqrt{(u''-u''')}}\left\{-\frac{2}{b^2}\cdot\frac{\Delta}{\cos\varphi} + 2\int\frac{d\varphi}{\Delta\cos^2\varphi} - \int\frac{d\varphi}{\Delta}\right\}.$$

Et de là on tire aisément:

$$(37.)\quad \int\frac{y^2dy}{\sqrt{Y}} = \frac{\sqrt{(u''-u''')}}{4QN}\left\{\int\Delta d\varphi - b^2\int\frac{d\varphi}{\Delta}+2\Delta\cdot\text{tang}(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\varphi)\right\}.$$

Pour avoir la transformée correspondante de l'intégrale

$$\int\frac{dy}{(1-fy^2)\sqrt{Y}}$$

où f désigne un coefficient quelconque, réel ou imaginaire, on fera pour plus de simplicité:

$$\begin{aligned} q' &= 4QN+f(u'-u'''),\\ q'' &= 4QN-f(u'-u'''),\\ \mu &= \left(\frac{q'}{q''}\right)^2,\\ A' &= \frac{4QN}{q'},\\ A'' &= \frac{2f(u'-u''')(4QN)^2}{q'q''^2}; \end{aligned}$$

et l'on aura

$$(38.)\quad \int\frac{dy}{(1-fy^2)\sqrt{Y}} = -\frac{1}{\sqrt{(u''-u')}}\left\{A'\int\frac{d\varphi}{\Delta}+A''\int\frac{d\varphi}{(1-\mu\sin^2\varphi)\Delta}\right\}.$$

Lorsqu'on fait $y=\sqrt{\left(-\frac{P}{Q}\right)}\cdot\cos\varphi$, on a

$$(39.)\quad \begin{cases} \int\frac{y^2dy}{\sqrt{Y}} = \frac{P}{c^2Q\sqrt[4]{((u''-u')(u''-u'''))}}\left\{\int\Delta d\varphi - b^2\int\frac{d\varphi}{\Delta}\right\},\\ \int\frac{dy}{(1-fy^2)\sqrt{Y}} = -\frac{Q}{(Q+fP)\sqrt[4]{(u''-u')(u''-u''')}}\cdot\int\frac{d\varphi}{\left\{1-\frac{fP}{Q+fP}\sin^2\varphi\right\}\Delta}. \end{cases}$$

Les formules correspondantes à $y=\sqrt{\left(-\frac{P}{Q}\right)}\cdot\frac{1}{\cos\varphi}$ sont

$$(40.)\quad \begin{cases} \int\frac{y^2dy}{\sqrt{Y}} = -\frac{P}{b^2Q\sqrt[4]{((u''-u')(u''-u'''))}}\left\{\Delta\,\text{tang}\,\varphi+b^2\int\frac{d\varphi}{\Delta}-\int\Delta d\varphi\right\},\\ \int\frac{dy}{(1-fy^2)\sqrt{Y}} = \frac{1}{\sqrt[4]{((u''-u')(u''-u'''))}}\int\frac{d\varphi}{\Delta}\\ \qquad -\frac{fP}{(Q+fP)\sqrt[4]{((u''-u')(u''-u'''))}}\cdot\int\frac{d\varphi}{\left\{1-\frac{Q}{Q+fP}\sin^2\varphi\right\}\Delta}. \end{cases}$$

Avant d'aller plus loin, nous remarquerons que les valeurs de α et β déterminées par les formules (26.) deviendraient infinies, si on avait l'équation

$4u''+\lambda^2-4A=0$. Il est facile de démontrer par la théorie des équations du quatrième degré que, dans ce cas, les coefficiens du polynome X sont liés par l'équation $4A\lambda-\lambda^3-8B=0$. En effet, si l'on fait $4u+\lambda^2-4A=v$, la transformée en v de l'équation (24.) aurait pour dernier terme le carré $(4A\lambda-\lambda^3-8B)^2$: ainsi cette équation ne peut avoir pour racine $v=0$ sans que l'on ait $4A\lambda-\lambda^3-8B=0$. Mais d'après cela, si l'on fait $x=-\frac{1}{4}\lambda+z$, le polynome X perdra à la fois le terme multiplié par z^3 et celui multiplié par z: de sorte que l'on aura

$$\int\frac{dx}{\sqrt{X}}=\int\frac{dz}{\sqrt{(z^4+(A-\frac{3}{8})z^2+D-\frac{1}{16}\lambda^2(A-\frac{5}{16}\lambda^2))}}.$$

Maintenant il n'y a plus aucune difficulté pour réduire cette intégrale à la forme

$$H\int\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}.$$

§. V.

Pour achever la transformation de l'intégrale V, j'observe d'abord que, par la combinaison des équations

$$x=\beta-\frac{(\beta-\alpha)}{1+y};\qquad \frac{1}{1+y}=\frac{1-y}{1-y^2}$$

avec l'équation (A.) trouvé dans le §. III. on obtient,

$$(A'.)\qquad \int\frac{x\,dx}{\sqrt{X}}=\beta\int\frac{dy}{\sqrt{Y}}-(\beta-\alpha)\int\frac{dy}{(1-y^2)\sqrt{Y}}+(\beta-\alpha)\int\frac{y\,dy}{(1-y^2)\sqrt{Y}}.$$

Et pour avoir la transformée analogue, relative à l'intégrale $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{X}}$, je remarque que, par la combinaison des trois équations

$$Y=\{M+N-2N(1+y)+N(1+y)^2\}\{P+Q-2Q(1+y)+Q(1+y)^2\};$$

$$d\cdot\sqrt{Y}=\frac{dy}{\sqrt{Y}}\{N(1+y)-N\}\{P+Q-2Q(1+y)+Q(1+y)^2\}$$
$$+\frac{dy}{\sqrt{Y}}\{Q(1+y)-Q\}\{M+N-2N(1+y)+N(1+y)^2\};$$

$$d\cdot\left(\frac{\sqrt{Y}}{1+y}\right)=\frac{d\cdot\sqrt{Y}}{1+y}-\frac{\sqrt{Y}\cdot dy}{(1+y)^2};$$

on a

$$(41.)\qquad (M+N)(P+Q)\int\frac{dy}{(1+y)^2\sqrt{Y}}$$
$$=-\frac{\sqrt{Y}}{1+y}-NQ\int\frac{dy\,(1-y^2)}{\sqrt{Y}}+\{N(P+Q)+Q(M+N)\}\int\frac{dy}{(1+y)\sqrt{Y}}.$$

Maintenant on tire de là sans difficulté l'équation

$$(A''.)\quad \int\frac{x^2dx}{\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{Y}}{1+y}+\tfrac{1}{2}\lambda(\alpha-\beta)\frac{y\,dy}{(1-y^2)\sqrt{Y}}+NQ\int\frac{y^2dy}{\sqrt{Y}}$$
$$-(\tfrac{1}{2}\beta\lambda+\gamma\gamma')\int\frac{dy}{\sqrt{Y}}-\tfrac{1}{2}\lambda(\alpha-\beta)\int\frac{dy}{(1-y^2)\sqrt{Y}}.$$

La même expression de x en fonction de y donne

$$(42.)\quad \int\frac{dx}{(1+Lx)\sqrt{X}} = \int\frac{dy}{\sqrt{Y}}\cdot\frac{(1+y)\{(1+L\alpha)-(1+L\beta)y\}}{\{(1+L\alpha)^2-(1+L\beta)^2y^2\}};$$

d'où l'on tire

$$(A'''.)\quad \int\frac{dx}{(1+Lx)\sqrt{X}} = \frac{1}{(1+L\beta)}\int\frac{dy}{\sqrt{Y}}$$
$$+L(\alpha-\beta)\int\frac{y\,dy}{\sqrt{Y}\{(1+L\alpha)^2-(1+L\beta)^2y^2\}}$$
$$-\frac{L(\alpha-\beta)(1+L\alpha)}{(1+L\beta)}\int\frac{dy}{\sqrt{Y}\{(1+L\alpha)^2-(1+L\beta)^2y^2\}}.$$

Et comme dans cette formule, le coefficient L peut être réel ou imaginaire, en y fesant successivement

$$L = K+K'\sqrt{-1},\qquad L' = K-K'\sqrt{-1},$$

on en tirera l'expression des intégrales de même forme qui entrent dans celle de V.

Ainsi, il résulte des formules ($A.$, $A'.$, $A''.$, $A'''.$) qu'en posant pour plus de simplicité:

$$(43.)\quad\begin{cases} f = \left\{\dfrac{1+\beta(K+K'\sqrt{-1})}{1+\alpha(K+K'\sqrt{-1})}\right\}^2; \\ f' = \left\{\dfrac{1+\beta(K-K'\sqrt{-1})}{1+\alpha(K-K'\sqrt{-1})}\right\}^2; \\ g = \dfrac{(K+K'\sqrt{-1})(H+H'\sqrt{-1})}{\{1+\alpha(K+K'\sqrt{-1})\}\{1+\beta(K+K'\sqrt{-1})\}}; \\ g' = \dfrac{(K-K'\sqrt{-1})(H-H'\sqrt{-1})}{\{1+\alpha(K-K'\sqrt{-1})\}\{1+\beta(K-K'\sqrt{-1})\}}; \\ I = G+G'\beta-(\tfrac{1}{2}\beta\lambda+\gamma\gamma')G'' \\ \qquad +\dfrac{H+H'\sqrt{-1}}{1+\beta(K+K'\sqrt{-1})}+\dfrac{H-H'\sqrt{-1}}{1+\beta(K-K'\sqrt{-1})}; \\ I' = G''NQ; \\ I'' = G'-G''\cdot\tfrac{1}{2}\lambda; \end{cases}$$

$$(44.)\quad f(y) = -\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)I''\int\frac{d\cdot y^2}{(1-y^2)\sqrt{Y}}$$
$$+\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\left\{g\sqrt{f}\int\frac{d\cdot y^2}{(1-fy^2)\sqrt{Y}}+g'\sqrt{f'}\int\frac{d\cdot y^2}{(1-f'y^2)\sqrt{Y}}\right\},$$

on peut exprimer l'intégrale donnée en x par le second membre de cette équation; savoir

$$(B.)\quad V = -\frac{G''\sqrt{Y}}{1+y}+f(y)+I\int\frac{dy}{\sqrt{Y}}+I'\int\frac{y^2\,dy}{\sqrt{Y}}+(\alpha-\beta)I''\int\frac{dy}{(1-y^2)\sqrt{Y}}$$
$$-(\alpha-\beta)\left\{g\int\frac{dy}{(1-fy^2)\sqrt{Y}}+g'\int\frac{dy}{(1-f'y^2)\sqrt{Y}}\right\};$$

où la variable y est liée avec la variable primitive x par l'équation

$$y=\frac{\alpha-x}{x-\beta}.$$

Pour faire disparaître le signe intégral de l'expression de $f(y)$, il faut observer que, d'après les équations

$$M+N = P+Q = \alpha-\beta;$$
$$2MP+PN+QM = P(M+N)+M(P+Q) = (\alpha-\beta)(M+P);$$
$$2NQ+PN+QM = Q(M+N)+N(P+Q) = (\alpha-\beta)(N+Q);$$

on a

$$(45.)\quad (\alpha-\beta)\int\frac{d.y^2}{(1-y^2)\sqrt{Y}} = f'(y) = \log\left\{\frac{(M+P)+(N+Q)y^2+2\sqrt{Y}}{1-y^2}\right\};$$

et qu'en fesant, pour plus de simplicité:

$$(46.)\quad \begin{cases} E' = M(Ph^2+Q)+P(Mh^2+N); \\ E'' = N(Ph^2+Q)+Q(Mh^2+N); \\ E''' = (Mh^2+N)(Ph^2+Q); \end{cases}$$

$$(47.)\quad f''(y) = \int\frac{d.y^2}{(1-h^2y^2)\sqrt{Y}},$$

on pourra exprimer cette intégrale par la formule

$$(48.)\quad f''(y) = \frac{1}{\sqrt{E'''}}\log\left\{\frac{E'+E''y^2+2\sqrt{E'''}.\sqrt{Y}}{1-h^2y^2}\right\}$$

si l'on a $E'''>0$: ou bien, par la formule,

$$(49.)\quad f''(y) = -\frac{1}{\sqrt{(-E''')}}\,\text{arc}\left\{\text{tang} = \frac{E'+E''y^2}{2(\sqrt{-E'''}).\sqrt{Y}}\right\}$$

si l'on a $E'''<0$.

Nous avons démontré au §. II. qu'en fesant $x=u-\frac{1}{4}\lambda$, afin de faire évanouir le second terme de l'équation $X=0$, on ne fait que changer α en $\alpha+\frac{1}{4}\lambda$, et β en $\beta+\frac{1}{4}\lambda$. Et comme alors γ et γ' sont aussi changés respectivement en $\gamma+\frac{1}{4}\lambda$ et $\gamma'+\frac{1}{4}\lambda$, il en résulte en vertu des équations (14.) que, non seulement la différence $\alpha-\beta$, mais aussi les quantités M, N, P, Q ne subissent aucun changement. Donc aussi le second membre de la formule (B.)

doit demeurer absolument le même, soit en opérant sur l'intégrale donnée en x, soit en opérant sur sa transformée en u que l'on aurait en fesant $x=u-\frac{1}{4}\lambda$. Effectivement, cela revient à faire d'abord

$$x = \beta-\frac{(\beta-\alpha)}{1+y},$$

ou à faire par deux transformations successives,

$$x = -\tfrac{1}{4}\lambda+\beta'-\frac{(\beta'-\alpha')}{1+y}.$$

Or, ces deux valeurs de x sont identiques, puisqu'on a: $\alpha'=\alpha+\frac{1}{4}\lambda$, $\beta'=\beta+\frac{1}{4}\lambda$.

Cette remarque devient importante, lorsqu'il est question d'une intégration *littérale*, et non d'une intégration numérique. Car, en évitant la substitution $x=u-\frac{1}{4}\lambda$, on évite aussi la plus grande complication qu'elle entraîne à l'égard des coefficiens qui succèdent aux coefficiens primitifs.

§. VI.

La formule (*B.*) renferme l'intégrale $\int\frac{dy}{(1-y^2)\sqrt{Y}}$, laquelle, d'après les équations (38., 39., et 40.) dépend d'une transcendante elliptique de *troisième* espèce dont le paramètre μ est tel que l'on a, respectivement,

$$\mu = \left(\frac{\sqrt{(QN)}+\sqrt{(PM)}}{\sqrt{(QN)}-\sqrt{(PM)}}\right)^2; \quad \mu = \frac{P}{P+Q}; \quad \mu = \frac{Q}{Q+P}.$$

La valeur de c^2 qui répond à cette seconde valeur de μ est $c^2=\frac{NP}{NP-MQ}$; où $Q<0$. En conséquent nous pourrons écrire

$$c^2 = \frac{P}{P+Q-\left(1+\frac{M}{N}\right)Q} = \frac{P}{(P+Q)\left(1-\frac{Q}{N}\right)},$$

en se rappelant que $M+N=P+Q$. Il suit de là que $\frac{P}{P+Q}$ est une quantité positive, puisque c^2 et $1-\frac{Q}{N}$ sont deux quantités positives: or Q étant négatif, il est nécessaire que l'on ait $\frac{P+Q}{P}<1$. En considérant de même la troisième valeur de μ, et observant que l'on a

$$c^2 = \frac{MQ}{MQ-PN} = \frac{Q}{(Q+P)\left(1-\frac{P}{M}\right)},$$

et $P<0$, on en conclura que $\frac{Q+P}{Q}<1$. Il est donc évident que, pour chacun

de ces trois paramètres on a $\frac{1}{\mu}<1$. Mais on sait qu'en posant $q=\frac{\tang\varphi}{\Delta}$, on a l'équation

$$(50.)\quad \int\frac{d\varphi}{(1-\mu\sin^2\varphi)\Delta}=\int\frac{d\varphi}{\Delta}-\int\frac{d\varphi}{\left(1-\frac{c^2}{\mu}\sin^2\varphi\right)\Delta}+\int\frac{dq}{1-(\mu-1)\left(1-\frac{c^2}{\mu}\right)q^2}:$$

donc on pourra toujours faire dépendre l'intégrale $\int\frac{dy}{(1-y^2)\sqrt{Y}}$ d'une transcendante elliptique de troisième espèce dont le paramètre sera ***logarithmique,*** puisque nous avons $\frac{c^2}{\mu}<c^2$, ou bien $\frac{c^2}{\mu}=c^2\sin^2\theta$. Pour chacun des trois cas qui peuvent avoir lieu, l'angle θ doit être déterminé par les équations

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{(QN)}-\sqrt{(PM)}}{\sqrt{(QN)}+\sqrt{(PM)}},\qquad \sin\theta=\sqrt{\left(\frac{P+Q}{P}\right)},\qquad \sin\theta=\sqrt{\left(\frac{Q+P}{Q}\right)}.$$

Après cela, on aura

$$(51.)\quad \int\frac{dq}{1-(\mu-1)\left(1-\frac{c^2}{\mu}\right)q^2}=\frac{\tang\theta}{2\Delta(\theta)}\log\left\{\frac{\Delta(\varphi)\tang\theta+\Delta(\theta)\tang\varphi}{\Delta(\varphi)\tang\theta-\Delta(\theta)\tang\varphi}\right\};$$

où $\Delta(\varphi)=\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}$; $\Delta(\theta)=\sqrt{(1-c^2\sin^2\theta)}$. Il est presque superflu d'ajouter qu'on pourra toujours prendre positivement la quantité soumise au signe logarithmique, puisque rien n'empêche de prendre $\frac{\tang\theta}{2\Delta(\theta)}\log(+1)$ ou $\frac{\tang\theta}{2\Delta(\theta)}\log(-1)$ pour la constante arbitraire ajoutée à l'intégration.

§. VII.

La formule générale (*B.*) se simplifie lorsque l'intégrale donnée est telle que les coefficiens H, H', K, K' y sont nuls: alors on a

$$(52.)\quad \int\frac{dx(G+G'x+G''x^2)}{\sqrt{X}}$$

$$=-\frac{G''\sqrt{Y}}{1+y}+G''NQ\cdot\int\frac{y^2dy}{\sqrt{Y}}-\tfrac{1}{2}(G'-G''\cdot\tfrac{1}{2}\lambda)\log\left\{\frac{(M+P)+(N+Q)y^2+2\sqrt{Y}}{1-y^2}\right\}$$

$$+\{G+G'\beta-G''(\tfrac{1}{2}\beta\lambda+\gamma\gamma')\}\int\frac{dy}{\sqrt{Y}}+(\alpha-\beta)(G'-G''\cdot\tfrac{1}{2}\lambda)\int\frac{dy}{(1-y^2)\sqrt{Y}}:$$

et on pourra effectuer la réduction aux transcendantes elliptiques par les formules données dans les §. V et VI. Nous voyons par cette formule que la transcendante elliptique de troisième espèce disparaîtra toutes les fois qu'entre les coefficiens G', G'', λ il y aura la relation $G'-G''\cdot\frac{1}{2}\lambda=0$: ce qui peut avoir lieu sans avoir à la fois $G'=0$, $\lambda=0$: il suffit que l'on ait $G'=G''\cdot\frac{1}{2}\lambda$.

La formule relative à ce cas particulier est donc celle-ci:

$$(53.)\int\frac{dx(G+G''\cdot\frac{1}{2}\lambda x+G''x^2)}{\sqrt{X}}=-\frac{G''\sqrt{Y}}{1+y}+(G-G''\gamma\gamma')\int\frac{dy}{\sqrt{Y}}+G''NQ\int\frac{y^2dy}{\sqrt{Y}}.$$

En prenant $G=\frac{1}{6}(G''A)$ on a

$$G+G''\cdot\tfrac{1}{2}\lambda x+G'x^2=\tfrac{1}{12}G''\cdot\frac{d^2X}{dx^2};$$

c'est-à-dire une intégrale analogue à celle considérée par *Legendre* dans le premier Volume de son „Traité des fonctions elliptiques" (Voyez Chap. XXVII. page 178). Mais *Legendre* ne paraît pas avoir remarqué qu'il était toujours possible de délivrer cette intégrale des transcendantes elliptiques de troisième espèce: il croyait que cela tenait à la forme particulière de l'équation qui lie les deux variables x et φ.

L'équation de condition $G'-G''\cdot\frac{1}{2}\lambda=0$, dont je viens de parler, constitue un théorème important qu'il faut avoir présent à la mémoire, lorsqu'on entreprend la transformation des intégrales de ce genre. Cependant c'est un fait digne de remarque que ce théorème ne se trouve pas énoncé par *Legendre,* ni au Chap. XXVII. de son dernier Traité, ni ailleurs, que je sache. Toutefois, cela ne prouve pas, que cette relation entre les trois coefficiens λ, G', G'', nécessaire pour l'évanouissement de la transcendante elliptique de troisième espèce soit nouvelle, ainsi que je l'avais d'abord pensé. En effet: j'ai reconnu depuis que cette équation, dès l'année 1760, avait été trouvée par *Euler,* comme on peut s'en convaincre par la lecture d'un de ses Mémoires publié dans le Tome VIII. des „*Novi Commentarii* de l'Académie de St. Pétersbourg" (Lisez la page 143). La substitution par laquelle *Euler* parvient à cette conséquence est fort compliquée en comparaison de celle qui se fait par l'équation $x=\frac{\alpha+\beta y}{1+y}$. Mais sur cela, les manières de voir peuvent différer. *D'Alembert,* qui cite le Mémoire d'*Euler* dans le Tome VII. de ses Opuscules (Lisez page 61), ne paraît pas avoir apprécié la découverte de ce *Criterium* analytique. On pourrait même croire qu'il n'en faisait aucun cas par la manière dont il se livre à ses recherches dont le but était dit-il „d'examiner „les cas où ces différentielles se réduisent à la rectification de l'ellipse seule, „ou de l'hyperbole seule, ou de l'ellipse et de l'hyperbole à la fois." Or ce problème est résolu par l'équation $G'-G''\cdot\frac{1}{2}\lambda=0$, lorsqu'on fait abstraction des cas où les transcendantes elliptiques de troisième espèce sont réductibles à celles de première et de seconde espèce. Car les conditions relatives à ces cas n'ont été connues que par les recherches de *Legendre.*

Afin d'avoir des idées justes sur la lenteur avec laquelle l'esprit humain procède dans les découvertes de ce genre, nous ferons remarquer que, même la possibilité de rendre toujours réels les deux coefficiens α et β a échappé à *Lagrange*, en 1785, lorsqu'il composait son célèbre Mémoire sur les intégrales de ce genre, publié dans le second Volume des *Nouveaux* Mémoires de l'Académie de Turin. Par la manière dont il s'exprime sur ce point (Lisez la page 223), on reconnaît que la difficulté avait été sentie, mais non résolue par Lui. Il fallait, pour cela, ramener l'expression primitive de X^{IV} à la forme qu'elle a dans le second membre de l'équation (13.). Et ce pas, qui paraît facile aujourd'hui, n'a été franchi que quelques années plus tard (en 1792) par *Legendre*.

Antérieurement à l'année 1785, la substitution

$$x = \frac{\alpha + \beta y}{\gamma + \delta y}$$

avait été indiquée, pour le même but, par *Euler* dans le premier Volume de son Calcul Intégral publié en 1768. Mais j'ignore pourquoi *Euler* a gardé un silence complet sur la possibilité d'avoir toujours des valeurs réelles pour $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Et cependant l'expression de $\frac{\gamma}{\alpha}$ qu'il obtient à la page 482, pourrait être imaginaire sans choisir convenablement les coefficiens propres à former les deux facteurs trinomes et réels du second degré du polynome X, dans le cas où ses quatre racines seraient réelles. Vers la même époque, dans le Tome XII. des *Novi Commentarii* de l'Académie des Pétersbourg publié aussi en 1768, *Euler* propose la même substitution, et il l'exécute sans supposer le polynome X décomposé en ses facteurs trinomes réels, comme dans l'endroit cité de son Calcul Intégral: mais son analyse, tout en réduisant la question à la solution d'une équation du troisième degré, revient à prouver qu'en fesant $x = \frac{\alpha + \beta y}{1 + y}$ on peut avoir, pour la somme $\alpha + \beta$ et le produit $\alpha\beta$, deux quantités réelles. Et cela ne suffit pas pour prouver que α et β seront, séparément, des quantités réelles. C'est d'après ces reflexions que j'ai pensé qu'il pouvait être utile d'approfondir davantage les proprietés et les conséquences inhérentes à cette substitution.

§. VIII.

La formule (A'''.) posée dans le §. V. deviendrait illusoire, si on y faisait $L = -\frac{1}{\beta}$; mais alors, la formule (42.) qui la précède, donne immé-

diatement

$$(54.)\quad \int\frac{dx}{\left(1-\frac{x}{\beta}\right)\sqrt{X}} = -\frac{\beta}{\alpha-\beta}\cdot\int\frac{dy(1+y)}{\sqrt{Y}}.$$

Par la permutation des deux lettres α et β *) la formule (42.) se change en celle-ci:

$$(55.)\quad \int\frac{dx}{(1+Lx)\sqrt{X}} = \int\frac{dy'}{\sqrt{Y'}}\cdot\frac{(1+y')\{(1+L\beta)-(1+L\alpha)y'\}}{\{(1+L\beta)^2-(1+L\alpha)^2y'^2\}};$$

où $Y'=(N+My'^2)(Q+Py'^2)$. Donc, en fesant $L=-\frac{1}{\alpha}$, cette formule donnera

$$(56.)\quad \int\frac{dx}{\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\sqrt{X}} = \frac{\alpha}{\alpha-\beta}\cdot\int\frac{dy'(1+y')}{\sqrt{Y'}},$$

tandis que la formule (42.) donne

$$(57.)\quad \int\frac{dx}{\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\sqrt{X}} = \frac{\alpha}{\alpha-\beta}\cdot\int\frac{dy(1+y)}{y\sqrt{Y}},$$

Des formules (54.) et (57.) on tire la conséquence que, G et H étant deux coefficiens quelconques, on a l'équation

$$(58.)\quad \int\frac{dx}{\sqrt{X}}\left(G+\frac{H\beta}{\beta-x}+\frac{H\alpha}{\alpha-x}\right)=(G+H)\int\frac{dy}{\sqrt{Y}}+\frac{H}{\alpha-\beta}\left\{\alpha\int\frac{dy}{y\sqrt{Y}}-\beta\int\frac{y\,dy}{\sqrt{Y}}\right\},$$

Ainsi, en prenant $G=-H$, la transcendante elliptique $\int\frac{dy}{\sqrt{Y}}$ disparaîtra, et on aura ce résultat assez remarquable; savoir

$$(59.)\quad H\int\frac{dx(\alpha\beta-x^2)}{(\beta-x)(\alpha-x)\sqrt{X}} = -\frac{H\beta}{2(\alpha-\beta)}\int\frac{d\cdot y^2}{\sqrt{Y}}+\frac{H\alpha}{2(\alpha-\beta)}\int\frac{d\cdot y^2}{y^2\sqrt{Y}}.$$

En supposant $G=0$, $G'=0$, $G''=0$, $K=0$, on tirera de la formule (B.) les deux suivantes:

$$\begin{aligned}(60.)\quad \int\frac{dx}{(1+K'^2x^2)\sqrt{X}} = {} & \frac{1}{(1+K'^2\beta^2)}\int\frac{dy}{\sqrt{Y}}\\ & +\tfrac{1}{4}(\alpha-\beta)K'\sqrt{-1}\left\{\frac{1}{(1+\alpha K'\sqrt{-1})^2}\int\frac{d\cdot y^2}{(1-fy^2)\sqrt{Y}}\right\}\\ & -\tfrac{1}{4}(\alpha-\beta)K'\sqrt{-1}\left\{\frac{1}{(1-\alpha K'\sqrt{-1})^2}\int\frac{d\cdot y^2}{(1-f'y^2)\sqrt{Y}}\right\}\\ & -\frac{(\alpha-\beta)K'\sqrt{-1}}{2(1+\alpha K'\sqrt{-1})(1+\beta K'\sqrt{-1})}\int\frac{dy}{(1-fy^2)\sqrt{Y}}\\ & +\frac{(\alpha-\beta)K'\sqrt{-1}}{2(1-\alpha K'\sqrt{-1})(1-\beta K'\sqrt{-1})}\int\frac{dy}{(1-f'y)\sqrt{Y}};\end{aligned}$$

---

*) Ce qui revient à faire $x=\frac{\beta+\alpha y'}{1+y'}$.

$$(61.)\quad \int\frac{x\,dx}{(1+K'^2x^2)\sqrt{X}}=\frac{\beta}{(1+K'^2\beta^2)}\int\frac{dy}{\sqrt{Y}}$$
$$-\frac{(\alpha-\beta)}{4(1+\alpha K'\sqrt{-1})^2}\int\frac{d\cdot y^2}{(1-fy^2)\sqrt{Y}}$$
$$-\frac{(\alpha-\beta)}{4(1-\alpha K'\sqrt{-1})^2}\int\frac{d\cdot y^2}{(1-f'y^2)\sqrt{Y}}$$
$$+\frac{(\alpha-\beta)}{2(1+\alpha K'\sqrt{-1})(1+\beta K'\sqrt{-1})}\int\frac{dy}{(1-fy^2)\sqrt{Y}}$$
$$+\frac{(\alpha-\beta)}{2(1-\alpha K'\sqrt{-1})(1-\beta K'\sqrt{-1})}\int\frac{dy}{(1-f'y^2)\sqrt{Y}};$$

où l'on a

$$(62.)\quad f=\left\{\frac{(1-\alpha K'\sqrt{-1})(1+\beta K'\sqrt{-1})}{1+\alpha^2K'^2}\right\}^2 \quad\text{et}\quad f'=\left\{\frac{(1+\alpha K'\sqrt{-1})(1-\beta K'\sqrt{-1})}{1+\alpha^2K'^2}\right\}^2.$$

Ces formules se simplifient considérablement, lorsque $\alpha+\beta=0$, et qu'en outre on a $\alpha K'=1$. Mais en général, et même en supposant $K'=1$, on ne peut avoir les intégrales

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{X}}\quad\text{et}\quad\int\frac{x\,dx}{(1+x^2)\sqrt{X}}$$

que par des transcendantes elliptiques de troisième espèce dont les paramètres sont imaginaires.

§. IX.

En général, lorsque les paramètres f et f' sont imaginaires, la formule (*B.*) n'est pas encore réduite à la forme qui puisse être regardée comme la plus simple pour lui appliquer la transformation expliquée au §. IV. Il est vrai que la somme des deux intégrales dépendantes de f et f' est nécessairement réelle; mais il faut transformer cette somme de manière que le signe de l'imaginaire, $\sqrt{-1}$ ne soit pas plus enveloppé sous le signe intégral. On sait que *Legendre* a surmonté le premier cette difficulté, en donnant préalablement la forme trigonométrique aux intégrales de cette espèce. Mais, tout en conservant l'idée primitive de *Legendre,* on peut parvenir au but en opérant directement sur la variable y; ce qui conduit à des formules nouvelles qui me paraissent dignes de l'attention des analystes.

Soit

$$(63.)\quad p=\frac{y(1+\zeta y^2)}{\sqrt{Y}}$$

où ζ désigne un coefficient constant qu'il s'agira de déterminer convenablement.

En prenant un autre coefficient ε et formant l'expression en y de la différentielle

$$\frac{dp}{1+\varepsilon p^2},$$

on trouvera facilement

$$\frac{dp}{1+\varepsilon p^2} = \frac{NQ}{\varepsilon\zeta}\cdot\frac{dy}{\sqrt{Y}}+\frac{1}{\varepsilon^2\zeta^3}\cdot\frac{dy}{\sqrt{Y}}\left\{\frac{E+E'y^2+E''y^4}{Y'}\right\},$$

après avoir fait pour plus de simplicité

$$Y' = y^6+\frac{(2\varepsilon\zeta+NQ)}{\varepsilon\zeta^2}y^4+\frac{(\varepsilon+MQ+NP)}{\varepsilon\zeta^2}y^2+\frac{MP}{\varepsilon\zeta^2} \text{ et}$$

$$(64.)\quad\begin{cases} E = MP(\varepsilon\zeta-NQ),\\ E' = 3MP\cdot\varepsilon\zeta^2-NQ(\varepsilon+MQ+NP),\\ E'' = 2\varepsilon\zeta^2(MQ+NP)-3\varepsilon\zeta\cdot NQ-(NQ)^2.\end{cases}$$

Cela posé, si nous désignons par A, A', A'' les trois valeurs de y^2 qui donnent $Y'=0$, nous aurons

$$Y' = (y^2-A)(y^2-A')(y^2-A''),$$

et puis les trois équations

$$(65.)\quad\begin{cases} A+A'+A'' = -\frac{(2\varepsilon\zeta+NQ)}{\varepsilon\zeta^2},\\ A(A'+A'')+A'A'' = \frac{\varepsilon+MQ+NP}{\varepsilon\zeta^2},\\ AA'A'' = -\frac{MP}{\varepsilon\zeta^2}.\end{cases}$$

Donc, en prenant

$$A' = \frac{1}{f},\quad A'' = \frac{1}{f'}$$

on pourra déterminer à l'aide de ces équations les trois quantités ε, ζ et A. En éliminant A, on obtient ces deux valeurs de ε; savoir

$$(66.)\quad\left\{\varepsilon = \frac{M'}{\zeta A'A''\{2+\zeta(A'+A'')\}}\quad\text{et}\quad\varepsilon = \frac{N'}{A'A''(\zeta^2A'A''-1)}\right\};$$

en fesant

$$(67.)\quad M' = MP-NQ\cdot A'A'' \text{ et } N' = MP(A'+A'')+(MQ+NP)A'A''.$$

Ainsi, en égalant ces deux valeurs de ε on, aura pour déterminer ζ cette équation du second degré:

$$\zeta^2\{M'A'A''-N'(A'+A'')\}-2N'\zeta = M'.$$

En la résolvant, on reconnait facilement que la double valeur de ζ peut être écrite ainsi:

$$(68.)\quad 2\zeta = \frac{2N'\pm\sqrt{\{[2N'-M'(A'+A'')]^2+[M'(A'-A'')\sqrt{-1}]^2\}}}{M'A'A''-N'(A'+A'')}.$$

Donc ces deux valeurs de ζ sont nécessairement réelles puisque par hypothèse les paramètres f e f' sont imaginaires et de la forme $f=g+h\sqrt{-1}$ et $f'=g-h\sqrt{-1}$. Il suit de là que la racine $\varDelta$ de Y' sera nécessairement réelle puisque nous avons

$$(69.)\qquad \varDelta=-\frac{MP}{\varepsilon\zeta^2\varDelta'\varDelta''}.$$

En distinguant par ζ', ζ'' les deux valeurs de ζ, et par n', n'' les deux valeurs correspondantes de $-\frac{1}{\varDelta}$, nous ferons

$$U'=(1+n'y^2)(1-fy^2)(1-f'y^2),$$
$$U''=(1+n''y^2)(1-fy^2)(1-f'y^2);$$

ce qui donnera ces deux équations:

$$(70.)\quad\begin{cases}\varepsilon'\zeta'\int\frac{dp'}{1+\varepsilon'p'^2}=NQ.\int\frac{dy}{\sqrt{Y}}+\frac{1}{MP}.\int\frac{dy}{\sqrt{Y}}\left\{\frac{E_{(1)}+E'_{(1)}y^2+E''_{(1)}y^4}{U'}\right\},\\ \varepsilon''\zeta''\int\frac{dp''}{1+\varepsilon''p''^2}=NQ.\int\frac{dy}{\sqrt{Y}}+\frac{1}{MP}.\int\frac{dy}{\sqrt{Y}}\left\{\frac{E_{(2)}+E'_{(2)}y^2+E''_{(2)}y^4}{U''}\right\};\end{cases}$$

où ε', ε'' sont les valeurs de ε correspondantes à ζ' et ζ'' et $E_{(1)}$, $E_{(2)}$ etc. les valeurs analogues de E, E', E''. En outre, nous fesons, pour plus de clarté

$$p'=\frac{y(1+\zeta'y^2)}{\sqrt{Y}},\qquad p''=\frac{y(1+\zeta''y^2)}{\sqrt{Y}}.$$

Maintenant, d'après le principe connu pour décomposer les fractions rationnelles, si l'on fait:

$$(71.)\quad\begin{cases}K_{(1)}=\frac{E_{(1)}n'^2-E'_{(1)}n'+E''_{(1)}}{n'(n'+f)(n'+f')}; & K'_{(1)}=\frac{E_{(2)}n''^2-E'_{(2)}n''+E''_{(2)}}{n''(n''+f)(n''+f')};\\ K_{(2)}=\frac{E_{(1)}f'^2+E'_{(1)}f+E''_{(1)}}{f(f+n')(f'-f)}; & K'_{(2)}=\frac{E_{(2)}f^2+E'_{(2)}f+E''_{(2)}}{f(f+n'')(f'-f)};\\ K_{(3)}=\frac{E_{(1)}f'^2+E'_{(1)}f+E''_{(1)}}{f'(f'+n')(f-f')}; & K'_{(3)}=\frac{E_{(2)}f'^2+E'_{(2)}f'+E''_{(2)}}{f'(f'+n'')(f-f')};\end{cases}$$

les deux équations précédentes deviendront équivalentes à celles-ci:

$$(72.)\quad MP.\varepsilon'\zeta'\int\frac{dp'}{1+\varepsilon'p'^2}-MNPQ.\int\frac{dy}{\sqrt{Y}}-K_{(1)}.\int\frac{dy}{(1+n'y^2)\sqrt{Y}}$$
$$=K_{(2)}.\int\frac{dy}{(1-fy^2)\sqrt{Y}}+K_{(3)}.\int\frac{dy}{(1-f'y^2)\sqrt{Y}};$$

$$(73.)\quad MP.\varepsilon''\zeta''\int\frac{dp''}{1+\varepsilon''p''^2}-MNPQ.\int\frac{dy}{\sqrt{Y}}-K'_{(1)}.\int\frac{dy}{(1+n''y^2)\sqrt{Y}}$$
$$=K'_{(2)}.\int\frac{dy}{(1-fy^2)\sqrt{Y}}+K'_{(3)}.\int\frac{dy}{(1-f'y^2)\sqrt{Y}}.$$

En multipliant la première de ces deux équations par T'; la seconde par T'', et en déterminant ces deux multiplicateurs d'après les équations

$$(74.)\qquad T'K_{(2)}+T''K'_{(2)}=g(\alpha-\beta)\quad\text{et}\quad T'K_{(3)}+T''K'_{(3)}=-g'(\alpha-\beta),$$

il est clair que la somme des deux équations ainsi formées donnera

$$(75.)\quad\left\{\begin{aligned}&-(\alpha-\beta)\left\{g\int\frac{dy}{(1-fy^2)\sqrt{Y}}+g'\int\frac{dy}{(1-f'y^2)\sqrt{Y}}\right\}\\&=MP\left\{\varepsilon'\zeta'T'\int\frac{dp'}{1+\varepsilon'p'^2}+\varepsilon''\zeta''T''\int\frac{dp''}{1+\varepsilon''p''^2}\right\}-MNPQ(T'+T'')\int\frac{dy}{\sqrt{Y}}\\&-K_{(1)}T'\int\frac{dy}{(1+n'y^2)\sqrt{Y}}-K'_{(1)}T''\int\frac{dy}{(1+n''y^2)\sqrt{Y}}.\end{aligned}\right.$$

Ainsi en substituant cette valeur dans le second membre de l'équation (*B.*), on aura à évaluer des intégrales, qui sous le signe intégral, ne renfermeront aucun coefficient imaginaire; ce qui est un avantage considérable pour la transformation ultérieure qui doit être faite par les formules du §. IV. De sorte que, si nous fesons

$$(76.)\qquad F(y)=f(y)+MP\left\{\varepsilon'\zeta'T'\int\frac{dp'}{1+\varepsilon'p'^2}+\varepsilon''\zeta''T''\int\frac{dp''}{1+\varepsilon''p''^2}\right\},$$

l'équation (*B.*) donnera

$$(B'.)\qquad\begin{aligned}V=&-\frac{G''\sqrt{Y}}{1+y}+F(y)+\{I-MNPQ(T'+T'')\}\int\frac{dy}{\sqrt{Y}}\\&+I'\int\frac{y^2dy}{\sqrt{Y}}+(\alpha-\beta)I''\int\frac{dy}{(1+y^2)\sqrt{Y}}\\&-K_{(1)}T'\int\frac{dy}{(1+n'y^2)\sqrt{Y}}-K'_{(1)}T''\int\frac{dy}{(1+n''y^2)\sqrt{Y}}.\end{aligned}$$

Pour évaluer les deux intégrales que l'on voit dans l'expression de $F(y)$, il faudra employer l'une ou l'autre de ces deux formules:

$$(77.)\qquad\begin{aligned}\varepsilon\int\frac{dp}{1+\varepsilon p^2}&=\sqrt{\varepsilon}\cdot\text{arc}\left\{\text{tang}=\frac{y(1+\zeta y^2)\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{Y}}\right\}\\&=\tfrac{1}{2}(\sqrt{-\varepsilon})\log\left\{\frac{\sqrt{Y}-y(1+\zeta y^2)\sqrt{-\varepsilon}}{\sqrt{Y}+y(1+\zeta y^2)\sqrt{-\varepsilon}}\right\}.\end{aligned}$$

Et en résolvant les équations (76.) on a

$$(78.)\qquad T'=\frac{(\alpha-\beta)\{g'K'_{(2)}-gK'_{(3)}\}}{K_{(2)}K'_{(3)}-K'_{(2)}K_{(3)}},\qquad T''=\frac{(\alpha-\beta)\{gK_{(3)}-g'K_{(2)}\}}{K_{(2)}K'_{(3)}-K'_{(2)}K_{(3)}}.$$

D'après l'équation (69.) nous avons

$$n'=\frac{\varepsilon'\zeta'^2}{ff'\cdot MP},\qquad n''=\frac{\varepsilon''\zeta''^2}{ff'\cdot MP}.$$

En désignant par μ', μ'' les paramètres correspondans, on aura pour chacun des trois cas que nous avons distingués au §. IV:

$\mu' = \left\{\frac{4QN - n'(u'-u''')}{4QN + n'(u'-u''')}\right\}^2$;	$\mu' = \frac{n'P}{n'P-Q}$;	$\mu' = \frac{Q}{Q-n'P}$;
$\mu'' = \left\{\frac{4QN - n''(u'-u''')}{4QN + n''(u'-u''')}\right\}^2$.	$\mu'' = \frac{n''P}{n''P-Q}$.	$\mu'' = \frac{Q}{Q-n''P}$.

Ainsi on a toutes les formules qui sont nécessaires pour pouvoir réduire le second membre de l'équation $(B'.)$ à la forme ordinaire des transcendantes elliptiques.

En remplaçant, dans les deux membres de l'équation $(B'.)$, H par $-H'$ et H' par H, on aura la valeur de l'intégrale $\int\frac{Tdx}{\sqrt{X}}$, lorsque

$$T = G + G'x + G''x^2 + \sqrt{-1}\left\{\frac{(H+H'\sqrt{-1})}{1+(K+K'\sqrt{-1})x} - \frac{(H-H'\sqrt{-1})}{1+(K-K'\sqrt{-1})x}\right\}.$$

L'analyse précédente s'appliquerait aussi au cas où le radical $\sqrt{X}$ aurait la forme

$$\sqrt{(D+Bx+Ax^2+\lambda x^3-x^4)}.$$

Car il suffirait d'y changer λ en $-\lambda$ et $\sqrt{Y}$ en $\sqrt{-Y}$; ce qui revient à dire qu'il faudrait considérer les racines x', x'', x''', x^{IV} comme les racines de l'équation

$$x^4 - \lambda x^3 - Ax^2 - Bx - D = 0,$$

laquelle, au lieu de l'équation (24.), a pour *réduite:*

$$u^3 + Au^2 + (\lambda B + 4D)u + D(4A+\lambda^2) - B^2 = 0.$$

Après cette transformation, il faudra réduire les transcendantes elliptiques de troisième espèce de manière que le paramètre y soit toujours négatif et susceptible d'être mis sous la forme $-c^2\sin^2\theta$, ou sous la forme $-1+b^2\sin^2\theta$.

Pour cela, il faudra employer, ou la formule (50.), ou celle-ci:

$$(79.)\quad \int\frac{d\varphi}{(1+\mu\sin^2\varphi)\Delta} = \frac{c^2}{\mu+c^2}\int\frac{d\varphi}{\Delta} + \frac{\mu}{(\mu+1)}\int\frac{dv}{1+\frac{\mu(\mu+c^2)}{\mu+1}v^2}$$
$$+\int\frac{\mu b^2}{(\mu+1)(\mu+c^2)}\int\frac{d\varphi}{\left\{1-\frac{(\mu+c^2)}{(\mu+1)}\sin^2\varphi\right\}\Delta},$$

où l'on a, $v = \frac{\sin\varphi.\cos\varphi}{\Delta}$.

Par la première, si le paramètre $-\mu$ est à la fois positif et plus grand que l'unité, on réduira l'intégrale à une autre où le paramètre y sera positif et plus petit que c^2: ensuite, à l'aide de celle-ci on obtiendra la réduction à une autre intégrale qui aura le paramètre négatif et de la forme $-1+b^2\sin^2\theta$.

§. X.

Pour réduire ensuite les intégrales définies de manière que les différences de deux intégrales semblables y soient exprimées par une seule intégrale de même espèce, il faudra employer les formules suivantes de *Legendre*.

En désignant par φ' la valeur initiale de φ qui répond à la valeur initiale de x, on a:

$$(80.)\quad \int\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}-\int\frac{d\varphi'}{\Delta(\varphi')}=\int\frac{d\psi}{\Delta(\psi)};$$

$$(81.)\quad \int d\varphi\,\Delta(\varphi)-\int d\varphi'\Delta(\varphi')=\int d\psi\,\Delta(\psi)-c^2\sin\varphi.\sin\varphi'.\sin\psi;$$

$$(82.)\quad \left\{\begin{aligned}&\int\frac{d\varphi}{(1-g\sin^2\varphi)\Delta(\varphi)}-\int\frac{d\varphi'}{(1-g\sin^2\varphi')\Delta(\varphi')}\\&=\int\frac{d\psi}{(1-g\sin^2\psi)\Delta(\psi)}+\frac{\Omega'}{\sqrt{\left((1-g)\left(1-\frac{c^2}{g}\right)\right)}};\\&\operatorname{tang}\Omega'=\frac{g\sqrt{\left((1-g)\left(1-\frac{c^2}{g}\right)\right)}\cdot\sin\varphi\cdot\sin\varphi'\cdot\sin\psi}{1-g+g\cos\varphi\cdot\cos\varphi'\cdot\cos\psi}.\end{aligned}\right.$$

$$(83.)\quad \left\{\begin{aligned}&\int\frac{d\varphi}{(1-g\sin^2\varphi)\Delta(\varphi)}-\int\frac{d\varphi'}{(1-g\sin^2\varphi')\Delta(\varphi')}\\&=\int\frac{d\psi}{(1-g\sin^2\psi)\Delta(\psi)}+\frac{1}{2\sqrt{\left((1-g)\left(\frac{c^2-1}{g}\right)\right)}}\log\left\{\frac{R-\sin\psi\sqrt{\left((1-g)\left(\frac{c^2}{g}-1\right)\right)}}{R+\sin\psi\sqrt{\left((1-g)\left(\frac{c^2}{g}-1\right)\right)}}\right\},\\&R=(c^2\sin^2\psi-g)\sin\varphi\cdot\sin\varphi'-\cos\psi\cdot\Delta(\psi).\end{aligned}\right.$$

L'amplitude ψ est une fonction de φ et φ' telle que

$$(\lambda.)\quad \left\{\begin{aligned}\sin\psi&=\frac{\sin\varphi\cdot\cos\varphi'\Delta(\varphi')-\sin\varphi'\cdot\cos\varphi\cdot\Delta(\varphi)}{1-c^2\sin^2\varphi\cdot\sin^2\varphi'};\\\cos\psi&=\frac{\cos\varphi\cdot\cos\varphi'+\sin\varphi\cdot\sin\varphi'\cdot\Delta(\varphi)\cdot\Delta(\varphi')}{1+c^2\sin^2\varphi\cdot\sin^2\varphi'};\\\Delta(\psi)&=\frac{\cos\psi-\cos\varphi\cdot\cos\varphi'}{\sin\varphi\cdot\sin\varphi'}.\end{aligned}\right.$$

Il faudra appliquer la formule (82.), si le paramètre g est de la forme $1-b^2\sin^2\theta$, et la formule (83.), si ce paramètre est de la forme $c^2\sin^2\theta$.

L'universalité de la méthode pour opérer la transformation conformément à la définition donnée au premier paragraphe de ce Mémoire, est donc établie.

§. XI.

Relativement aux trois formules (λ.) que je viens d'écrire, il me parait que ce qu'il y a de plus simple pour les démontrer est, de les regarder comme une conséquence de l'intégrale algébrique, telle que *Euler* l'a trouvée pour la première fois dans l'année 1760. En effet, soit l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{((1-x^2)(1-c^2x^2))}} = \frac{dy}{\sqrt{((1-y^2)(1-c^2y^2))}}:$$

son intégrale complète est

$$(\eta.)\qquad x^2+y^2-2xy\sqrt{((1-p^2)(1-c^2p^2))}-p^2(1+c^2x^2y^2) = 0,$$

où p^2 désigne une constante arbitraire (Voyez p. 45 du Tome VI. des *Novi Commentarii* de l'Académie de St. Pétersbourg).

Pour démontrer rapidement ce résultat; soit

$$x^2+y^2+\alpha xy+\beta x^2y^2+\gamma = 0$$

l'intégrale demandée. En la différentiant, on aura

$$dx\{2x+\alpha y+2\beta xy^2\}+dy\{2y+\alpha x+2\beta yx^2\} = 0.$$

Mais en résolvant l'équation précédente, on aura

$$y = -\frac{\alpha x+\sqrt{(\alpha^2x^2-4(\gamma+x^2)(1+\beta x^2))}}{2(1+\beta x^2)};$$

$$x = -\frac{\alpha y-\sqrt{(\alpha^2y^2-4(\gamma+y^2)(1+\beta y^2))}}{2(1+\beta y^2)}:$$

donc l'équation différentielle, après avoir divisé par -4γ sous le radical, sera équivalente à celle-ci:

$$\frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\left(\frac{\alpha^2}{4\gamma}-\beta-\frac{1}{\gamma}\right)+\frac{\beta}{\gamma}x^4\right)}} = \frac{dy}{\sqrt{\left(1-y^2\left(\frac{\alpha^2}{4\gamma}-\beta-\frac{1}{\gamma}\right)+\frac{\beta}{\gamma}y^4\right)}}.$$

Pour la rendre identique avec la proposée, il faut prendre $\frac{\beta}{\gamma}=c^2$; $\frac{\alpha^2}{4\gamma}-\beta-\frac{1}{\gamma} = 1+c^2$; ce qui donne $\alpha^2=(1+\gamma)(1+\gamma c^2)$. Le coefficient γ demeure, comme on le voit, arbitraire. Or il est clair qu'il faut prendre γ négativement afin d'avoir pour x une valeur réelle lorsque $y=0$: d'après cela on fait $\gamma=-p^2$, et on prend $\alpha=-\sqrt{[(1-p^2)(1-c^2p^2)]}$, pour avoir $y=x$, lorsque $p=0$.

La méthode directe de *Lagrange* donne le même résultat, après avoir transformé la constante arbitraire; mais il est remarquable que le procédé indirect d'*Euler* soit en quelque sorte préférable, pour avoir l'intégrale sous une forme qui se prête spontanément au changement qu'elle doit subir en exprimant

les transcendantes elliptiques par des lignes trigonométriques. Il est clair que l'équation (η.) peut être écrite ainsi:

$$(1-x^2)(1-y^2) = [\sqrt{(1-p^2)}-xy\sqrt{(1-c^2p^2)}]^2:$$

de sorte qu'en extrayant les racines des deux membres, on a

$$(\eta'.) \quad \sqrt{[(1-x^2)(1-y^2)]} = \sqrt{(1-p^2)}-xy\sqrt{(1-c^2p^2)}.$$

Donc en fesant ici, $x=\sin\varphi$, $y=\sin\varphi'$, $p=\sin\psi$, il viendra

$$\cos\psi = \cos\varphi\cdot\cos\varphi'+\sin\varphi\cdot\sin\varphi'\cdot\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)},$$

c'est-à-dire l'intégrale trigonométrique par laquelle *Legendre* a remplacé celle d'*Euler*. Mais cette dernière donne

$$(\sqrt{[(1-x^2)(1-y^2)]}-\sqrt{(1-p^2)})^2 = x^2y^2(1-c^2p^2);$$

d'où l'on tire

$$0 = 2-x^2-y^2-p^2+(cpxy)^2-2\sqrt{[(1-x^2)(1-y^2)(1-p^2)]}.$$

Donc, en vertu de la symétrie de cette équation, il est permis de changer dans les équations (η.) et (η'.) x ou y en p, et réciproquement, en donnant à ces quantités le signe convenable. Or en résolvant l'équation (η.) par rapport à y on trouve:

$$(\eta''.) \quad y = \frac{x\sqrt{[(1-p^2)(1-c^2p^2)]}-p\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}{1-c^2p^2x^2};$$

partant, on a

$$(\eta'''.) \quad x = \frac{y\sqrt{[(1-p^2)(1-c^2p^2)]}+p\sqrt{[(1-y^2)(1-c^2y^2)]}}{1-c^2p^2y^2};$$

$$(\eta^{\text{IV}}.) \quad p = -\frac{y\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}+x\sqrt{[(1-y^2)(1-c^2y^2)]}}{1-c^2x^2y^2};$$

$$(\eta^{\text{V}}.) \quad \sqrt{(1-p^2)} = \frac{\sqrt{[(1-x^2)(1-y^2)]}+xy\sqrt{[(1-c^2x^2)(1-c^2y^2)]}}{1-c^2x^2y^2};$$

et d'aprés l'équation (η'.):

$$(\eta^{\text{VI}}.) \quad \sqrt{(1-c^2p^2)} = \frac{\sqrt{(1-p^2)}-\sqrt{[(1-x^2)(1-y^2)]}}{xy}.$$

Maintenant, si l'on fait $x=\sin\varphi$, $y=\sin\varphi'$, $p=\sin\psi$, il est clair, que les trois dernières de ces équations coïncident avec celles désignées par (λ.).

Pour tirer de la même source la formule (81.), il faut observer que, en multipliant par $1-c^2x^2=(1-c^2y^2)+c^2(y^2-x^2)$, les deux membres de l'équation différentielle posée au commencement de ce paragraphe, on a:

$$\int dx\sqrt{\left(\frac{1-c^2x^2}{1-x^2}\right)} = \int dy\sqrt{\left(\frac{1-c^2y^2}{1-y^2}\right)}+c^2\int\frac{dy(y^2-x^2)}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c^2y^2)]}}.$$

Or en multipliant par $y(1-c^2p^2x^2)$ les deux membres de l'équation $(\eta''.)$, et par $x(1-c^2p^2y^2)$ les deux membres de l'équation $(\eta'''.)$, on aura en rétranchant ces produits:

$$y^2-x^2 = -py\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}-px\sqrt{[(1-y^2)(1-c^2y^2)]}.$$

Donc l'équation précédente revient à dire que l'on a:

$$\int dx\sqrt{\left(\frac{1-c^2x^2}{1-x^2}\right)} = \int dy\sqrt{\left(\frac{1-c^2y^2}{1-y^2}\right)}-pc^2\cdot xy+\text{Const.}$$

Pour déterminer cette constante, j'observe que l'équation $(\eta.)$ donne $x=p$ lorsque $y=0$: donc la constante doit être égale à la valeur de l'intégrale

$$\int dx\sqrt{\left(\frac{1-c^2x^2}{1-x^2}\right)}$$

lorsqu'on y fait $x=p$: de sorte qu'on doit avoir

$$\text{Const.} = \int_0^p dp\sqrt{\left(\frac{1-c^2p^2}{1-p^2}\right)}:$$

et par là l'équation précédente se transforme dans l'équation (81.), lorsqu'on remplace x, y, p par leurs valeurs trigonométriques. On démontrerait de la même manière les formules (82. et 83.). Mais il suffit d'avoir indiqué que la formule primitive d'***Euler*** est préférable à d'autres que l'on a voulu employer pour démontrer les formules de ***Legendre***.

§. XII.

Je m'arrête sur la formule $(\eta''.)$ pour indiquer une application qui a un rapport intime avec la théorie de la transformation des transcendantes elliptiques de première espèce.

La différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c^2y^2)]}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$$

peut être transformée dans une autre semblable en remplaçant y par $y=\frac{kx}{1+gx^2}$, et déterminant convenablement les deux constantes k et g. En effet, la substitution de cette valeur de y donne

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{kdx(1-gx^2)}{\sqrt{[\{(1+gx^2)^2-k^2x^2\}\{(1+gx^2)^2-c^2k^2x^2\}]}}:$$

donc, en établissant l'équation $c^2k^2=4g$, il viendra

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{kdx}{\sqrt{[1+(2g-k^2)x^2+g^2x^4]}}.$$

Maintenant si l'on fait $1+g^2=k^2-2g$, nous aurons

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}}=\frac{kdx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-g^2x^2)]}},$$

où les valeurs de k et g seront $k=1+g$:

$$g=\frac{(1-\sqrt{(1-c^2)})^2}{c^2}=\frac{1-\sqrt{(1-c^2)}}{1+\sqrt{(1-c^2)}}=\frac{1-b}{1+b}=\frac{c^2}{(1+b)^2},$$

Il suit de là que l'équation différentielle

$$(i.)\quad \frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c^2y^2)]}}=\frac{(1+g)dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-g^2x^2)]}}$$

est satisfaite en posant $y=\frac{(1+g)x}{1+gx^2}$, lorsque la quantité g est une fonction de c déterminée par l'équation précédente. Et telle est cette expression de y en x qu'on en tire

$$\sqrt{(1-y^2)}=\frac{\sqrt{[(1-x^2)(1-g^2x^2)]}}{1+gx^2};\quad \sqrt{(1-c^2y^2)}=\frac{1-gx^2}{1+gx^2}.$$

Mais comme elle ne renferme aucune constante arbitraire, on ne saurait la regarder comme l'intégrale complète de l'équation (*i.*). Pour avoir cette intégrale, j'observe que, d'après la formule (η'''.), si l'on écrit

$$(\eta''.)\quad y=\frac{f(x)\sqrt{[(1-p^2)(1-c^2p^2)]}-p\sqrt{\{[1-f^2\cdot(x)][1-c^2f^2\cdot(x)]\}}}{1-c^2p^2f^2\cdot(x)}$$

on doit avoir, en opérant directement sur cette fonction de x, prise pour y:

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}}=\frac{d\cdot f(x)}{\sqrt{\{[1-f^2\cdot(x)][1-c^2f^2\cdot(x)]\}}},$$

quelle que soit la fonction $f(x)$ et la constante arbitraire p. Donc, en remplaçant $f(x)$ par $\frac{(1+g)x}{1+gx^2}$, on aura

$$y=\frac{(1+g)x(1+gx^2)\sqrt{[(1-p^2)(1-c^2p^2)]}-p(1-gx^2)\sqrt{[(1-x^2)(1-g^2x^2)]}}{(1+gx^2)^2-4gp^2x^2}$$

pour l'intégrale complète de l'équation (*i.*).

L'équation (η_1''.) devant donner pour $f(x)$ la même expression que l'on a pour x, en résolvant l'équation (η''.) nous aurons, d'après la formule (η'''.):

$$\frac{(1+g)x}{1+gx^2}=\frac{p\sqrt{[(1-y^2)(1-c^2y^2)]}+y\sqrt{[(1-p^2)(1-c^2p^2)]}}{1-c^2p^2y^2}.$$

Cela posé, si l'on fait $y=\sin\varphi$; $x=\sin\psi$; $p=\sin\lambda$; l'intégrale complète et transcendante de l'équation (*i.*) sera

$$F(c,\varphi)+F(c,\lambda)=(1+g)F(g,\psi),$$

tandis que l'intégrale complète et algébrique est:

$$\frac{(1+g)\sin\psi}{1+g\sin^2\psi} = \frac{\sin\lambda\cdot\cos\varphi\cdot\varDelta(c,\varphi)+\cos\lambda\cdot\sin\varphi\cdot\varDelta(c,\lambda)}{1-c^2\sin^2\lambda\cdot\sin^2\varphi},$$

où l'on a

$$\varDelta(c,\varphi) = \sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}; \qquad F(c,\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\varDelta(c,\varphi)}.$$

Au reste l'équation

$$(i'.) \qquad F(c,\varphi) = (1+g)F(g,\psi)$$

que l'on obtient en posant $\lambda=0$, et par conséquent

$$(i''.) \quad \begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{(1+g)\sin\psi}{1+g\sin^2\psi}, \\ \cos\varphi = \dfrac{\cos\psi\cdot\sqrt{(1-g^2\sin^2\psi)}}{1+g\sin^2\psi}; \end{cases}$$

comprend le cas général, puisqu'en fesant

$$F(c,\varphi)+F(c,\lambda) = F(c,\theta),$$

on aurait pour déterminer θ l'équation

$$\sin\theta = \frac{(1+g)\sin\psi}{1+g\sin^2\psi}$$

laquelle rend $\sin\theta$ égal à la valeur précédente du second membre exprimé en fonction des deux angles λ et φ.

Ainsi il suffit de considérer les équations $(i'.)$ et $(i''.)$. En y fesant $\operatorname{tang}\frac{1}{2}w = \operatorname{tang}\psi.\sqrt{(1-g^2\sin^2\psi)}$, ou en tire l'équation connue

$$(i'''.) \qquad F(c,\varphi) = \tfrac{1}{2}(1+g)\cdot F(g,w);$$

c'est-à-dire l'équation que l'on aurait en fesant directement:

$$\sin(2\varphi-w) = g\sin w;$$

d'où l'on tire

$$\sin w = \frac{2}{1+g}\cdot\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\varDelta(c,\varphi)}; \qquad \operatorname{tang} w = \frac{(1+b)\operatorname{tang}\varphi}{1-b\operatorname{tang}^2\varphi}.$$

Puisque en fesant $\psi=90^0$ on a aussi $\varphi=90^0$, il résulte des équations $(i'.)$ et $(i''.)$, qu'entre les fonctions complètes $F'(c)$ et $F'(g)$ il y a cette relation fort simple:

$$F'(c) = (1+g)F'(g).$$

Et comme $c=\frac{2\sqrt{g}}{1+g}$; $b=\frac{1-g}{1+g}$, cela revient à dire que l'on a

$$F'\left\{\frac{2\sqrt{g}}{1+g}\right\} = (1+g)F'(g).$$

Cette équation devant être identique, il est permis de remplacer g par $\frac{1-g}{1+g}$ dans les deux membres: alors en fesant $h=\sqrt{(1-g^2)}$, il viendra l'équation

$$F'(h)=\frac{2}{1+g}\cdot F'(b),$$

entre les fonctions complètes complémentaires. Il suit de là que l'on a l'équation

$$\frac{F'(c)}{F'(b)}=\frac{2\cdot F'(g)}{F'(h)}:$$

et on sait qu'elle est le premier cas d'un théorème beaucoup plus général.

Puisque l'équation (*i.*) devient identique en fesant

$$y=\frac{(1+g)x}{1+gx^2},$$

il est clair que l'identité subsistera encore en remplaçant x par $x\sqrt{-1}$, et y par $y\sqrt{-1}$: ce qui revient à dire que l'équation

$$\frac{dy}{\sqrt{[(1+y^2)(1+c^2y^2)]}}=\frac{(1+g)\,dx}{\sqrt{[(1+x^2)(1+g^2x^2)]}}$$

est satisfaite, en fesant $y=\frac{(1+g)x}{1-gx^2}$. Cela posé, si l'on fait $y=\operatorname{tang}\varphi$, $x=\operatorname{tang}\psi$, on aura l'équation différentielle

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-b^2\sin^2\varphi)}}=\frac{(1+g)\,d\psi}{\sqrt{(1-h^2\sin^2\psi)}};$$

de sorte qu'en intégrant on a

$$(i^{\text{IV}}.)\qquad F(b,\varphi)=(1+g)F(c,\psi),\qquad \operatorname{tang}\varphi=\frac{(1+g)\operatorname{tang}\psi}{1-g\operatorname{tang}^2\psi}.$$

Maintenant, si l'on fait $\varphi=90^0$, il faudra que l'on ait $0=1-g\operatorname{tang}^2\psi$, ce qui indique, que cette valeur particulière de ψ répond à l'amplitude égale à la moitié de la fonction complète $F'(h)$: partant on aura l'équation $F'(b)=\frac{1}{2}(1+g)\cdot F'(h)$, qui s'accorde avec celle trouvée précédemment par une considération différente.

§. XIII.

L'artifice d'analyse que je viens d'employer pour passer d'une intégrale particulière à l'intégrale complète pourroit aussi être appliqué aux équations différentielles que l'on obtient par les formules de Mr. *Jacobi*.

En citant ces formules, je ne puis m'empêcher de faire remarquer qu'il y a un moyen assez naturel de les trouver par une espèce d'induction. Et malgré l'imperfection qui est inhérente à cette manière de découvrir la vérité,

il faut avouer qu'elle jette de la lumière sur les démonstrations rigoureuses, et en apparence déterminées, que l'on peut ensuite en donner. Alors on conçoit qu'il n'y a aucune divination, et on croit avoir trouvé le fil des idées dont la filiation a amené l'inventeur sur les résultats nouveaux qu'il nous présente par une succession de raisonnements où la trace de leur origine semble pour ainsi dire perdue.

Pour développer, au moins en partie, les reflexions que j'ai faites sur cette mémorable transformation; considérons l'équation différentielle

$$(j.)\qquad \frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c^2y^2)]}}=\frac{1}{m}\cdot\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-g^2x^2)]}},$$

et observons que, si $y=f(x)$ est une intégrale particulière de cette équation, on pourra aussi prendre $y=-f\left(\frac{1}{gx}\right)$, puisque le second membre, par le changement de x en $\frac{1}{gx}$, demeure le même, au signe près. Mais d'un autre côte l'équation $(j.)$ revient à dire que:

$$(j'.)\qquad \frac{d\cdot\left(\frac{1}{cy}\right)}{\sqrt{\left[\left(1-\frac{1}{c^2y^2}\right)\left(1-\frac{c^2}{c^2y^2}\right)\right]}}=\frac{1}{m}\cdot\frac{d\cdot\left(\frac{1}{gx}\right)}{\sqrt{\left[\left(1-\frac{1}{g^2x^2}\right)\left(1-\frac{g^2}{g^2x^2}\right)\right]}}:$$

donc il faut en conclure que, telle est la nature de la fonction $f(x)$, que l'on doit avoir: ou $f(x)=f\left(\frac{1}{gx}\right)$, ce qui en apprendroit rien de nouveau: ou

$$f\left(\frac{1}{gx}\right)-\frac{1}{cf(x)}:$$

ou bien, que la fonction $\frac{1}{cf(x)}$ s'obtient, en donnant à la constante arbitraire p, qui entre dans le second membre de l'équation $(\eta_1''.)$, une valeur convenable, après avoir remplacé $f(x)$ par $f\left(\frac{1}{gx}\right)$. Certes, ce qu'il y a de plus simple, est de supposer l'existence du second cas, c'est-à-dire l'existence de l'équation

$$(\lambda.)\qquad \frac{1}{c}=f(x).f\left(\frac{1}{gx}\right).$$

Alors, les intégrales particulières devront être cherchées parmi les fonctions de x qui satisfont à cette équation aux différences finies. Or il est d'abord clair que Hx^i et $\frac{1+Bx^n}{1+Ax^n}$ sont deux fonctions de x susceptibles de rendre identique l'équation $(\lambda.)$; d'où on conclud que leur produit a la même propriété.

Car en posant

$$f(x) = Hx^i\left(\frac{1+Bx^n}{1+\frac{g^n x^n}{B}}\right),$$

on en tire

$$f\left(\frac{1}{gx}\right) = \frac{H^2 B^2}{g^{i+n}}\cdot\frac{1}{Hx^i}\left(\frac{1+\frac{g^n x^n}{B}}{1+Bx^n}\right),$$

et par conséquent,

$$f(x)\cdot f\left(\frac{1}{gx}\right) = \frac{H^2 B^2}{g^{i+n}}.$$

Ainsi il faudra que l'on ait

$$\frac{1}{c} = \frac{H^2 B^2}{g^{i+n}}.$$

En outre, il n'est pas moins clair qu'on doit prendre $H=\frac{1}{m}$; puisque, par hypothèse, la substitution de $f(x)$ pour y dans l'équation différentielle $(j.)$ donne une identité qui doit avoir lieu, même pour $x=0$, ce qui exige que l'on ait $H=\frac{1}{m}$. Suivant cette manière de voir on aura

$$f(x) = \frac{1}{m}\cdot x^i\left(\frac{1+Bx^n}{1+\frac{g^n x^n}{B}}\right); \qquad \frac{1}{c} = \frac{B^2}{m^2\cdot g^{i+n}}.$$

Maintenant, si l'on veut que cette fonction de x se réduise à l'unité positive lorsque $x=1$, il faudra établir l'équation

$$m = \frac{1+B}{1+\frac{g^n}{B}}.$$

Et si, en outre, on demande que la valeur de m soit positive, et que celle de $f(x)$ soit positive depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, il faudra exprimer cette condition en remplaçant B par B^2 et n par $2n$; de sorte qu'on aura

$$f(x) = \frac{1}{m}\cdot x^i\left(\frac{1+B^2x^{2n}}{1+\frac{g^{2n}x^{2n}}{B^2}}\right); \qquad \frac{1}{c} = \frac{B^4}{m^2 g^{i+2n}}; \qquad m = \frac{1+B^2}{1+\frac{g^{2n}}{B^2}}.$$

Et comme nous voulons aussi que l'on ait $f(-x) = -f(x)$, il faudra prendre, pour l'exposant i, un nombre impair. Dans cette généralité, ce qu'il y a de plus simple est de faire $i=1$, $n=1$; alors on a:

$$y = f(x) = \frac{x}{m}\left(\frac{1+B^2x^2}{1+\frac{g^2x^2}{B^2}}\right); \qquad \frac{1}{c} = \frac{B^4}{m^2 g^3}; \qquad m = \frac{1+B^2}{1+\frac{g^2}{B^2}}.$$

Ce raisonnement étant évidemment applicable à un nombre quelconque de facteurs semblables, on peut dire que l'équation (λ.) est satisfaite en prenant

$$f(x) = \frac{x}{m}\left(\frac{1+B^2x^2}{1+\frac{g^2x^2}{B^2}}\right)\left(\frac{1+B'^2x^2}{1+\frac{g^2x^2}{B'^2}}\right)\left(\frac{1+B''^2x^2}{1+\frac{g^2x^2}{B''^2}}\right)\dots;$$

$$\frac{1}{c} = \frac{B^4}{m^2g^3}\cdot\frac{B'^4}{g^2}\cdot\frac{B''^4}{g^2}\dots;$$

$$m = \left(\frac{1+B^2}{1+\frac{g^2}{B^2}}\right)\left(\frac{1+B'^2}{1+\frac{g^2}{B'^2}}\right)\left(\frac{1+B''^2}{1+\frac{g^2}{B''^2}}\right)\dots\dots$$

Si l'on avait pris $i=3$, $n=2$, par exemple, on aurait formé d'autres fonctions de x qui satisferaient à l'équation (λ.) mais non à l'équation différentielle (j.). Admettons donc (ce qui sera rigoureusement démontré par la suite) que l'expression précédente de $f(x)$ n'a rien d'incompatible, et en considérant d'abord le cas le plus simple de deux facteurs seulement, voyons ce que nous pouvons découvrir à l'égard des quatre constantes c, g, m, B^2, en analysant les conséquences qui naissent de la comparaison entre l'intégrale particulière algébrique et l'intégrale particulière transcendante.

En fesant $y=\sin\varphi$, $x=\sin\psi$, on aura l'équation différentielle

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}} = \frac{1}{m}\cdot\frac{d\psi}{\sqrt{(1-g^2\sin^2\psi)}},$$

dont l'intégrale transcendante est (suivant la notation de *Legendre*):

$$F(c,\varphi) = \frac{1}{m}.F(g,\psi),$$

et l'intégrale algébrique

$$\sin\varphi = \frac{1}{m}\cdot\sin\psi\left(\frac{1+B^2\sin^2\psi}{1+\frac{g^2\sin^2\psi}{B^2}}\right).$$

Ici, la marche des deux amplitudes φ et ψ est telle que l'on a ces valeurs correspondantes; savoir

$$\varphi\dots.0,\ \tfrac{1}{2}\pi,\ \pi,\ \tfrac{3}{2}\pi,\ \text{etc.},$$
$$\psi\dots.0,\ \tfrac{1}{2}\pi,\ \pi,\ \tfrac{3}{2}\pi,\ \text{etc.}$$

Et de là on ne peut tirer aucune conséquence. Mais en revenant sur l'équation différentielle primitive (j.) en x et y, on peut observer que l'identité obtenue par $y=f(x)$ doit encore subsister par le changement simultané de x et y en $x\sqrt{-1}$ et $y\sqrt{-1}$. Or celà revient à dire que l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{[(1+y^2)(1+c^2y^2)]}} = \frac{1}{m}\cdot\frac{dx}{\sqrt{[(1+x^2)(1+g^2x^2)]}}$$

doit avoir pour intégrale particulière

$$y = f(x) = \frac{x}{m}\left(\frac{1 - B^2 x^2}{1 - \frac{g^2 x^2}{B^2}}\right).$$

Donc en fesant ici, $y = \operatorname{tang}\varphi$, $x = \operatorname{tang}\psi$, on aura l'équation différentielle

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - b^2 \sin^2\varphi)}} = \frac{1}{m} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{(1 - h^2 \sin^2\psi)}},$$

où $b^2 = 1 - c^3$; $h^2 = 1 - g^2$. En rapprochant son intégrale transcendante et son intégrale algébrique, on a ces deux équations:

$$F(b, \varphi) = \frac{1}{m} \cdot F(h, \psi),$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{1}{m} \cdot \operatorname{tang}\psi\left(\frac{1 - B^2 \cdot \operatorname{tang}^2\psi}{1 - \frac{g^2}{B^2} \cdot \operatorname{tang}^2\psi}\right).$$

Les deux variables φ et ψ commencent avec $\varphi = 0$ et $\psi = 0$. Mais en fesant $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, et nommant ψ' l'amplitude correspondante de ψ, on aura l'équation

$$1 - \frac{g^2}{B^2} \operatorname{tang}^2\psi' = 0.$$

De même si l'on nomme ψ'' la valeur de ψ correspondante à $\varphi = \pi$, on aura l'équation

$$1 - B^2 \operatorname{tang}^2\psi'' = 0.$$

Et comme ces deux dernières équations donnent

$$1 = g \cdot \operatorname{tang}\psi' \cdot \operatorname{tang}\psi'':$$

il faut en conclure que les deux amplitudes ψ' et ψ'' sont ***complémentaires*** par rapport à la fonction $F(h, \psi)$. En fesant $\varphi = \frac{3}{2}\pi$, il est évident que l'on a $\psi = \frac{1}{2}\pi$. De là on tire la conséquence que l'intégrale transcendante donne ces trois équations:

$$F'(b) = \frac{1}{m} F(h, \psi'); \quad 2F'(b) = \frac{1}{m} F(h, \psi''); \quad 3F'(b) = \frac{1}{m} F'(h),$$

desquelles on conclud que

$$F(h, \psi') = \tfrac{1}{3} F'(h).$$

On pourra donc déterminer l'amplitude ψ' dès que le module h sera connu, soit algébriquement, soit par cette équation transcendante.

Or on a les deux équations

$$\frac{1}{c} = \frac{B^4}{m^2 g^3}, \quad m = \frac{1 + B^2}{1 + \frac{g^2}{B^2}},$$

qui donnent

$$(\varepsilon.)\quad \begin{cases} m = \dfrac{1+\operatorname{cotang}^2\psi''}{1+\operatorname{cotang}^2\psi'} = \dfrac{\sin^2\psi'}{\sin^2\psi''}; \\ g = \dfrac{c}{m^2}\cdot B^2\left(\dfrac{B^2}{g^2}\right) = c\cdot\dfrac{\sin^2\psi''\cdot\cos^2\psi''}{\sin^2\psi'\cdot\cos^2\psi'}; \\ gc = \left(\dfrac{g^2}{B^2}\right)^2\left(\dfrac{1+B^2}{1+\dfrac{g^2}{B^2}}\right)^2 = \dfrac{\cos^4\psi'}{\sin^4\psi''}. \end{cases}$$

Et outre cela on a les équations

$$(\varepsilon_1.)\quad F(h,\psi') = \tfrac{1}{3}F'(h);\quad F(h,\psi'') = \tfrac{2}{3}F'(h);\quad 1 = g\operatorname{tang}\cdot\psi'\cdot\operatorname{tang}\cdot\psi''.$$

Et comme pour la trisection des fonctions elliptiques complètes de première espèce on a les formules

$$(\varepsilon''.)\quad \begin{cases} r^3 = \dfrac{4g^2}{h^4} = \dfrac{4(1-h^2)}{h^4} = \dfrac{4g^2}{(1-g^2)^2}; \\ \sin\psi' = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+r)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{[2-r+2\sqrt{(1-r+r^2)}]}; \end{cases}$$

il est clair que les quantités g, m, ψ', ψ'' peuvent être regardées comme déterminées. De sorte que nous obtenons à la fois ces deux systèmes d'équations:

$$(\lambda'.)\quad F(c,\varphi) = \frac{1}{m}F(g,\psi),\qquad \sin\varphi = \frac{1}{m}\cdot\sin\psi\left\{\frac{1+\cot^2\psi''\cdot\sin^2\psi}{1+\cot^2\psi'\cdot\sin^2\psi}\right\};$$

$$(\lambda''.)\quad F(b,\varphi) = \frac{1}{m}F(h,\psi),\quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{1}{m}\cdot\operatorname{tang}\psi\left\{\frac{1-\cot^2\psi''\cdot\operatorname{tang}^2\psi}{1-\cot^2\psi'\cdot\operatorname{tang}^2\psi}\right\}.$$

Nous employons les mêmes lettres φ et ψ pour représenter les variables correspondantes dans l'un comme dans l'autre, parceque cela nous paraît plus conforme au langage algébrique. Mais on conçoit bien que d'après le raisonnement fait, on ne doit pas regarder l'équation entre $\operatorname{tang}\varphi$ et $\operatorname{tang}\psi$ comme une déduction immédiate de l'équation entre $\sin\varphi$ et $\sin\psi$. Au reste, la marche des amplitudes pour les équations $(\lambda'.)$ est

$$\varphi\ldots.0,\ \tfrac{1}{2}\pi,\ \pi,\ \tfrac{3}{2}\pi,\ \text{etc.},$$
$$\psi\ldots.0,\ \tfrac{1}{2}\pi,\ \pi,\ \tfrac{3}{2}\pi,\ \text{etc.},$$

tandis que pour les équations $(\lambda''.)$ la marche des amplitudes est:

$$\varphi\ldots.0,\ \tfrac{1}{2}\pi,\ \pi,\ \tfrac{3}{2}\pi,\quad 2\pi,\quad \tfrac{5}{2}\pi,\quad 3\pi,\ \text{etc.},$$
$$\psi\ldots.0,\ \psi',\ \psi'',\ \tfrac{1}{2}\pi,\ \pi-\psi'',\ \pi-\psi',\ \pi,\ \text{etc.}$$

Il suit de là que l'on a

$$F'(c) = \frac{1}{m}F'(g);\qquad F'(b) = \frac{1}{m}F(h,\psi') = \frac{1}{3m}F'(h);$$

et par conséquent

$$(\varepsilon'''.) \qquad \frac{F'(c)}{F'(b)} = 3\cdot\frac{F'(g)}{F'(h)};$$

c'est-à-dire l'équation analogue à celle trouvée dans le paragraphe précédent.

Cela posé, par le simple renversement de l'analyse précédente, nous allons trouver deux autres systèmes de deux équations entre les mêmes modules c, b, g, h qui coexistent avec ceux désignés par $(\lambda'.)$ et $(\lambda''.)$, et donnent directement les valeurs de g et m en fonction du module donné c.

Pour cela je considère l'équation différentielle

$$(j''.) \qquad \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-g^2x^2)]}} = \frac{m'dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c^2y^2)]}}$$

et je lui applique un raisonnement tout-à-fait analogue à celui qui a été fait pour l'équation $(j.)$; avec cette différence qu'ici je regarde l'équation de la forme $x = F(y)$ comme son intégrale particulière. Alors je trouve que la fonction cherchée de y doit se trouver parmi celles qui rendent identique l'équation

$$(\lambda_1.) \qquad \frac{1}{g} = F(y).F\left(\frac{1}{cy}\right).$$

Maintenant, pour considérer le cas le plus simple, qui est celui des deux facteurs, je prends

$$x = F(y) = \frac{m'y\left\{1-\frac{y^2}{A^2}\right\}}{1-c^2A^2y^2},$$

ce qui donne

$$\frac{1}{g} = \frac{m'^2}{c^2A^4}.$$

Donc, si l'on fait ici, $x=\sin\psi$, $y=\sin\varphi$, l'intégrale transcendante sera

$$F(g,\psi) = m'F(c,\varphi),$$

et l'intégrale algébrique sera

$$\sin\psi = m'\cdot\sin\varphi\left\{\frac{1-\frac{\sin^2\varphi}{A^2}}{1-c^2A^2\sin^2\varphi}\right\}.$$

Soit $A=\sin\varphi''$. En fesant $\varphi=\varphi''$, on a $\psi=\pi$, et par conséquent $2F'(g) = m'F(c,\varphi'')$. En désignant par ψ'' la valeur de ψ qui répond à $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, nous aurons

$$\sin\psi'' = \frac{-m'}{\sin^2\varphi''}\cdot\frac{\cos^2\varphi''}{1-c^2\sin^2\varphi''};$$

$$F(g,\psi'') = m'F'(c) = \frac{m'}{m}\cdot F'(g).$$

En nommant φ' l'amplitude complémentaire de φ'', on a comme on sait,

$$\sin^2\varphi' = \frac{\cos^2\varphi''}{1-c^2\sin^2\varphi''},$$

partant,

$$\sin\psi'' = -\frac{m'}{\sin^2\varphi''}\cdot\sin^2\varphi'.$$

Soit ψ' la valeur de ψ qui répond à $\varphi=\varphi'$; nous aurons $F(g,\psi')=m'F(c,\varphi')$, et

$$\sin\psi' = \frac{m'\sin\varphi'}{\sin^2\varphi''}\cdot\frac{(\sin^2\varphi''-\sin^2\varphi')}{(1-c^2\sin^2\varphi'\sin^2\varphi'')}.$$

D'après cela nous avons

$$2F'(g)-F(g,\psi') = m'\{F(c,\varphi'')-F(c,\varphi')\},$$

ou bien

$$2F'(g)-F(g,\psi') = m'F(c,\theta'),$$

en nommant θ' l'amplitude qui donne $F(c,\varphi'')-F(c,\varphi')=F(c,\theta')$. D'un autre côté, les deux amplitudes φ'' et φ' étant complémentaires, on a

$$\sin\theta' = \frac{\sin^2\varphi''-\sin^2\varphi'}{1-c^2\sin^2\varphi'\cdot\sin^2\varphi''};$$

partant:

$$\sin\psi' = \frac{m'\sin\varphi'\cdot\sin\theta'}{\sin^2\varphi''},\qquad \frac{\sin\psi''}{\sin\psi'} = -\frac{\sin\varphi'}{\sin\theta'}.$$

Donc en fesant $\theta'=\varphi'$, on aura $2F'(g)-F(g,\psi')=m'F(c,\psi')$, ou bien $2F'(g)-F(g,\psi')=F(g,\psi')$; d'où l'on tire $F'(g)=F(g,\psi')$: ainsi on a $\psi'=\frac{1}{2}\pi$ et $\psi''=\frac{3}{2}\psi$. Et comme on a $F(c,\psi'')=\frac{m'}{m}F'(g)$, il viendra $3F'(g)=\frac{m'}{m}F'(g)$; ce qui donne $m'=3m$, et

$$\frac{1}{g} = \frac{(3m)^2}{c^3\sin^4\varphi''};\qquad g = \frac{c^3\sin^4\varphi''}{(3m)^2} = c^3\sin^4\varphi'.$$

Il suit de là qu'en posant

$$(\varepsilon^{\text{IV}}.)\quad \begin{cases} g = c^3\sin^4\varphi'; \\ F(c,\varphi')=\frac{1}{3}F'(c); \qquad F(c,\varphi'')=\frac{2}{3}F'(c); \end{cases}$$

nous aurons:

$$(\lambda'''.)\quad \begin{cases} F(g,\psi) = 3mF(c,\varphi); \\ \sin\psi = 3m\cdot\sin\varphi\cdot\dfrac{\left\{1-\dfrac{\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi''}\right\}}{1-c^2\sin^2\varphi''\cdot\sin^2\varphi}, \end{cases}$$

où la marche correspondante des amplitudes est telle que l'on a

$$\varphi\ldots.0,\ \varphi',\ \varphi'',\ \tfrac{1}{2}\pi,\ \pi-\varphi'',\ \pi-\varphi',\ \pi,\ \text{etc.},$$
$$\psi\ldots.0,\ \tfrac{1}{2}\pi,\ \pi,\ \tfrac{3}{2}\pi,\ 2\pi,\ \tfrac{5}{2}\pi,\ 3\pi,\ \text{etc.}$$

Maintenant, si on reprend l'équation (j''.), on verra, de même que dans le cas précédent, que par le changement de x et y en $x\sqrt{-1}$ et $y\sqrt{-1}$, on obtient, après avoir fait $x=\text{tang}\,\psi$, $y=\text{tang}\,\varphi$:

$$(\lambda^{\text{IV}}.)\quad \begin{cases} F(h,\psi) = 3m F(b,\varphi); \\ \text{tang}\,\psi = 3m\cdot\dfrac{\text{tang}\,\varphi\left\{1+\dfrac{\text{tang}^2\varphi}{\sin^2\varphi''}\right\}}{1+c^2\sin^2\varphi''\cdot\text{tang}^2\varphi}; \end{cases}$$

où la marche des amplitudes est

$$\varphi\ldots.0,\ \tfrac{1}{2}\pi,\ \pi,\ \tfrac{3}{2}\pi,\ \text{etc.};$$
$$\psi\ldots.0,\ \tfrac{1}{2}\pi,\ \pi,\ \tfrac{3}{2}\pi,\ \text{etc.}$$

Si ce changement avait été fait immédiatement après avoir établi l'équation $F(g,\psi)=m'F(c,\varphi)$, on en aurait conclu, à l'aide des équations (λ''.), qu'on doit avoir nécessairement $m'=3m$. En fesant $\psi=\frac{3}{2}\pi$, $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, les équations (λ'''.) donnent

$$(\varepsilon^{\text{V}}.)\quad \frac{1}{3m} = \frac{\sin^2\varphi'}{\sin^2\varphi''}.$$

Il suit de là et des équations (ε.) que l'on a

$$(\varepsilon^{\text{VI}}.)\quad \frac{\sin\varphi''}{\sin\varphi'} = \sqrt{3}\cdot\frac{\sin\psi'}{\sin\psi''}.$$

On voit par là que le coefficient m et le module g peuvent être déterminés directement en connoissant le module c à l'aide des équations

$$g = c^3\sin^4\varphi';\qquad m = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{\sin^2\varphi''}{\sin^2\varphi'}.$$

La marche des amplitudes ψ étant la même pour les équations (λ'.) et pour les équations (λ'''.): si dans ces dernières on écrit ω au lieu de φ, on en conclura que les amplitudes φ et ω qui donnent $\frac{1}{3}F(c,\varphi)=F(c,\omega)$, peuvent être déterminées par ces deux équations; savoir:

$$\sin\varphi = \frac{3}{m}\cdot\sin\psi\left\{\frac{1+\cot^2\psi''\cdot\sin^2\psi}{1+\cot^2\psi'\cdot\sin^2\psi}\right\};$$

$$\sin\psi = 3m\cdot\frac{\sin\omega\left\{1-\dfrac{\sin^2\omega}{\sin^2\varphi''}\right\}}{1-c^2\sin^2\varphi''\cdot\sin^2\omega}.$$

Par l'élimination de $\sin\psi$ on aurait une équation du *neuvième* degré entre $\sin\varphi$ et $\sin\omega$. C'est par ces formules que Mr. *Jacobi* a singulièrement abaissé la difficulté du problème de la trisection des fonctions elliptiques de première espèce. (Voyez Tome 3. du Traité de *Legendre* p. 67 — 73.) C'est ainsi,

par exemple, qu'en fesant

$$g^0=\frac{1-h}{1+h},\qquad \sin\psi=\frac{(1+g^0)\sin\theta}{1+g^0\cdot\sin^2\theta},$$

on aurait l'équation $F(g,\psi)=(1+g^0)F(g^0,\theta)$, laquelle, par sa combinaison avec les équations (λ'.), donne

$$F(c,\varphi)=\frac{(1+g^0)}{m}F(g^0,\theta);$$

mais l'équation du sixième degré entre $\sin\varphi$ et $\sin\theta$ peut être remplacée par les deux équations

$$\sin\varphi=\frac{1}{m}\sin\psi\left\{\frac{1+\cot^2\psi''\sin^2\psi}{1+\cot^2\psi'\sin^2\psi}\right\},\qquad \sin\psi=\frac{(1+g^0)\sin\theta}{1+g^0\sin^2\theta}.$$

On conçoit maintenant sans difficulté, qu'en prenant trois facteurs au lieu de deux, pour rendre identique l'équation (λ_1.), on trouverait de la même manière, que les équations (ε^{IV}.) et (λ'''.) sont remplacées par celles-ci; savoir

$$(\varepsilon_1^{\text{IV}}.)\quad\begin{cases} g=c^5\cdot\sin^4\varphi'\cdot\sin^4\varphi'''; & m=\frac{1}{5}\cdot\frac{\sin^2\varphi''}{\sin^2\varphi'''}\cdot\frac{\sin^2\varphi^{\text{IV}}}{\sin^2\varphi'};\\ F(c,\varphi')=\frac{1}{5}F'(c); & F(c,\varphi'')=\frac{2}{5}F'(c);\\ F(c,\varphi''')=\frac{3}{5}F'(c); & F(c,\varphi^{\text{IV}})=\frac{4}{5}F'(c);\end{cases}$$

$$(\lambda_1'''.)\quad\begin{cases} F(g,\psi)=5m\cdot F(c,\varphi),\\ \sin\psi=5m\cdot\sin\varphi\left(\dfrac{1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi''}}{1-c^2\sin^2\varphi''\cdot\sin^2\varphi}\right)\left(\dfrac{1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi^{\text{IV}}}}{1-c^2\sin^2\varphi^{\text{IV}}\cdot\sin^2\varphi}\right).\end{cases}$$

En généralisant ce résultat, on dira que, λ étant un nombre impair quelconque, si l'on fait

$$(\gamma.)\quad\begin{cases} g=c^\lambda\sin^4\varphi'\cdot\sin^4\varphi'''\cdots\sin^4\varphi^{(\lambda-2)},\\ m=\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\sin^2\varphi^{(\lambda-1)}}{\sin^2\varphi'}\cdot\frac{\sin^2\varphi^{(\lambda-3)}}{\sin^2\varphi'''}\cdot\frac{\sin^2\varphi^{(\lambda-6)}}{\sin^2\varphi^{\text{V}}}\cdots\frac{\sin^2\varphi''}{\sin^2\varphi^{(\lambda-2)}},\end{cases}$$

l'équation transcendante

$$(\nu.)\qquad F(g,\psi)=\lambda m\cdot F(c,\varphi),$$

sera satisfaite par l'équation algébrique $\sin\psi=\lambda m\cdot\sin\varphi\cdot\frac{U}{V}$, où l'on a

$$\frac{U}{V}=\left(\frac{1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi''}}{1-c^2\sin^2\varphi''\cdot\sin^2\varphi}\right)\left(\frac{1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi^{\text{IV}}}}{1-c^2\sin^2\varphi^{\text{IV}}\cdot\sin^2\varphi}\right)\cdots\left(\frac{1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi^{(\lambda-1)}}}{1-c^2\sin^2\varphi^{(\lambda-1)}\sin^2\varphi}\right);$$

les amplitudes φ', φ'', φ''', ... $\varphi^{(\lambda)}$ étant celles qui satisfont aux équations

$$F(c,\varphi')=\frac{1}{\lambda}F'(c);\quad F(c,\varphi'')=\frac{2}{\lambda}F'(c),\quad\ldots\quad F'(c,\varphi^{(\lambda-1)}=\frac{\lambda-1}{\tau}F'(c).$$

La marche des amplitudes est

$$(\beta.)\quad \begin{cases} \varphi \ldots . 0, & \varphi', \quad \varphi'', \quad \varphi''', \quad \ldots . \quad \varphi^{(\lambda)} = \frac{1}{2}\pi, \quad \text{etc.}, \\ \psi \ldots . 0, & \frac{1}{2}\pi, \quad \pi, \quad \frac{3}{2}\pi, \quad \ldots . \quad \frac{1}{2}\tau\pi, \quad \text{etc.} \end{cases}$$

Il est clair que par un raisonnement analogue à celui exposé pour $\lambda=3$, on trouverait les trois autres systèmes de formules. De sorte qu'on peut en former quatre pour chaque valeur du nombre impair λ. Maintenant, pour faire voir de quelle manière on doit tirer les valeurs des $\cos\psi$, $\sqrt{(1-g^2\sin^2\psi)}$ de celle de $\sin\psi$, faisons, pour plus de simplicité, $y=\sin\varphi$, $x=\sin\psi$;

$$U=\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\varphi''}\right)\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\varphi^{\text{IV}}}\right)\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\varphi^{\text{VI}}}\right)\ldots .\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\varphi^{(\lambda-1)}}\right);$$

$$V=(1-c^2\sin^2\varphi''\cdot y^2)(1-c^2\sin^2\varphi^{\text{IV}}\cdot y^2)(1-c^2\sin^2\varphi^{\text{VI}}\cdot y^2)\ldots .(1-c^2\sin^2\varphi^{(\lambda-1)}\cdot y^2);$$

ce qui donne

$$x = \lambda m\cdot y\cdot\frac{U}{V};\quad 1-x=\frac{V-\lambda m\cdot yU}{V}.$$

D'après la marche progressive des amplitudes φ et ψ indiquée par les deux suites désignées plus haut par $(\beta.)$, nous savons qu'en fesant successivement $y=\sin\varphi'$, $y=\sin\varphi''$, $y=\sin\varphi'''$, ... $y=\sin\varphi^{(\lambda)}=1$, on doit avoir $x=+1$, $x=-1$, $x=+1$, $x=-1$, ... $x=\mp 1$; la dernière valeur de x étant -1 ou $+1$, suivant qu'on aura $\lambda=4i-1$ ou $\lambda=4i+1$. Donc le polynome $V-\lambda myU$, du degré λ, devant devenir nul pour toutes les valeurs de y qui donnent $x=1$, aura pour facteur le produit

$$\left(1-\frac{y}{\sin\varphi'}\right)\left(1+\frac{y}{\sin\varphi'''}\right)\left(1-\frac{y}{\sin\varphi^{\text{V}}}\right)\ldots .\left(1\mp\frac{y}{\sin\varphi^{(\lambda-2)}}\right)(1\pm y),$$

dont le degré est $\frac{1}{2}(\lambda+1)$.

Mais nous aurons, en différentiant l'expression de $1-x$:

$$V^2\cdot\frac{dx}{dy} = (V-\lambda myU)\,d\cdot\left(\frac{\lambda myU}{dy}\right)-\lambda myU\,d.\frac{(V-\lambda myU)}{dy};$$

et d'après l'équation différentielle $(f''.)$:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{\lambda m\sqrt{[(1-x^2)(1-g^2x^2)]}}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c^2y^2)]}};$$

donc pour toute valeur de y qui donne $x=+1$, on doit avoir à la fois $\frac{dx}{dy}=0$, $V-\lambda myU=0$, et

$$\frac{d\cdot(V-\lambda myU)}{dy}=0.$$

Il suit de là et de ce que λ est le degré du polynome $V-\lambda m y U$ qu'on doit avoir

$$(\mu.)\qquad 1-x=\frac{(1\pm y)\left(1-\frac{y}{\sin\varphi'}\right)^2\left(1+\frac{y}{\sin\varphi'''}\right)^2\ldots\left(1\mp\frac{y}{\sin\varphi^{(\lambda-2)}}\right)^2}{V}.$$

Et comme l'équation $x=\lambda m\cdot y\frac{U}{V}$ est telle, que le changement de signe de y entraîne le changement de signe de x, nous aurons aussi

$$(\mu'.)\qquad 1+x=\frac{(1\mp y)\left(1+\frac{y}{\sin\varphi'}\right)^2\left(1-\frac{y}{\sin\varphi'''}\right)^2\ldots\left(1\pm\frac{y}{\sin\varphi^{(\lambda-2)}}\right)^2}{V}.$$

Donc en fesant le produit $(1-x)(1+x)=(1-x^2)$ et extrayant ensuite la racine carrée, il viendra

$$(\mu''.)\quad \sqrt{(1-x^2)}=\sqrt{(1-y^2)}\left\{\frac{1-\frac{y^2}{\sin^2\varphi'}}{1-c^2\sin^2\varphi''\cdot y^2}\right\}\left\{\frac{1-\frac{y^2}{\sin^2\varphi'''}}{1-c^2\sin^2\varphi^{\text{IV}}\cdot y^2}\right\}\ldots\left\{\frac{1-\frac{y^2}{\sin^2\varphi^{(\lambda-2)}}}{1-c^2\sin\varphi^{(\lambda-1)}\cdot y^2}\right\};$$

c'est-à-dire

$$\cos\psi=\cos\varphi\left\{\frac{1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi'}}{1-c^2\sin\varphi''\cdot\sin^2\varphi}\right\}\left\{\frac{1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi'''}}{1-c^2\sin^2\varphi^{\text{IV}}\cdot\sin^2\varphi}\right\}\ldots\left\{\frac{1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi^{(\lambda-2)}}}{1-c^2\sin^2\varphi^{(\lambda-1)}\cdot\sin^2\varphi}\right\}.$$

Par la division de $\sin\psi$ par $\cos\psi$ on obtient

$$\operatorname{tang}\psi=\frac{\lambda m\cdot\operatorname{tang}\varphi\left\{1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi''}\right\}\left\{1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi^{\text{IV}}}\right\}\ldots\left\{1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi^{(\lambda-1)}}\right\}}{\left(1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi'}\right)\left(1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi'''}\right)\ldots\left(1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi^{(\lambda-2)}}\right)}.$$

Mais cette expression de $\operatorname{tang}\psi$ peut être écrite ainsi:

$$\operatorname{tang}\psi=\frac{\lambda m\cdot\operatorname{tang}\varphi\left\{1-\frac{\operatorname{tang}^2\varphi}{\operatorname{tang}^2\varphi''}\right\}\left\{1-\frac{\operatorname{tang}^2\varphi}{\operatorname{tang}^2\varphi^{\text{IV}}}\right\}\ldots\left\{1-\frac{\operatorname{tang}^2\varphi}{\operatorname{tang}^2\varphi^{(\lambda-1)}}\right\}}{\left(1-\frac{\operatorname{tang}^2\varphi}{\operatorname{tang}^2\varphi'}\right)\left(1-\frac{\operatorname{tang}^2\varphi}{\operatorname{tang}^2\varphi'''}\right)\ldots\left(1-\frac{\operatorname{tang}^2\varphi'}{\operatorname{tang}^2\varphi^{(\lambda-2)}}\right\}},$$

en observant que l'on a

$$\frac{1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi''}}{1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi'}}=\frac{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi''}}{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi'}}=\frac{1-\frac{\operatorname{tang}^2\varphi}{\operatorname{tang}^2\varphi''}}{1-\frac{\operatorname{tang}^2\varphi}{\operatorname{tang}^2\varphi'}}.$$

Pour former l'expression de $\sqrt{(1-g^2\sin^2\psi)}$, il faut observer que l'équation $(\mu.)$ par le changement simultané de x, y en $\frac{1}{gx}$, $\frac{1}{cy}$, donne

$$\frac{gx-1}{gx}=\frac{\left(\frac{cy\pm 1}{cy}\right)\frac{(cy\sin\varphi'-1)^2(cy\sin\varphi'''+1)^2\ldots\ldots(cy\sin\varphi^{(\lambda-2)}\mp 1)^2}{c^2y^2\sin^2\varphi'\cdot c^2y^2\sin^2\varphi'''\;\ldots\ldots\;c^2y^2\sin^2\varphi^{(\lambda-2)}}}{\frac{\sin^2\varphi''}{y^2}\left(\frac{y^2}{\sin^2\varphi''}-1\right)\cdot\frac{\sin^2\varphi^{\text{IV}}}{y^2}\left(\frac{y^2}{\sin^2\varphi^{\text{IV}}}-1\right)\ldots\ldots\frac{\sin^2\varphi^{(\lambda-1)}}{y^2}\left(\frac{y^2}{\sin^2\varphi^{(\lambda-1)}}-1\right)}.$$

Mais nous avons

$$\frac{gx-1}{gx}=-\frac{(1-gx)V}{g\lambda m\cdot yU};$$

et les deux équations $(y.)$ donnent

$$g\lambda m=c^{\lambda}[\sin\varphi'\cdot\sin\varphi''\ldots\ldots\sin\varphi^{(\lambda-2)}\cdot\sin\varphi^{(\lambda-1)}]^2:$$

donc l'équation précédente est équivalente à celle-ci;

$$(\mu'''.)\quad (1-gx)V=(1\pm cy)(1-cy\sin\varphi')^2(1+cy\sin\varphi''')^2\ldots\ldots(1\mp cy\sin\varphi^{(\lambda-2)})^2,$$

en se rappelant qu'on doit prendre le signe supérieur ou inferieur dans le facteur $(1\pm cy)$, suivant que λ est de la forme $4i-1$ ou $4i+1$.

L'équation $(\mu.)$ donnera de la même manière

$$(\mu^{\text{IV}})\quad (1+gx)V=(1\mp cy)(1+cy\sin\varphi')^2(1-cy\sin\varphi''')^2\ldots\ldots(1\pm cy\sin\varphi^{(\lambda-2)})^2.$$

En fesant le produit de ces deux dernières équations, et extrayant ensuite la racine carrée, on en tirera

$$\sqrt{(1-g^2\sin^2\psi)}$$
$$=\frac{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}\{1-c^2\sin^2\varphi'\cdot\sin^2\varphi\}\{1-c^2\sin^2\varphi'''\sin^2\varphi\}\ldots\ldots\{1-c^2\sin^2\varphi^{(\lambda-2)}\sin^2\varphi\}}{(1-c^2\sin^2\varphi''\cdot\sin^2\varphi)(1-c^2\sin^2\varphi^{\text{IV}}\cdot\sin^2\varphi)\ldots\ldots(1-c^2\sin^2\varphi^{(\lambda-1)}\cdot\sin^2\varphi)},$$

$$(\mu^{\text{V}}.)\qquad V^2\sqrt{(1-g^2x^2)}$$
$$=\sqrt{(1-c^2y^2)}(1-c^2\sin^2\varphi'\cdot y^2)(1-c^2\sin^2\varphi'''\cdot y^2)\ldots\ldots(1-c^2\sin^2\varphi^{(\lambda-2)}\cdot y^2);$$

d'où l'on tirera la valeur de $\sqrt{(1-g^2\sin^2\psi)}$.

En multipliant les équations $(\mu''.)$ et $(\mu^{\text{V}}.)$, on obtient

$$(\mu^{\text{VI}}.)\qquad V^2\sqrt{[(1-x^2)(1-g^2x^2)]}$$
$$=\sqrt{[(1-y^2)(1-c^2y^2)]}+\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\varphi'}\right)\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\varphi'''}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\varphi^{(\lambda-2)}}\right)$$
$$\times(1-c^2\sin^2\varphi'\cdot y^2)(1-c^2\sin^2\varphi'''\cdot y^2)\ldots\ldots(1-c^2\sin^2\varphi^{(\lambda-2)}\cdot y^2).$$

Parvenu à ce point, il est facile de faire disparaître toutes les objections, et de démontrer rigoureusement que l'équation $x=\lambda m\cdot y\cdot\frac{U}{V}$ est effectivement une intégrale particulière de l'équation

$$(j'''.)\quad \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-g^2x^2)]}}=\frac{\lambda m\cdot dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c^2y^2)]}}.$$

En effet, cette expression de x en y donne

$$V^2\frac{dx}{dy}=V\frac{d\cdot(\lambda myU)}{dy}-\lambda myU\frac{dV}{dy},$$

et d'après les équations (μ, μ', μ''', μ^{V}), on a

$$V-\lambda m y U=(1\pm y)F^2(y);\qquad V+\lambda m y U=(1\pm y)F^2(-x);$$
$$V-g\cdot\lambda m y U=(1\pm c y)\Pi^2(y);\qquad V+g\cdot\lambda m y U=(1\mp c y)\Pi^2(-x);$$

en posant pour plus de simplicité

$$F(y)=\left(1-\frac{y}{\sin\varphi'}\right)\left(1+\frac{y}{\sin\varphi'''}\right)\left(1-\frac{y}{\sin\varphi^{\text{V}}}\right)\ldots\left(1\mp\frac{y}{\sin\varphi^{(\lambda-2)}}\right);$$
$$\Pi(y)=(1-cy\sin\varphi')(1+cy\sin\varphi''')(1-cy\sin\varphi^{\text{V}})\ldots(1\mp cy\sin\varphi^{(\lambda-2)}).$$

Mais d'un autre côté on peut écrire l'expression précédente de $V^2\frac{dx}{dy}$ sous ces quatre formes, savoir:

$$\begin{aligned}V^2\frac{dx}{dy}&=(V-\lambda m y U)\frac{d(\lambda m y U)}{dy}-\lambda m y U\frac{d(V-\lambda m y U)}{dy}\\&=(V+\lambda m y U)\frac{d(\lambda m y U)}{dy}-\lambda m y U\frac{d(V+\lambda m y U)}{dy}\\&=(V-g\cdot\lambda m y U)\frac{d(\lambda m y U)}{dy}-\lambda m y U\frac{d(V-g\cdot\lambda m y U)}{dy}\\&=(V+g\cdot\lambda m y U)\frac{d(\lambda m y U)}{dy}-\lambda m y U\frac{d(V+g\cdot\lambda m y U)}{dy}.\end{aligned}$$

Donc la fonction $V^2\frac{dx}{dy}$ doit être divisible par $F(x)$, $F(-x)$, $\Pi(x)$, $\Pi(-x)$ et par le produit de ces quatre polynomes entiers et rationnels dont chacun est du degré $\frac{1}{2}(\lambda-1)$. Mais le polynome $V\frac{d(\lambda m y U)}{dy}-\lambda m y U\frac{dV}{dy}$ est lui-même du degré $2\lambda-2$. Donc on doit avoir l'équation

$$V\frac{d(\lambda m y U)}{dy}-\lambda m y U\frac{dV}{dy}=f\cdot\lambda m\cdot F(x)\cdot F(-x)\cdot\Pi(x)\cdot\Pi(-x),$$

f désignant un facteur constant. Ainsi nous avons

$$\begin{aligned}V^2\frac{dx}{dy}=\lambda m\cdot f&\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\varphi'}\right)\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\varphi'''}\right)\ldots\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\varphi^{(\lambda-2)}}\right)\\&\times(1-c^2\sin^2\varphi'\cdot y^2)(1-c^2\sin^2\varphi'''\cdot y^2)\ldots(1-c^2\varphi^{(\lambda-2)}\cdot y^2).\end{aligned}$$

De là et de l'équation (μ^{VI}.) nous tirons la conséquence, que

$$\frac{dx}{\sqrt{((1-x^2)(1-g^2x^2))}}=\frac{\lambda m\cdot f\,dy}{\sqrt{((1-y^2)(1-c^2y^2))}}.$$

Or il est facile de démontrer que $f=1$. Car, le coëfficient de la plus haute puissance de y étant $[\lambda c^{\lambda-1}-(\lambda-1)c^{\lambda-1}]\lambda m$ dans le polynome $V\frac{d(\lambda m y U)}{dy}-\lambda m U\frac{dV}{dy}$, et $\lambda m f\cdot c^{\lambda-1}$ dans l'expression précédente de $V^2\frac{dx}{dy}$, on doit avoir

$$\lambda m[\lambda c^{\lambda-1} - (\lambda-1)c^{\lambda-1}] = \lambda m f \cdot c^{\lambda-1},$$

et par conséquent $f = 1$.

Maintenant, par le simple changement de $\sin\psi$ et $\sin\varphi$ en $\operatorname{tang}\psi \cdot \sqrt{-1}$ et $\operatorname{tang}\varphi \cdot \sqrt{-1}$, on aura l'équation transcendante

$$(\nu'.) \qquad F(h, \psi) = \lambda m F(b, \varphi),$$

et l'équation algébrique correspondante

$$\operatorname{tang}\psi = \lambda m \cdot \operatorname{tang}\varphi \cdot \frac{U'}{V'},$$

où l'on a

$$\frac{U'}{V'} = \left(\frac{1+\frac{\operatorname{tang}^2\varphi}{\sin^2\varphi''}}{1+c^2\sin^2\varphi''\cdot\operatorname{tang}^2\varphi}\right)\left(\frac{1+\frac{\operatorname{tang}^2\varphi}{\sin^2\varphi^{\text{IV}}}}{1+c^2\sin^2\varphi^{\text{IV}}\cdot\operatorname{tang}^2\varphi}\right)\cdots,$$

et pour la marche des amplitudes

$$\begin{array}{l} \varphi \ldots . 0, \ \tfrac{1}{2}\pi, \ \pi, \ \tfrac{3}{2}\pi, \ \text{etc.}, \\ \psi \ldots . 0, \ \tfrac{1}{2}\pi, \ \pi, \ \tfrac{3}{2}\pi, \ \text{etc.}, \end{array}$$

de sorte qu'on a $F'(h) = \lambda m F'(b)$: et comme l'intégrale précédente $F(g, \psi) = \lambda m F(c, \varphi)$ donne $F'(g) = m F'(c)$, on tire de là la conséquence, que

$$(\nu'.) \qquad \frac{F'(c)}{F'(b)} = \lambda \cdot \frac{F'(g)}{F'(h)}.$$

Ces équations répondent, dans le cas général, à celles que nous avons désigné par $(\lambda'''.)$ et $(\lambda^{\text{IV}}.)$ dans le cas particulier de $\lambda = 3$. On démontrera absolument de la même manière celles qui correspondent à $(\lambda'.)$ et $(\lambda''.)$: c'est-à-dire qu'on a:

$$(\nu'''.) \left\{\begin{array}{l} F(c, \varphi) = \frac{1}{m} \cdot F(g, \psi); \\ \sin\varphi = \frac{1}{m}\sin\psi \left\{\frac{1+\cot^2\psi^{(\lambda-1)}\cdot\sin^2\psi}{1+\cot^2\psi'\cdot\sin^2\psi}\right\}\left\{\frac{1+\cot^2\psi^{(\lambda-3)}\cdot\sin^2\psi}{1+\cot^2\psi'''\cdot\sin^2\psi}\right\}\cdots \\ \qquad\qquad \cdots\left\{\frac{1+\cot^2\psi''\cdot\sin^2\psi}{1+\cot^2\psi^{(\lambda-2)}\cdot\sin^2\psi}\right\}; \end{array}\right.$$

$$(\nu^{\text{IV}}.) \left\{\begin{array}{l} F(b, \varphi) = \frac{1}{m} \cdot F(h, \psi), \\ \operatorname{tang}\varphi = \frac{1}{m}\operatorname{tang}\psi \left\{\frac{1-\cot^2\psi^{(\lambda-1)}\cdot\operatorname{tang}^2\psi}{1-\cot^2\psi'\cdot\operatorname{tang}^2\psi}\right\}\left\{\frac{1-\cot^2\psi^{(\lambda-3)}\cdot\operatorname{tang}^2\psi}{1-\cot^2\psi''\cdot\operatorname{tang}^2\psi}\right\}\cdots \\ \qquad\qquad \cdots\left\{\frac{1-\cot^2\psi''\cdot\operatorname{tang}^2\psi}{1-\cot^2\psi^{(\lambda-2)}\cdot\operatorname{tang}^2\psi}\right\}. \end{array}\right.$$

Les valeurs de g et m doivent être déterminées par les équations $(\gamma.)$ ou par les équations

$$(\gamma'.)\quad \begin{cases} m = \dfrac{\sin^2\psi'}{\sin^2\psi''}\cdot\dfrac{\sin^2\psi'''}{\sin^2\psi^{\mathrm{IV}}}\cdots\dfrac{\sin^2\psi^{(\lambda-2)}}{\sin^2\psi^{(\lambda-1)}},\\[2ex] g = \dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{\cos^4\psi'}{\sin^4\psi''}\cdot\dfrac{\cos^4\psi'''}{\sin^4\psi^{\mathrm{IV}}}\cdots\dfrac{\cos^4\psi^{(\lambda-2)}}{\sin^4\psi^{(\lambda-1)}}, \end{cases}$$

et les amplitudes $\psi', \psi'', \psi''', \ldots\ \psi^{(\lambda-1)}$ doivent être déterminées par les équations

$$F(h,\psi') = \frac{1}{\lambda}F'(h);\quad F(h,\psi'') = \frac{2}{\lambda}F'(h),\quad F(h,\psi''') = \frac{3}{\lambda}F'(h);\ \ldots$$
$$\ldots\ F(h,\psi^{(\lambda-1)}) = \frac{\lambda-1}{\lambda}F'(h).$$

Rien ne limite la grandeur du nombre impair λ dans ces formules: donc en supposant $\lambda = \infty$, la valeur du module g sera infiniment petite, comme on le voit par la première des deux équations $(\gamma.)$, et la valeur de $h = \sqrt{(1-g^2)}$ sera infiniment proche de l'unité. Il suit de là que dans le cas de $\lambda = \infty$, on peut faire $F'(g) = \frac{1}{2}\pi$, et

$$F(h,\psi') = \frac{1}{\lambda}F'(h) = \int_0^{\psi'}\frac{d\psi}{\sqrt{(1-\sin^2\psi)}} = \tfrac{1}{2}\log\Big(\frac{1+\sin\psi'}{1-\sin\psi'}\Big);$$
$$F(h,\psi'') = \frac{2}{\lambda}F'(h) = \int_0^{\psi''}\frac{d\psi}{\sqrt{(1-\sin^2\psi)}} = \tfrac{1}{2}\log\Big(\frac{1+\sin\psi''}{1-\sin\psi''}\Big);$$

etc.

Mais l'équation $(\nu''.)$ se réduit ici à

$$\frac{F'(c)}{F'(b)} = \frac{\lambda\cdot\frac{1}{2}\pi}{F'(h)};$$

partant l'on a

$$\frac{1}{\lambda}F'(h) = \tfrac{1}{2}\pi\cdot\frac{F'(b)}{F'(c)}\ {*}),$$
$$\log\Big\{\frac{1+\sin\psi^{(i)}}{1-\sin\psi^{(i)}}\Big\} = \frac{i\pi F'(b)}{F'(c)} = \log e^{\frac{i\pi F'(b)}{F'(c)}},$$

pour toutes les valeurs de i, depuis $i = 1$ jusqu'à $i = \infty$. Donc en fesant

$$q = e^{-\frac{\pi F'(b)}{F'(c)}},$$

on aura l'équation

$$\frac{1+\sin\psi^{(i)}}{1-\sin\psi^{(i)}} = q^{-i},$$

de laquelle on tire

$$\frac{1+\cot^2\psi^{(i)}\cdot\sin^2\psi}{1+\cot^2\psi^{(i-1)}\cdot\sin^2\psi} = \Big(\frac{1-q^{i-1}}{1-q^i}\Big)\Big(\frac{1-2q^i\cos2\psi+q^{2i}}{1-2q^{i-1}\cos2\psi+q^{2i-2}}\Big)$$

*) Lisez la Note placée à la fin de ce Mémoire.

pour l'expression générale des facteurs qui doivent composer l'expression de $\sin\varphi$ relatifs aux équations (ν'''.).

Telle est l'origine de la transcendante $\frac{1}{q}$ dont je donne, à la fin de ce Mémoire, le logarithme *tabulaire* pour tous les angles du module $c=\sin\theta$; depuis $\theta=0^0$ jusqu'à $\theta=45^0$, de dixième en dixième de dégré; et de dégré en dégré, depuis $\theta=45^0$ jusqu'à $\theta=90^0$.

Je renvoie au troisième Volume du Traité de *Legendre* (page 94 et suivantes), et à l'ouvrage de Mr. *Jacobi* pour tout ce qui tient aux formules de ce genre. J'ai voulu seulement faire voir de quelle manière on pourrait établir les formules fondamentales par une succession naturelle d'idées, et faciliter par là la démonstration des formules que je vais exposer dans le paragraphe suivant.

§. XIV.

Pour évaluer les transcendantes elliptiques de troisième espèce, non complètes, on peut employer avec avantage les Tables de *Legendre* et les formules suivantes dues à Mr. *Jacobi*.

Considérons d'abord celles qui sont à paramètre logarithmique. Soit

$$\varphi' = \tfrac{1}{2}\pi\frac{F(c,\varphi)}{F'(c)},\qquad \theta' = \tfrac{1}{2}\pi\frac{F(c,\theta)}{F'(c)},$$

$$\varDelta(c,\theta)=\sqrt{(1-c^2\sin^2\theta)},\quad \varDelta(\varphi)=\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)};\qquad q=e^{-\frac{\pi F'(b)}{F'(c)}},$$

où l'on a

$$F(c,\varphi)=\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\varDelta(\varphi)},\qquad F(c,\theta)=\int_0^\theta\frac{d\varphi}{\varDelta(\varphi)},$$

$$F'(c)=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}};\quad F'(b)=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-b^2\sin^2\varphi)}}.$$

Désignons par $\Theta(u)$ une fonction de u, telle que, étant dévoloppée en série, on ait

$$\Theta(u) = 1+2\sum_1^\infty(-1)^n q^{nn}\cos 2nu = \Theta(-u).$$

En remplaçant u, successivement, par $\varphi'-\theta'$, $\varphi'+\theta'$, et prenant le logarithme hyperbolique des deux fonctions $\Theta(\varphi'-\theta')$, $\Theta(\varphi'+\theta')$, on a l'équation

$$(84.)\quad \int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\{1-c^2\sin^2\theta\cdot\sin^2\varphi\}\varDelta(\varphi)}$$

$$=F(c,\varphi)+\frac{\tang\theta}{2\varDelta(c,\theta)}\log\left\{\frac{\Theta(\varphi'-\theta')}{\Theta(\varphi'+\theta')}\right\}-\frac{\tang\theta\cdot F(c,\varphi)}{\varDelta(c,\theta)}\left\{\frac{E'(c)}{F'(c)}F(c,\theta)-E(c,\theta)\right\},$$

où

$$E(c,\theta)=\int_0^\theta d\varphi\,\varDelta(\varphi);\qquad E'(c)=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}d\varphi\,\varDelta(\varphi).$$

Le terme logarithmique devient nul, lorsque $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, parceque alors, $\varphi'=\frac{1}{2}\pi$, et que, par la nature de la fonction Θ, on a $\Theta(\frac{1}{2}\pi-\theta')=\Theta(\frac{1}{2}\pi+\theta')$. Ce terme peut être présenté sous une autre forme. En effet, en posant

$$C = q^{-\frac{1}{12}}\sqrt[6]{(2cb)}\cdot\sqrt{\frac{F'(c)}{\pi}},$$

on a

$$\Theta(u) = C(1-2q\cos 2u+q^2)(1-2q^3\cos 2u+q^6)(1-2q^6\cos 2u+q^{10}) \text{ etc.}$$

(Voyez p. 103 et 131 du Tome 3ième de *Legendre*.) En prenant le logarithme des deux membres, et différentiant ensuite, on aura

$$\begin{aligned}\log\Theta(u) &= \log C + 4\int(q\sin 2u+q^2\sin 4u+q^3\sin 6u+\text{etc.})\,du\\ &\quad +4\int(q^3\sin 2u+q^6\sin 4u+q^9\sin 6u+\text{etc.})\,du\\ &\quad +\text{etc.};\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}\log\Theta(u) &= \log C - 2(q\cos 2u+\tfrac{1}{2}q^2\cos 4u+\tfrac{1}{3}q^3\cos 6u+\text{etc.})\\ &\quad -2(q^3\cos 2u+\tfrac{1}{2}q^6\cos 4u+\tfrac{1}{3}q^9\cos 6u+\text{etc.})\\ &\quad -\text{etc.},\end{aligned}$$

ou bien,

$$\log\Theta(u) = \log C - 2\sum_1^\infty \frac{q^n}{n(1-q^{2n})}\cos 2nu.$$

Il suit de là que

$$(85.)\quad \log\left\{\frac{\Theta(\varphi'-\theta')}{\Theta(\varphi'+\theta')}\right\} = -4\sum_1^\infty\frac{q^n}{n(1-q^{2n})}\sin 2n\varphi'\cdot\sin 2n\theta'.$$

La formule (84.) démontre que toute transcendante elliptique à paramètre logarithmique, peut être exprimée par deux parties de la forme

$$MF(c,\varphi)+F(\varphi),$$

où M désigne un coefficient constant. La seconde partie ne peut pas être exprimée, en général, sous forme finie, par les transcendantes inférieures. Cependant, par la considération de la transcendante supérieure représentée par la double intégrale

$$\Upsilon(\psi) = \int_0^\psi\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}\int_0^\varphi d\varphi\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)} = \int_0^\psi\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}\int_0^\varphi d\varphi\,\Delta(\varphi),$$

Mr. *Jacobi* a trouvé qu'en déterminant les deux amplitudes ψ' et ψ'' par les équations

$$\sin\psi' = \frac{\sin\varphi\cos\theta\,\Delta(\theta)-\sin\theta\cos\varphi\,\Delta(\varphi)}{1-c^2\sin^2\theta\sin^2\varphi},\quad \sin\psi'' = \frac{\sin\varphi\cos\theta\,\Delta(\theta)+\sin\theta\cos\varphi\,\Delta(\varphi)}{1-c^2\sin^2\theta\sin^2\varphi},$$

on a

$$(86.)\quad \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1-c^2\sin^2\theta\sin^2\varphi)\Delta(\varphi)}$$
$$= F(c,\varphi)+\frac{\tang\theta}{\Delta(\theta)}F(c,\varphi)E(c,\theta)+\frac{\tang\theta}{2\Delta(\theta)}\left\{Y(\psi')-Y(\psi'')\right\}.$$

La liaison intime qui existe entre les deux fonctions $\Theta(\varphi')$ et $Y(\varphi)$ est mise en évidence par cette équation:

$$(87.)\quad \log\{\Theta(\varphi')\} = Y(\varphi)-\frac{E'(c)}{2F'(c)}\{F(c,\varphi)\}^2+\tfrac{1}{2}\log\left\{\frac{2bF'(c)}{\pi}\right\}.$$

Effectivement, d'après cette formule, en observant que l'on a

$$\varphi'-\theta' = \tfrac{1}{2}\pi\cdot\frac{1}{F'(c)}\{F(c,\varphi)-F(c,\theta)\} = \tfrac{1}{2}\pi\cdot\frac{F'(c,\psi')}{F'(c)},$$
$$\varphi'+\theta' = \tfrac{1}{2}\pi\cdot\frac{1}{F'(c)}\{F(c,\varphi)+F(c,\theta)\} = \tfrac{1}{2}\pi\cdot\frac{F(c,\psi'')}{F'(c)},$$

on obtient

$$\log\{\Theta(\varphi'-\theta')\} = Y(\psi')-\frac{E'(c)}{2F'(c)}\{F(c,\psi')\}^2+\tfrac{1}{2}\log\left\{\frac{2bF'(c)}{\pi}\right\},$$
$$\log\{\Theta(\varphi'+\theta')\} = Y(\psi'')-\frac{E'(c)}{2F'(c)}\{F(c,\psi'')\}^2+\tfrac{1}{2}\log\left\{\frac{2bF'(c)}{\pi}\right\},$$

et par conséquent

$$\tfrac{1}{2}\log\left\{\frac{\Theta(\varphi'-\theta')}{\Theta(\varphi'+\theta')}\right\} = \tfrac{1}{2}Y(\psi')-\tfrac{1}{2}Y(\psi'')-\frac{E'(c)}{4F'(c)}\{[F(c,\psi')]^2-[F(c,\psi'')]^2\}$$
$$= \tfrac{1}{2}Y(\psi')-\tfrac{1}{2}Y(\psi'')-\frac{E'(c)}{F'(c)}F(c,\varphi)\cdot F(c,\theta);$$

de sorte qu'on retrouve l'équation (86.) par la combinaison des deux équations (86. et 87.). On peut lire la démonstration de ces formules dans le 3me Volume du Traité de *Legendre* (Voyez p. 139 et 154).

Pour évaluer les transcendantes elliptiques de troisième espèce dont le paramètre sera *circulaire*, c'est-à-dire de la forme $1-b^2\sin^2\theta = \Delta^2(b,\theta)$, on fera

$$\omega' = \tfrac{1}{2}\pi\cdot\frac{F(b,\theta)}{F'(b)},\qquad \tang\Omega' = \frac{T}{U},\qquad r = e^{-\frac{\pi F'(c)}{F(b)}};$$
$$T = \overset{\infty}{\underset{1}{\Sigma}}(-1)^n r^{nn}\left(r^{-\frac{2n\varphi'}{\pi}}-r^{\frac{2n\varphi'}{\pi}}\right)\sin 2n\omega';$$
$$U = 1+\overset{\infty}{\underset{1}{\Sigma}}(-1)^n r^{nn}\left(r^{-\frac{2n\varphi'}{\pi}}+r^{\frac{2n\varphi'}{\pi}}\right)\cos 2n\omega';$$

et l'on aura

$$(88.)\quad \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1-\Delta^2(b,\theta)\sin^2\varphi)\Delta(\varphi)}$$
$$=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}+\frac{\Omega'\cdot\Delta(b,\theta)}{b^2\sin\theta\cdot\cos\theta}+\frac{\Delta(b,\theta)}{b^2\sin\theta\cdot\cos\theta}F(c,\varphi)\left\{\frac{E'(b)F(b,\theta)}{F'(b)}-E(b,\theta)\right\};$$

où

$$F(b,\theta)=\int_0^{\theta}\frac{d\varphi}{\Delta(b,\varphi)};\qquad E(b,\theta)=\int_0^{\theta}d\varphi\,\Delta(b,\varphi);$$
$$F'(b)=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\Delta(b,\varphi)};\qquad E'(b)=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}d\varphi\,\Delta(b,\varphi);$$
$$\Delta(b,\varphi)=\sqrt{(1-b^2\sin^2\varphi)}.$$

Cette formule, lorsque $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, donne le résultat connu depuis longtems. Car, alors on a $\varphi'=\frac{1}{2}\pi$, et par conséquent

$$T=\sum_1^{\infty}(-1)^{n-1}r^{n(n-1)}\{\sin(2n-2)\omega'+\sin 2n\omega'\},$$
$$U=\sum_1^{\infty}(-1)^{n-1}r^{n(n-1)}\{\cos(2n-2)\omega'-\cos 2n\omega'\},$$

ou bien

$$T=2\sum_1^{\infty}(-1)^{n-1}r^{n(n-1)}\cos\theta'\cdot\sin(2n-1)\theta',$$
$$U=2\sum_1^{\infty}(-1)^{n-1}r^{n(n-1)}\sin\theta'\cdot\sin(2n-1)\theta';$$

partant $\frac{T}{U}=\frac{\cos\theta'}{\sin\theta'}=\operatorname{tang}(\frac{1}{2}\pi-\theta')$, d'où l'on tire

$$\Omega'=\tfrac{1}{2}\pi-\theta'=\tfrac{1}{2}\pi-\tfrac{1}{2}\pi\cdot\frac{F(b,\theta)}{F'(b)}.$$

D'après le théorème des fonctions complémentaires (Voyez p. 61 du Traité des fonctions elliptiques), on peut écrire

$$\Omega'=\tfrac{1}{2}\pi-\frac{F(b,\theta)}{F'(b)}\{F'(c)E'(b)+E'(c)F'(b)-F'(c)F'(b)\},$$

et alors l'équation (88.) coïncide avec la formule (m'.) que l'on voit à la page 138 du premier volume que je viens de citer.

Pour faciliter le calcul numérique des formules (84. et 88.), on a ici la Table qui donne le

$$\log.\text{tab.}\left(\frac{1}{q}\right)=\frac{\pi F'(b)}{F'(c)}\log.\text{tab.}(e),$$

où l'argument θ est tel que l'on a $c=\sin\theta$, $b=\cos\theta$. Et comme nous avons

$$\log.\text{tab.}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\pi F'(c)}{F'(b)}\log.\text{tab.}(e),$$

il est clair qu'il suffit de prendre $90^0-\theta$ pour argument, pour avoir, par la

même table, la valeur du logarithme tabulaire de $\frac{1}{r}$. L'arc Ω', et le second membre de l'équation (85.), peuvent donc être facilement calculés à l'aide de la table placée au fond de ce Mémoire.

§. XV.

Je dois faire observer que la première transformation exposée au §. IV peut être appliquée à l'intégrale

$$V' = \int \frac{dy}{(1-fy^2)\sqrt{[(M+y^2)(P+y^2)]}};$$

même dans le cas où les coefficiens M et P seraient imaginaires, et de la forme

$$M = h(\cos\theta + \sin\theta\cdot\sqrt{-1}), \qquad P = h(\cos\theta - \sin\theta\cdot\sqrt{-1}).$$

En effet, en fesant $y = \sqrt[4]{(PM)}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\psi = \sqrt{h}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\psi$, on obtient d'abord

$$V' = \frac{1}{2\sqrt{h}}\int\frac{d\psi}{(1-fy^2)\sqrt{(1-\sin^2\frac{1}{2}\theta\cdot\sin^2\psi)}}.$$

Mais en posant pour plus de simplicité

$$\frac{1+fh}{1-fh} = g, \qquad \frac{(1+fh)^2}{4fh} = g',$$

nous avons

$$\frac{1}{1-fh\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\psi} = \frac{1}{1+fh} - \frac{1}{2g}\left(\frac{1-g\cos\psi}{1-g'\sin^2\psi}\right);$$

partant il viendra

$$V' = \frac{1}{2(1+fh)\sqrt{h}}\int\frac{d\psi}{\sqrt{(1-\sin^2\frac{1}{2}\theta\cdot\sin^2\psi)}}$$
$$-\frac{1}{4g\sqrt{h}}\int\frac{d\psi}{(1-g'\sin^2\psi)\sqrt{(1-\sin^2\frac{1}{2}\theta\cdot\sin^2\psi)}}$$
$$+\frac{1}{4\sqrt{h}}\int\frac{d\psi\cos\psi}{(1-g'\sin^2\psi)\sqrt{(1-\sin^2\frac{1}{2}\theta\cdot\sin^2\psi)}}.$$

Par la formule (50.) on pourra faire dépendre la transcendante elliptique de troisième espèce dont le paramètre est g', d'une autre de même espèce dont le paramètre sera

$$\frac{\sin^2\frac{1}{2}\theta}{g'} = \sin^2\frac{1}{2}\theta\left\{1-\left(\frac{1-fh}{1+fh}\right)^2\right\}.$$

Donc en supposant *f positif*, ce paramètre sera de la forme $\sin^2\frac{1}{2}\theta\cdot\sin^2\lambda$, puisque rien n'empêche de supposer h positif. Ainsi V' dépendra alors d'une transcendante elliptique de troisième espèce à *paramètre logarithmique*.

Mais si le coefficient f est *négatif*, il faudra employer la formule (79.), et l'on aura dans l'expression de V^1 une transcendante elliptique de troisième espèce à paramètre *circulaire*, puisque ce paramètre sera égal à

$$\frac{e^2-g'}{1-g'} = 1-\frac{b^2}{1-\frac{(1+fh)^2}{4fh}} = 1-b^2\sin^2\omega,$$

après avoir fait $\tan^2\omega = -\frac{4fh}{(1+fh)^2}$. On voit par là que le caractère distinctif entre les deux intégrales

$$\int\frac{dy}{(1-k^2y^2)\sqrt{(y^4+2h\cos\theta\cdot y^2+h^2)}} \quad \text{et} \quad \int\frac{dy}{(1+k^2y^2)\sqrt{(y^4+2h\cos\theta\cdot y^2+h^2)}}$$

est d'être: la première toujours dépendante d'une transcendante elliptique de troisième espèce à paramètre *logarithmique;* et la seconde d'être toujours dépendante d'une transcendante elliptique de troisième espèce à paramètre *circulaire*.

Si, après avoir fait $y=\sqrt{h}\tan\frac{1}{2}\psi$, on voulait réduire à moitié l'amplitude extrême de la variable ψ, il faudrait introduire une nouvelle variable φ, liée avec la première par l'équation

$$\tan\tfrac{1}{2}\psi = \tan\varphi\cdot\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}:$$

car on sait que cette équation donne

$$\frac{d\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}} = \frac{2\,d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}.$$

Tel est le motif pour lequel *Legendre* a employé cette transformation à la page 56 du Tome 1er de son Traité des fonctions elliptiques, où il s'agissait seulement de transformer l'intégrale beaucoup plus simple

$$\int\frac{(G+G'y^2)\,dy}{\sqrt{(y^4+2h\cos\theta\cdot y^2+h^2)}}.$$

Mais dans le cas de l'intégrale précédente, j'ai évité exprès une telle manière de changer la variable, parceque cela complique la transformation de l'intégrale

$$\int\frac{d\psi}{(1-n\sin^2\psi)\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}.$$

Cependant il était nécessaire d'expliquer à quoi tient la raison de cette préférence, afin de faire voir que ces artifices d'analyse ont une philosophie *sui generis*, quoiqu'elle soit rarement déclarée par les auteurs. Il est vrai que, parfois, un instinct supérieur à tout raisonnement fait trouver spontanément des vérités qui peuvent paraître le résultat des plus profondes combinaisons.

Je ne puis m'empêcher de faire cette réflexion, en observant que, vers l'année 1760 *Euler* opérait la transformation de l'intégrale

$$\int \frac{(G + G' y^2) dy}{\sqrt{(y^4 + 2h\cos\theta \cdot y^2 + h^2)}}$$

par une substitution, qui après un léger changement coïncide avec celle de *Legendre* dont je viens de parler. En effet *Euler* dit, à la page 146 du Tome VIII. des *Novi Commentarii* de l'Académie de St. Petersbourg que, pour transformer cette intégrale dans une autre, où le trinome, sous le radical, soit le produit de deux facteurs binomes réels, il faut établir entre les deux variables y et z l'équation

$$4h^2 y^2 z^4 - 4y^2 z^2 \cdot h - 4h^2 z^2 + 2h - 2h\cos\theta = 0.$$

Or cette équation donne

$$y^2 = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{\left(1 - \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\theta}{hz^2}\right)}{\left(1 - \frac{1}{hz^2}\right)},$$

d'où l'on tire, en fesant $\sin\varphi = \frac{1}{2\sqrt{h}}$;

$$y = \sqrt{h} \cdot \operatorname{tang}\varphi \cdot \sqrt{(1 - \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta \cdot \sin^2\varphi)};$$

c'est-à-dire l'équation employée par *Legendre*.

§. XVI.

Sur la surface du cône oblique à base elliptique.

Soient f, g, h les coordonnées du sommet du cône, et

$$x' = a\sin\Theta, \quad y' = b\cos\Theta$$

celles d'un point quelconque de la périphérie de l'ellipse. En nommant Z la surface d'un secteur quelconque du cône, compté depuis le petit axe de l'ellipse, on a

$$(89.) \quad Z = \tfrac{1}{2}\int d\Theta \sqrt{[k^2(a^2 - k^2\sin^2\Theta) + (ag\cos\Theta + bf\cdot\sin\Theta - ab)^2]},$$

où $k^2 = a^2 - b^2$. Maintenant, si l'on fait $x = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\Theta$, on aura

$$(90.) \quad Z = \int \frac{dx\sqrt{X}}{(1 + x^2)^2},$$

où

$$(91.) \quad X = A'x^4 + B'x^3 + D'x^2 + E'x + A'';$$

$$
(92.) \begin{cases}
A' = a^2\{h^2+(g+b)^2\}, \\
A'' = a^2\{h^2+(g-b)^2\}, \\
A''' = a^2g^2-b^2f^2+h^2k^2, \\
B' = -4abf(g+b), \\
D' = 4b^2f^2-4k^2h^2+2a^2(h^2-g^2+b^2) = 2a^2(g^2+h^2+b^2)-4A''', \\
E' = 4abf(g-b).
\end{cases}
$$

En fesant passer le radical $\sqrt{X}$ au dénominateur, on aura

$$
(93.)\quad Z = A'\int\frac{dx}{\sqrt{X}} - (a^2bg+A''')\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{X}} + 4A'''\int\frac{dx}{(1-x^2)^2\sqrt{X}}
$$
$$
-4abf(g+b)\int\frac{x\,dx}{(1+x^2)\sqrt{X}} + 8abfg\int\frac{x\,dx}{(1-x^2)^2\sqrt{X}}.
$$

Maintenant, pour simplifier cette expression, on y fera

$$
\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2\sqrt{-1}(x-\sqrt{-1})} - \frac{1}{2\sqrt{-1}(x+\sqrt{-1})};
$$
$$
\frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2(x-\sqrt{-1})} + \frac{1}{2(x+\sqrt{-1})};
$$
$$
\frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{4\sqrt{-1}(x-\sqrt{-1})} - \frac{1}{4\sqrt{-1}(x+\sqrt{-1})} - \frac{1}{4(x+\sqrt{-1})^2} - \frac{1}{4(x-\sqrt{-1})^2},
$$
$$
\frac{x}{(1+x^2)^2} = \frac{\sqrt{-1}}{4(x+\sqrt{-1})^2} - \frac{\sqrt{-1}}{4(x-\sqrt{-1})^2};
$$

ce qui donnera, après avoir exécuté les réductions connues,

$$
(94.)\quad Z = -\frac{x\sqrt{X}}{2(1+x^2)} + \int\frac{dx}{\sqrt{X}}(\tfrac{1}{2}A' - \tfrac{1}{4}B'x - \tfrac{1}{2}A'x^2)
$$
$$
-\sqrt{-1}\cdot fab^2\left\{\int\frac{dx}{(1+x\sqrt{-1})\sqrt{X}} - \int\frac{dx}{(1-x\sqrt{-1})\sqrt{X}}\right\}
$$
$$
-gba^2\left\{\int\frac{dx}{(1+x\sqrt{-1})\sqrt{X}} + \int\frac{dx}{(1-x\sqrt{-1})\sqrt{X}}\right\}.
$$

Ce résultat offre une circonstance favorable, savoir, de rendre identique l'équation $G' - \frac{1}{2}\lambda G'' = 0$ dont on a parlé au §. VII. Car ici, nous avons

$$
\lambda = \frac{B'}{A'};\quad G' = \frac{-B'}{4\sqrt{A'}},\quad G'' = -\tfrac{1}{2}\sqrt{A'}.
$$

Donc en appliquant ici la formule (*B*.), posée dans le §. V, on verra que le résultat de la transformation inhérente à l'équation

$$
x = \frac{\alpha+\beta y}{1+y}
$$

est celui-ci. Soit

$$\mu=\left(\frac{1+\beta\sqrt{-1}}{1+\alpha\sqrt{-1}}\right)^2; \qquad \mu'=\left(\frac{1-\beta\sqrt{-1}}{1-\alpha\sqrt{-1}}\right)^2;$$

$$\delta=\sqrt{-1}(1-\alpha\sqrt{-1})^2; \qquad \delta'=-\sqrt{-1}(1+\alpha\sqrt{-1})^2;$$

$$K=\sqrt{-1}(1-\alpha\sqrt{-1})(1-\beta\sqrt{-1}); \quad K'=-\sqrt{-1}(1+\alpha\sqrt{-1})(1+\beta\sqrt{-1});$$

$$H=\tfrac{1}{2}(1+\gamma\gamma')\sqrt{A'}-\frac{2ab(ag+bf)}{(1+\beta^2)\sqrt{A'}};$$

$$L=\frac{(\alpha-\beta)ab(ag+bf\sqrt{-1})}{2(1+\alpha^2)^2\sqrt{A'}}; \qquad L'=\frac{(\alpha-\beta)ab(ag-bf\sqrt{-1})}{2(1+\alpha^2)^2\sqrt{A'}};$$

$$G=\frac{(\alpha-\beta)ab(ag+bf\sqrt{-1})}{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)\sqrt{A'}}, \qquad G'=\frac{(\alpha-\beta)ab(ag-bf\sqrt{-1})}{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)\sqrt{A'}};$$

on aura

$$(95.)\quad Z=-\frac{x\sqrt{X}}{2(1+x^2)}+\tfrac{1}{2}\sqrt{A'}\cdot\frac{\sqrt{Y}}{1+y}+H\int\frac{dy}{\sqrt{Y}}-\tfrac{1}{2}\sqrt{A'}\cdot NQ\int\frac{y^2dy}{\sqrt{Y}}$$
$$-\left\{L\delta\int\frac{d\cdot y^2}{(1-\mu y^2)\sqrt{Y}}+L'\delta'\int\frac{d\cdot y^2}{(1-\mu' y^2)\sqrt{Y}}\right\}$$
$$+\left\{KG\int\frac{dy}{(1-\mu y^2)\sqrt{Y}}+K'G'\int\frac{dy}{(1-\mu' y^2)\sqrt{Y}}\right\},$$

où $Y=(M+Ny^2)(P+Qy^2)$. On déterminera ces coefficiens par les formules (14. et 26.), à l'aide des trois racines *réelles* de la réduite de l'équation $X=0$; c'est-à-dire

$$(96.)\quad u^3-\frac{D'}{A'}u^2+\left(\frac{B'E'}{A'^2}-\frac{4A''}{A'}\right)u+\frac{A''}{A'}\left(\frac{4D'}{A'}-\frac{B'^2}{A'^2}\right)-\frac{E'^2}{A'^2}=0.$$

Pour démontrer que les trois racines de cette équation doivent être réelles, il suffit d'observer que, d'après l'expression primitive de Z il n'y a aucune valeur réelle de x qui puisse donner $X=0$; et que par conséquent c'est ici un cas où les quatre racines de cette équation sont imaginaires; ce qui rend nécessairement réelles celles de la réduite.

Comme les paramètres μ et μ' sont imaginaires, il faudra appliquer à cette question les formules du §. IX, pour avoir une expression de Z, où le signe de l'imaginaire ne soit plus enveloppé sous le signe intégral.

Cette analyse démontre que la réduction de l'intégrale (89.) aux transcendantes elliptiques a lieu en établissant l'équation

$$(97.)\quad \tang\tfrac{1}{2}\theta=\frac{\alpha+\beta\sqrt[4]{\left(\frac{PM}{QN}\right)}\tang\tfrac{1}{2}\psi}{1+\sqrt[4]{\left(\frac{PM}{QN}\right)}\tang\tfrac{1}{2}\psi},$$

et en fesant ensuite $\psi=\frac{1}{2}\pi-\varphi$.

S'il n'était question que d'avoir le résultat de cette substitution, et non une réduction effective aux transcendantes elliptiques, on pourrait y parvenir facilement par la formule (90.). En effet, cette formule peut-être écrite ainsi:

$$(98.)\quad Z=\sqrt{A'}\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}\cdot\sqrt{X},$$

en y regardant X comme formé par l'équation

$$X=x^4+\lambda x^3+Ax^2+Bx+D;$$

où l'on a:

$$\lambda=\frac{B'}{A'};\quad A=\frac{D'}{A'};\quad B=\frac{E'}{A'};\quad D=\frac{A''}{A'}.$$

Donc en appliquant ici les formules du §. III, nous aurons

$$Z=(\beta-\alpha)^2\sqrt{A'}\int\frac{dy\sqrt{[(M+Ny^2)(P+Qy^2)]}}{\{(1+y)^2+(\alpha+\beta y)^2\}^2}.$$

Cela posé, si l'on fait, comme au §. IV, $y=\sqrt[4]{\frac{PM}{QN}}\tang\frac{1}{2}\psi$, il viendra

$$(99.)\quad Z=(\beta-\alpha)^2\sqrt{A'}\cdot\sqrt{\frac{PM}{QN}}\cdot\int\frac{d\psi\sqrt{[(u'-u''')+(u''-u')\sin^2\psi)]}}{(\xi+\xi'\cos\psi+\xi''\sin\psi)^2};$$

en fesant pour plus de simplicité:

$$(100.)\quad\begin{cases}\xi=(1+\alpha^2)+(1+\beta^2)\sqrt{\frac{PM}{QN}};\\ \xi'=(1+\alpha^2)-(1+\beta^2)\sqrt{\frac{PM}{QN}};\\ \xi''=2(1+\alpha\beta)\sqrt{\frac{PM}{QN}}.\end{cases}$$

Actuellement, si l'on fait $\psi=\frac{1}{2}\pi-\varphi$, $c^2=\frac{u''-u'}{u''-u'''}$, et

$$\xi'=\xi\cdot\eta'\cos\omega;\quad \xi''=\xi\cdot\eta'\sin\omega,$$

on aura

$$Z=-\frac{1}{\xi^2}(\beta-\alpha)^2\sqrt{A'}\sqrt{\frac{PM}{QN}}\cdot\sqrt{(u''-u''')}\int\frac{d\varphi\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}{\{1+\eta'\sin(\varphi+\omega)\}^2}.$$

Donc en vertu des équations (26., 23. et 14.) on peut écrire

$$(101.)\quad Z=\Pi\int\frac{d\varphi\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}{\{1+\eta'\sin(\varphi+\omega)\}^2},$$

en posant

$$\Pi=-\frac{\sqrt{A'}}{\xi^2}\cdot\frac{(u''-u''')^{\frac{3}{2}}(u''-u')(u'-u''')}{(4u''+\lambda^2-4A)(\gamma-\beta)(\gamma'-\beta)}.$$

Les constantes de cette intégrale sont des fonctions de trois racines réelles de

l'équation (96.), lesquelles doivent être disposées dans l'ordre décroissant u'', u', u'''; ainsi que cela a été dit au §. IV.

Malgré la simplicité apparente de cette expression de Z, il faudrait préférer celle qu'on voit dans le second membre de l'équation (95.) si l'on vouloit conduire la transformation jusqu'à son dernier terme, qui est celui d'avoir explicitement la valeur de Z par des quantités algébriques et des transcendantes elliptiques à paramètres réels.

L'élément différentiel dZ du secteur conique produit par son développement sur le plan tangent un angle différentiel $d\Omega$, tel que l'on a $d\Omega=\frac{2dZ}{\varrho^2}$, en désignant par ϱ la génératrice du cône, c'est-à-dire que

$$(102.)\quad \varrho^2 = h^2+(f-a\sin\theta)^2+(g-b\cos\theta)^2;$$

de sorte que nous avons $\Omega=2\int\frac{dZ}{\varrho^2}$ pour l'angle Ω correspondant à la surface du secteur Z. Il est donc nécessaire de chercher l'expression de ϱ^2 en fonction de la variable ψ, pour avoir Ω en fonction de cette même variable. Pour cela j'observe qu'en fesant $q=\sqrt[4]{\frac{PM}{QN}}$, l'équation (97.) donne

$$\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)}}=\frac{\alpha\sqrt{(1+\cos\psi)}+\beta q\sqrt{(1-\cos\psi)}}{\sqrt{(1+\cos\psi)}+q\sqrt{(1-\cos\psi)}}=\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{S'}},$$

d'où l'on tire:

$$\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{(\alpha^2+\beta^2q^2)+(\alpha^2-\beta^2q^2)\cos\psi+2\alpha\beta q\sin\psi}{(1+q^2)+(1-q^2)\cos\psi+2q\sin\psi}=\frac{S}{S'};$$

$$\cos\theta=\frac{S'-S}{S'+S},\quad \sin\theta=\frac{2\sqrt{S'}\cdot\sqrt{S}}{S'+S}.$$

Donc en posant

$$(103.)\begin{cases}x=(1-\alpha^2)+q^2(1-\beta^2), & \zeta=2(\alpha+\beta q^2), & \xi=(1+\alpha^2)+q^2(1+\beta^2),\\ x'=(1-\alpha^2)-q^2(1-\beta^2), & \zeta'=2(\alpha-\beta q^2), & \xi'=(1+\alpha^2)-q^2(1+\beta^2),\\ x''=2q(1-\alpha\beta); & \zeta''=2q(\alpha+\beta); & \xi''=2q(1+\alpha\beta);\end{cases}$$

$$(104.)\quad\begin{cases}T=x+x'\cos\psi+x''\sin\psi,\\ U=\zeta+\zeta'\cos\psi+\zeta''\sin\psi,\\ R=\xi+\xi'\cos\psi+\xi''\sin\psi;\end{cases}$$

on aura

$$\cos\theta=\frac{T}{R},\quad \sin\theta=\frac{U}{R},$$

et l'équation identique $T^2+U^2=R^2$.

Cela posé, il est clair que l'on a

$$(105.)\quad R^2\cdot\varrho^2=h^2R^2+(fR-aU)^2+(gR-bT)^2.$$

Il suit de là, et de l'équation (99.), que nous avons

$$(106.)\quad \Omega = 2(\beta-\alpha)^2\sqrt{A'}\cdot\sqrt{\frac{PM}{QN}}\int\frac{d\psi\sqrt{[(u'-u''')+(u''-u')\sin^2\psi]}}{h^2K^2+(fR-aU)^2+(gR-bT)^2}.$$

La réduction de cette intégrale aux transcendantes elliptiques peut être effectuée par les formules générales que j'ai données dans ce Mémoire: mais il serait trop long d'exposer ici les détails de cette transformation.

En modifiant convenablement les formules précédentes, on obtient une nouvelle solution du problème relatif à l'attraction d'un anneau elliptique, sur lequel Mr. *Gaufs* a composé en 1818 un excellent Mémoire, publié dans le Tome IV des Commentaires de la Société Royale de Goettingue. Voici en peu de mots mon analyse.

§. XVII.

Détermination de l'attraction exercée par un anneau elliptique dont les élémens différentiels de la masse sont proportionnels aux élémens différentiels de l'aire des secteurs décrits par les rayons vecteurs ayant leur sommet à un des foyers de l'ellipse.

Soient f, g, h les coordonnées du point attiré, et ϱ sa distance à un point quelconque de la périphérie de l'ellipse qui sert d'axe à l'anneau. On aura la valeur de ϱ^2 par l'équation (97.). Les trois composantes A_1, B_1, C_1 de l'attraction de l'anneau seront

$$A_1 = \int\frac{dm}{\varrho^3}(f-a\sin\Theta),\qquad B_1 = \int\frac{dm}{\varrho^3}(g-b\cos\Theta),\qquad C_1 = \int\frac{dm}{\varrho^3}h_1,$$

où l'élément dm de la masse doit être, par hypothèse, tel que l'on ait

$$dm = \tfrac{1}{2}\mu\cdot a^2\sqrt{(1-e^2)}(1-e\sin\Theta)d\Theta,$$

en représentant par μ le pouvoir attractif de l'unité de masse, et par e le rapport de l'excentricité au grand axe de l'ellipse.

Cela posé, si l'on fait $\tang\frac{1}{2}\Theta = x$, et

$$\varrho'^2 = h^2+f^2+(g+b)^2;\qquad \varrho''^2 = h^2+f^2+(g-b)^2;$$
$$\varrho'''^2 = 2(f^2+g^2+h^2)+4a^2-2b^2;$$
$$\lambda = -\frac{4af}{\varrho'^2};\quad A = \frac{\varrho'''^2}{\varrho'^2};\quad B = A;\quad D = \frac{\varrho''^2}{\varrho'^2};$$
$$X = x^4+\lambda x^3+Ax^2+Bx+D,$$

on aura

$$A_1 = \frac{\mu a^2\sqrt{(1-e^2)}}{\varrho'^3}\int\frac{dx\{f(1+x^2)-2ax\}\{(1+x^2)-2ex\}}{X^{\frac{3}{2}}};$$

$$B_1 = \frac{\mu a^2 \sqrt{(1-e^2)}}{\varrho'^3} \int \frac{dx\{(g-b)+(g+b)x^2\}\{(1+x^2)-2ex\}}{X^{\frac{3}{2}}};$$

$$C_1 = \frac{\mu a^2 \sqrt{(1-e^2)}}{\varrho'^3} \cdot h \int \frac{dx(1+x^2)\{(1+x^2)-2ex\}}{X^{\frac{3}{2}}}.$$

Cela posé, si l'on fait $x = \frac{\alpha + \beta y}{1+y}$, on pourra déterminer α et β par les formules (26.), à l'aide des trois racines *réelles* de l'équation

$$u^3 - Au^2 + (\lambda A - 4D)u + D(4A - \lambda^2) - A^2 = 0.$$

D'après les formules et les dénominations du §. III. nous pouvons écrire

$$A_1 = \frac{\mu a^2 \sqrt{(1-e^2)}}{\varrho'^3 (\alpha-\beta)^3} \int \frac{T' dy}{Y^{\frac{3}{2}}}; \quad B_1 = \frac{\mu a^2 \sqrt{(1-e^2)}}{\varrho'^3 (\alpha-\beta)^3} \int \frac{T'' dy}{Y^{\frac{3}{2}}}; \quad C_1 = \frac{\mu a^2 \sqrt{(1-e^2)}}{\varrho'^3 (\alpha-\beta)^3} \int \frac{T''' dy}{Y^{\frac{3}{2}}};$$

en fesant: $T' = Y' Y''$; $T'' = Y'' Y'''$; $T''' = Y'' Y^{\text{IV}}$;

$$Y' = f(1+y)^2 + f(\alpha+\beta y)^2 - 2a(1+y)(\alpha+\beta y);$$
$$Y'' = (1+y)^2 + (\alpha+\beta y)^2 - 2e(1+y)(\alpha+\beta y);$$
$$Y''' = (g-b)(1+y)^2 + (g+b)(\alpha+\beta y)^2;$$
$$Y^{\text{IV}} = (1+y)^2 + (\alpha+\beta y)^2.$$

Maintenant, si l'on fait, comme précédemment,

$$y = \sqrt[4]{\frac{PM}{QN}} \cdot \tang \tfrac{1}{2}\psi = q \cdot \tang \tfrac{1}{2}\psi,$$

on aura

$$A_1 = \frac{\mu a^2 \sqrt{(1-e^2)}}{\varrho'^3 q^2 (\alpha-\beta)^3} \int \frac{\Pi' d\psi}{\{(u'-u''')+(u''-u')\sin^2\psi\}^{\frac{3}{2}}};$$

$$B_1 = \frac{\mu a^2 \sqrt{(1-e^2)}}{\varrho'^3 q^2 (\alpha-\beta)^3} \int \frac{\Pi'' d\psi}{\{(u'-u''')+(u''-u')\sin^2\psi\}^{\frac{3}{2}}};$$

$$C_1 = \frac{\mu a^2 h \sqrt{(1-e^2)}}{\varrho'^3 q^2 (\alpha-\beta)^3} \int \frac{\Pi''' d\psi}{\{(u'-u''')+(u''-u')\sin^2\psi\}^{\frac{3}{2}}};$$

où l'on a fait pour plus de simplicité:

$$\Pi' = (H' + H''\sin\psi + H'''\cos\psi)(K' + K''\sin\psi + K'''\cos\psi);$$
$$\Pi'' = (H_1' + H_1''\sin\psi + H_1'''\cos\psi)(K' + K''\sin\psi + K'''\cos\psi);$$
$$\Pi''' = (H_2' + H_2''\sin\psi + H_2'''\cos\psi)(K' + K''\sin\psi + K'''\cos\psi);$$
$$H' = f\{(1+\alpha^2) + q^2(1+\beta^2)\} - 2a(\alpha+\beta q^2);$$
$$H'' = 2fq(1+\alpha\beta) - 2aq(\alpha+\beta);$$
$$H''' = f\{(1+\alpha^2) - q^2(1+\beta^2)\} - 2a(\alpha-\beta q^2);$$
$$H_1' = (g-b)(1+q^2) + (g+b)(\alpha^2+\beta^2 q^2);$$
$$H_1'' = 2(g-b)q + 2(g+b)\cdot\alpha\beta q;$$
$$H_1''' = (g-b)(1-q^2) + (g+b)(\alpha^2-\beta^2 q^2);$$

$$\begin{aligned}
H_2' &= 1+q^2+\alpha^2+\beta^2 q^2;\\
H_2'' &= 2q(1+\alpha\beta);\\
H_2''' &= 1-q^2+\alpha^2-\beta^2 q^2;\\
K' &= 1+q^2+\alpha^2+\beta^2 q^2-2\alpha e-2\beta q^2\cdot e;\\
K'' &= 2q(1+\alpha\beta)-2qe(\alpha+\beta);\\
K''' &= 1-q^2+\alpha^2-\beta^2 q^2-2e(\alpha-\beta q^2).
\end{aligned}$$

En fesant $\psi = \frac{1}{2}\pi - \varphi$, $c^2 = \frac{u''-u'}{u''-u'''}$, il n'y a plus aucune difficulté pour achever la réduction aux transcendantes elliptiques, en se rappelant que l'on a

$$\int \frac{d\varphi \cos^2\varphi}{\Delta^3} = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta} + \frac{1}{c^2}\left\{\int \frac{d\varphi}{\Delta} - \int d\varphi\,\Delta\right\};$$

$$\int \frac{d\varphi \sin^2\varphi}{\Delta^3} = -\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{(1-c^2)\Delta} - \frac{1}{c^2}\int\frac{d\varphi}{\Delta} + \frac{1}{c^2(1-c^2)}\int d\varphi\,\Delta;$$

$$\Delta = \sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}\ ^{*)}.$$

Pour avoir l'attraction de l'anneau entier, il faudra que les intégrales soient prises depuis $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ jusqu'à $\varphi = -\frac{3}{2}\pi$, qui sont les limites correspondantes à $\psi = 0$ et $\psi = 2\pi$. Et celles-ci, rapportées à la variable primitive Θ, répondent à $\Theta = 0$, $\Theta = 2\pi$. Il est vrai que d'après l'équation

$$(107.)\qquad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Theta = \frac{\alpha+\beta q\operatorname{tang}\frac{1}{2}\psi}{1+q\operatorname{tang}\frac{1}{2}\psi},$$

on a, $\alpha+\beta q\operatorname{tang}\frac{1}{2}\psi = 0$ pour $\Theta = 0$ et $\Theta = 2\pi$: ce qui revient à dire, qu'en nommant ψ' et ψ'' les deux valeurs correspondantes de ψ, on a $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\psi' = -\frac{\alpha}{\beta q} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\psi''$; et par conséquent $\psi'' = \psi' + 2\pi$. Les véritables limites de φ sont donc $\varphi = \frac{1}{2}\pi + \psi'$; $\varphi = -\frac{3}{2}\pi + \psi'$: mais on sait que le résultat de l'intégration demeure le même en remplaçant ces limites par $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ et $\varphi = -\frac{3}{2}\pi$. Au reste il est important de remarquer, que l'équation précédente entre Θ et ψ peut être mise sous la forme

$$108.\qquad (1+\beta\operatorname{tang}\varDelta)\operatorname{tang}[\tfrac{1}{2}\Theta-\varDelta] = (\beta-\operatorname{tang}\varDelta)\operatorname{tang}\omega\cdot\operatorname{tang}(\tfrac{1}{2}\psi-\omega);$$

en déterminant les angles constants $\varDelta$ et ω par les équations

$$\operatorname{tang}2\varDelta = \frac{2q(\alpha+\beta q)}{(1-\alpha^2)+q^2(1-\beta^2)};\qquad \operatorname{tang}2\omega = \frac{2q(1+\alpha\beta)}{(1+\alpha^2)-q^2(1+\beta^2)}.$$

---

*) On voit par là que l'attraction de cet anneau elliptique est indépendante des transcendantes elliptiques de *troisième* espèce: et, à ce titre, on doit regarder ce problème comme beaucoup plus simple que celui de la surface du cône oblique à base elliptique.

Cette transformation de l'équation (107.) a été reconnue par *Legendre* en 1811. Mais la démonstration qu'il en donne aux pages 177 et 178 du premier volume de ses „Exercices de Calcul intégral" peut être améliorée, si je ne me trompe, en la présentant de la manière suivante. Soit, pour un moment, $k=\frac{1}{q}$, $\tang\frac{1}{2}\theta=u$, $\tang\frac{1}{2}\psi=v$; l'équation (107.) devient

$$u=\frac{\alpha k+\beta v}{k+v}.$$

Avec une legère attention on reconnaît que cette valeur de u serait aussi donnée par la solution d'une équation de la forme

$$\Delta\tang(\tfrac{1}{2}\theta-\Delta)=\tang(\tfrac{1}{2}\psi-\omega);$$

car, en fesant $B=\tang\Delta$, $C=\tang\omega$, on en tire

$$\frac{A(u-B)}{1+\beta u}=\frac{v-C}{1+Cv};$$

et par conséquent une valeur de u semblable à la précédente. Donc, en substituant la valeur de u, il faudra que l'équation résultante, c'est-à-dire

$$A(1+vC)\{\alpha k+\beta v-B(k+v)\}=(v-C)\{k+v+B(\alpha k+\beta v)\}$$

puisse être satisfaite, par identité, pour toute valeur de v; ce qui exige que l'on ait ces trois équations; savoir:

$$AC(\beta-B)-(1+\beta B)=0,$$
$$A(\alpha-B)+C(1+\alpha B)=0,$$
$$A(\beta-B)+ACK(\alpha-B)+C(1+\beta B)-K(1+\alpha B)=0.$$

La première donne

$$A=\frac{1}{c}\cdot\left(\frac{1+\beta B}{\beta-B}\right),$$

et les deux autres, après y avoir substitué cette valeur de A, donnent

$$(\alpha-B)(1+\beta B)+C^2(1+\alpha B)(\beta-B)=0,$$
$$(1+\beta B)(\beta-B)+KC\{(\alpha-B)(1+\beta B)-(1+B\alpha)(\beta-B)\}+C^2(1+\beta B)(\beta-B)=0.$$

Maintenant, si l'on élimine C^2 entre ces deux équations, on aura l'équation

$$\frac{1+\beta B}{1+\alpha B}(1+B^2)(\beta-\alpha)+CK(1+B^2)(\alpha-\beta)=0,$$

laquelle, par la suppression du facteur commun, donne

$$CK=\frac{1+\beta B}{1+\alpha B},\quad\text{ou bien}\quad B=\frac{1-KC}{CK\alpha-\beta}.$$

En substituant cette valeur de C dans la prémière des deux équations précé-

dentes, il viendra

$$\frac{\alpha - B}{\beta - B} + \frac{1}{K^2}\left(\frac{1+\beta B}{1+\alpha B}\right) = 0;$$

d'où l'on tire

$$\frac{1-B^2}{2B} = \cot 2\Delta = \frac{K^2(1-\alpha^2)+(1-\beta^2)}{2(\beta+K\alpha)}.$$

Mais la même équation $(\alpha - B)(1+\beta B) + C^2(1+\alpha B)(\beta - B) = 0$ revient à dire que l'on a

$$(\alpha - B)K + C(\beta - B) = 0;$$

partant

$$B = \frac{\alpha K + C\beta}{C+K}.$$

En égalant cette valeur de B à celle trouvée plus haut, nous obtenons l'équation

$$\frac{\alpha K + C\beta}{C+K} = \frac{1-CK}{CK\alpha - \beta},$$

de laquelle on tire

$$\frac{1-C^2}{2C} = \cot 2\omega = \frac{K^2(1+\alpha^2)-(1+\beta^2)}{2K(1+\alpha\beta)}.$$

Ainsi il est démontré que les équations (107.) et (108.) sont équivalentes. Et par l'équation (108.) on voit clairement que les limites de ψ doivent différer de 360^0, si celles de Θ sont $\Theta = 0$ et $\Theta = 360^0$.

Il y a une autre manière de traiter le problème de l'attraction de l'anneau elliptique, fondée sur l'équation

$$\int \frac{x^m dx}{X^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\int \frac{dy(1+y)^4(\alpha+\beta y)^m}{Y^{\frac{1}{2}}}.$$

En effet, en posant

$$(1+y)^4(\alpha+\beta y)^m = Ty + T',$$

on pourra regarder T et T' comme des fonctions de y^2; ce qui donne

$$\int \frac{x^m dx}{X^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2(\alpha-\beta)^2}\int \frac{T \cdot d \cdot y^2}{Y^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\int \frac{T' dy}{Y^{\frac{1}{2}}},$$

où l'integrale $\int \frac{T d \cdot y^2}{Y^{\frac{1}{2}}}$ rentre dans les règles ordinaires. Ainsi en fesant

$$T' = H + H_{(1)}y^2 + H_{(2)}y^4 + H_{(3)}y^6 + \text{etc.},$$

la question est réduite à l'intégrale $\int \frac{y^{2i} dy}{Y^{\frac{1}{2}}}$. Or en mettant Y sous la forme

$$Y = p + qy^2 + ry^4,$$

on a l'équation

$$\int\frac{y^{2i}dy}{Y^{\frac{3}{2}}}=\left(\frac{A}{K}\cdot y^{2i+1}+\frac{B}{K}\cdot y^{2i+3}\right)\frac{1}{\sqrt{Y}}+\frac{C}{K}\int\frac{y^{2i}dy}{\sqrt{Y}}+\frac{D}{K}\int\frac{y^{2i+2}dy}{\sqrt{Y}},$$

où les cinq coefficiens A, B, C, D, K sont tels que l'on a:

$$A=2pr-q^2;\quad B=-qr;\quad C=4pr-q^2-(2i+1)(2pr-q^2);$$
$$D=(2i+1)qr;\quad K=p(4pr-q^2).$$

La question est donc ramenée aux formes ordinaires. Mais, en général, il convient d'opérer la transformation trigonométrique, avant de réduire à $\frac{1}{2}$ la puissance $\frac{3}{2}$ du radical.

Turin le 30 Juin 1846.

Note sur l'équation $\frac{1}{\lambda}F'(h)=\frac{1}{2}\pi\cdot\frac{F'(b)}{F'(c)}$, posée vers la fin du §. XIII.

Pour mieux sentir le mode d'existence de cette équation, il faut observer, que, le module h étant ici, par hypothèse, une quantité très-approchante de l'unité, pour toute valeur très-grande du nombre entier λ, on peut, en bornant la valeur de $F'(h)$ au premier terme de la série convergente qui en donne l'expression générale, faire

$$F'(h)=\log\left(\frac{4}{g}\right)=\log 4-\log g.$$

Donc en négligeant la fraction infiniment petite $\frac{1}{\lambda}\log 4$, nous aurons

$$\frac{1}{\lambda}F'(h)=-\frac{\log g}{\lambda}=\frac{1}{2}\pi\cdot\frac{F'(b)}{F'(c)},$$

ce qui revient à dire que l'on a

$$g=e^{-\frac{1}{2}\lambda.\pi.\frac{F'(b)}{F'(c)}},$$

e étant la base des logarithmes hyperboliques. On voit par là, que le rapport $\frac{1}{\lambda}F'(h)$ converge vers une quantité constante, à mesure que le nombre λ augmente, parceque la fraction g décroît elle-même comme la puissance λ d'une quantité constante.

Je saisis cette occasion pour faire remarquer que, le module c étant fort approchant de l'unité, il convient d'employer l'équation

$$\int\frac{d\varphi}{\varDelta}=E(c,\varphi)-c\cdot\frac{d.E(c,\varphi)}{dc},$$

où $E(c,\varphi)=\int\varDelta\,d\varphi$, pour avoir la série qui donne $F'(c)$.

En effet, cette équation, en fesant $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, donne

$$F'(c)=E'(c)-c\cdot\frac{dE'(c)}{dc}=E'(c)+\frac{(1-b^2)}{b}\cdot\frac{dE'(c)}{db}.$$

Mais, le module complémentaire $b=\sqrt{(1-c^2)}$ étant très-petit, le quadrant elliptique $E'(c)$ est donné par une série dont les deux premiers termes sont

$$E'_{,}(c)=1-\tfrac{1}{4}b^2+\tfrac{1}{2}b^2\log\left(\frac{4}{b}\right);$$

partant nous avons

$$\frac{dE'(c)}{db}=-b+b\log\left(\frac{4}{b}\right).$$

Donc, en négligeant les termes multipliés par q^2, l'expression précédente de $F'(c)$ donnera

$$F'(c)=1-1+\log\left(\frac{4}{b}\right)=\log\left(\frac{4}{b}\right).$$

Ce résultat est ainsi obtenu en évitant l'erreur qui s'est glissée dans la démonstration de *Legendre* à la page 66 du premier Volume de son „Traité des fonctions elliptiques" où il fait $\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+c}{1-c}\right)=\log\left(\frac{4}{b}\right)$, tandis que l'on a

$$\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1+c}{1-c}\right)=\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{2-\frac{1}{2}b^2}{\frac{1}{2}b^2}\right)=\log\left(\frac{2}{b}\right).$$

Euler a donné le premier en 1750 la véritable série, propre à la rectification de l'ellipse fort alongée, dans le second Volume de ses *Opuscula varii argumenti*. Il a fait voir que cette série devait être de la forme

$$E'(c)=1+H'b^2+H''b^4+H'''b^6+\text{etc.}$$
$$+\{G'b^2+G''b^4+G'''b^6+\text{etc.}\}\log\left(\frac{4}{b}\right),$$

et il a déterminé la loi des coefficiens numériques H', H'' etc.; G', G'' etc.

Pour déterminer *a priori* la forme de cette série, voici a peu près le procédé employé par *Euler*. Soit $y=b\sqrt{(2x-x^2)}$ l'équation de l'ellipse. En désignant par $E(c,x)$ l'arc elliptique qui répond à l'abscisse x, nous aurons

$$E(c,x)=\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\int dx\sqrt{\left(1+\frac{b^2(1-x)^2}{2x-x^2}\right)}.$$

La différentielle de l'arc parabolique ayant pour équation $y=b\sqrt{(2x)}$, serait $dx\sqrt{\left(1+\frac{b^2}{2x}\right)}$. D'après cela, afin d'établir ici un rapprochement entre l'arc elliptique et l'arc parabolique (comme on le pratique dans la théorie du mou-

vement des comètes), nous écrirons

$$E(c,x) = \int dx \sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{2x} - \frac{b^2(3-2x)}{4-2x}\right)},$$

ou bien

$$E(c,x) = \int dx \sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{2x}\right)} \left(1 - \tfrac{1}{2} b^2 \cdot \frac{P}{1 + \frac{b^2}{2x}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

en posant pour plus de simplicité:

$$P = \frac{3-2x}{2-x} = 2 - \frac{1}{2-x}.$$

Maintenant, si l'on développe le second radical, on aura

$$E(c,x) = \int dx \sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{2x}\right)} - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} b^2 \cdot Q_1 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} (\tfrac{1}{2} b^2)^2 Q_2$$
$$- \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} (\tfrac{1}{2} b^2)^3 Q_3 \ldots - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 2n-3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \ldots 2n} (\tfrac{1}{2} b)^n Q_n - \text{etc.};$$

où l'on a fait

$$Q_n = \int^{1} \frac{P^n\,dx}{\left(1 + \frac{b^2}{2x}\right)^{\frac{1}{2}(2n-1)}}.$$

Pour rendre rationnelles les intégrales Q_1, Q_2, etc., il suffira de faire $z = \sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{2x}\right)}$. En intégrant ensuite depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, on trouve, en négligeant les termes multipliés par b^6:

$$E'(c) = 1 - \tfrac{1}{4} b^2 - \tfrac{13}{64} b^4 + (\tfrac{1}{2} b^2 + \tfrac{3}{16} b^4) \log\left(\frac{4}{b}\right).$$

Cela suffit pour démontrer la forme de la série. Mais, la seule intégration directe ne suffit pas pour découvrir la loi des coefficiens numériques, quelle que soit la manière de préparer la différentielle de l'arc elliptique avant de la développer en série. Il ne serait pas difficile de démontrer que cet inconvenient est aussi inhérent à la méthode proposée en 1784 par *Lagrange* *).

Pour éviter cet inconvenient, il faut employer l'équation différentielle

$$(1 - b^2) \frac{d^2 \cdot E'(c)}{db^2} - \frac{(1 + b^2)}{b} \cdot \frac{dE'(c)}{db} + E'(c) = 0,$$

découverte par *Euler* dans l'ouvrage que je viens de citer, et appliquée par Lui-même au développement de la fonction $E'(c)$, et ensuite par *Legendre* au développement simultané des deux fonctions elliptiques complétes $F'(c)$, $E'(c)$.

---

*) On ne saurait regarder comme connue la loi du développement dont *Bossut* a calculé les premiers termes (Voyez la page 484 du 1er Volume de son Calcul différentiel et intégral).

Table

du logarithme tabulaire de la quantité exponentielle

$$\frac{1}{q}=e^{\frac{\Pi F'(b)}{F'(c)}};$$

e étant la base des logarithmes hyperboliques.

On suppose $c=\sin\theta$, $b=\cos\theta$ et

$$F'(c)=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}},\quad F'(b)=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-b^2\sin^2\varphi)}}.$$

θ	$\log\frac{1}{q}$	θ	$\log\frac{1}{q}$	θ	$\log\frac{1}{q}$	θ	$\log\frac{1}{q}$
0°.0	infini	4°.0	3.51589 22198	8°.0	2.91276 99380	12°.0	2.55880 63076
0 .1	6.72036 50269	4 .1	3.49442 66022	8 .1	2.90194 41608	12 .1	2.55154 41950
0 .2	6.11830 43741	4 .2	3.47347 02068	8 .2	2.89125 03313	12 .2	2.54434 09508
0 .3	5.76612 07535	4 .3	3.45302 03016	8 .3	2.88068 52394	12 .3	2.53719 56061
0 .4	5.51624 17369	4 .4	3.43303 26435	8 .4	2.87024 57906	12 .4	2.53010 72154
0 .5	5.32241 97264	4 .5	3.41349 33093	8 .5	2.85992 90002	12 .5	2.52307 48562
0 .6	5.16405 48089	4 .6	3.39438 25703	8 .6	2.84973 19880	12 .6	2.51609 76277
0 .7	5.03015 83620	4 .7	3.37568 19711	8 .7	2.83965 19741	12 .7	2.50917 46508
0 .8	4.91417 11617	4 .8	3.35737 42218	8 .8	2.82968 62734	12 .8	2.50230 50668
0 .9	4.81186 23682	4 .9	3.33944 31023	8 .9	2.81983 22922	12 .9	2.49548 80373
1°.0	4.72034 31974	5°.0	3.32187 33756	9°.0	2.81008 75235	13°.0	2.48872 27430
1 .1	4.63755 31964	5 .1	3.30465 07098	9 .1	2.80044 95436	13 .1	2.48200 83838
1 .2	4.56207 60472	5 .2	3.28776 16084	9 .2	2.79091 60082	13 .2	2.47534 41774
1 .3	4.49244 12771	5 .3	3.27119 33457	9 .3	2.78148 46489	13 .3	2.46872 93596
1 .4	4.42806 59562	5 .4	3.25493 39102	9 .4	2.77213 72702	13 .4	2.46216 41832
1 .5	4.36813 31140	5 .5	3.23897 19673	9°.5	2.76291 97461	13 .5	2.45564 49177
1 .6	4.31206 88301	5 .6	3.22329 67317	9 .6	2.75378 20178	13 .6	2.44917 38363
1 .7	4.25940 36746	5 .7	3.20789 80851	9 .7	2.74473 80900	13 .7	2.44274 92772
1 .8	4.20974 87879	5 .8	3.19276 63751	9 .8	2.73578 60292	13 .8	2.43637 05201
1 .9	4.16277 84355	5 .9	3.17789 24596	9 .9	2.72692 39604	13 .9	2.43003 69087
2°.0	4.11821 70439	6°.0	3.16326 76574	10°.0	2.71815 00654	14°.0	2.42374 77887
2 .1	4.07582 94022	6 .1	3.14888 37181	10 .1	2.70946 39318	14 .1	2.41750 35199
2 .2	4.03541 31449	6 .2	3.13473 27935	10 .2	2.70085 97929	14 .2	2.41130 04749
2 .3	3.99679 29079	6 .3	3.12080 74123	10 .3	2.69234 00417	14 .3	2.40514 10408
2 .4	3.95981 57281	6 .4	3.10710 04592	10 .4	2.68390 17129	14 .4	2.39902 36167
2 .5	3.92434 73842	6 .5	3.09360 51374	10 .5	2.67554 32394	14 .5	2.39294 76142
2 .6	3.89026 94539	6 .6	3.08031 49801	10 .6	2.66726 30982	14 .6	2.38691 24571
2 .7	3.85747 69279	6 .7	3.06722 38000	10 .7	2.65905 98095	14 .7	2.38091 75810
2 .8	3.82587 62582	6 .8	3.05432 56876	10 .8	2.65093 19348	14 .8	2.37496 24331
2 .9	3.79538 37477	6 .9	3.04161 49925	10 .9	2.64287 80751	14 .9	2.36904 64716
3°.0	3.76592 42147	7°.0	3.02908 63080	11°.0	2.63489 68701	15°.0	2.36316 91654
3 .1	3.73742 98718	7 .1	3.01673 44577	11 .1	2.62698 69961	15 .1	2.35732 99968
3 .2	3.70983 94024	7 .2	3.00455 44821	11 .2	2.61914 71653	15 .2	2.35152 74485
3 .3	3.68309 71334	7 .3	2.99254 16271	11 .3	2.61137 61238	15 .3	2.34576 40276
3 .4	3.65715 23909	7 .4	2.98069 13328	11 .4	2.60367 26513	15 .4	2.34003 62405
3 .5	3.63195 89057	7 .5	2.96899 92236	11 .5	2.59603 55592	15 .5	2.33434 46086
3 .6	3.60747 43198	7 .6	2.95746 10940	11 .6	2.58846 36897	15 .6	2.32868 86601
3 .7	3.58365 97576	7 .7	2.94607 29092	11 .7	2.58095 59151	15 .7	2.32306 81626
3 .8	3.56047 94542	7 .8	2.93483 07869	11 .8	2.57351 11363	15 .8	2.31748 19578
3 .9	3.53790 04351	7 .9	2.92373 09939	11 .9	2.56612 82819	15 .9	2.31193 03263

θ	$\log\frac{1}{q}$	θ	$\log\frac{1}{q}$	θ	$\log\frac{1}{q}$	θ	$\log\frac{1}{q}$
16°.0	2.30641 29844	21°.0	2.06599 79785	26°.0	1.87502 29864	31°.0	1.71543 96166
16 .1	2.30092 80815	21 .1	2.06177 48288	26 .1	1.87156 60030	31 .1	1.71249 16669
16 .2	2.29547 70035	21 .2	2.05757 06915	26 .2	1.86812 12932	31 .2	1.70955 21142
16 .3	2.29006 83607	21 .3	2.05338 53799	26 .3	1.86468 85974	31 .3	1.70662 08998
16 .4	2.28467 19352	21 .4	2.04921 87118	26 .4	1.86126 77123	31 .4	1.70369 79659
16 .5	2.27931 73288	21 .5	2.04507 05085	26 .5	1.85785 94482	31 .5	1.70078 32549
16 .6	2.27399 41520	21 .6	2.04094 05932	26 .6	1.85446 23898	31 .6	1.69787 67097
16 .7	2.26870 20193	21 .7	2.03682 87917	26 .7	1.85107 72518	31 .7	1.69497 82741
16 .8	2.26344 05549	21 .8	2.03273 49323	26 .8	1.84770 37580	31 .8	1.69208 78920
16 .9	2.25789 74270	21 .9	2.02865 88453	26 .9	1.84434 18328	31 .9	1.68920 55081
17°.0	2.25300 81567	22°.0	2.02460 03941	27°.0	1.84099 05975	32°.0	1.68633 10674
17 .1	2.24783 65020	22 .1	2.02055 93226	27 .1	1.83765 22241	32 .1	1.68346 45155
17 .2	2.24269 40746	22 .2	2.01653 55652	27 .2	1.83432 43973	32 .2	1.68060 57985
17 .3	2.23758 05375	22 .3	2.01252 89130	27 .3	1.83100 77675	32 .3	1.67775 48596
17 .4	2.23249 55214	22 .4	2.00853 92256	27 .4	1.82769 38232	32 .4	1.67491 16559
17 .5	2.22743 87272	22 .5	2.00456 63409	27 .5	1.82440 59193	32 .5	1.67207 61249
17 .6	2.22240 98127	22 .6	2.00061 01046	27 .6	1.82112 71794	32 .6	1.66924 82178
17 .7	2.21740 84591	22 .7	1.99667 02448	27 .7	1.81784 24204	32 .7	1.66642 78832
17 .8	2.21243 43494	22 .8	1.99274 69706	27 .8	1.81458 95323	32 .8	1.66361 50698
17 .9	2.20748 71720	22 .9	1.98883 97745	27 .9	1.81133 82841	32 .9	1.66080 97271
18°.0	2.20256 65210	23°.0	1.98494 86299	28°.0	1.80809 76305	33°.0	1.65801 18048
18 .1	2.19767 23977	23 .1	1.98107 33925	28 .1	1.80486 78860	33 .1	1.65522 12532
18 .2	2.19280 42000	23 .2	1.97721 39198	28 .2	1.80091 54758	33 .2	1.65243 80229
18 .3	2.18794 47431	23 .3	1.97337 00709	28 .3	1.79843 85564	33 .3	1.64966 20632
18 .4	2.18314 46381	23 .4	1.96954 17071	28 .4	1.79523 95467	33 .4	1.64689 33309
18 .5	2.17835 39618	23 .5	1.96572 86911	28 .5	1.79205 07500	33 .5	1.64413 17727
18 .6	2.17358 59640	23 .6	1.96193 08875	28 .6	1.78887 20900	33 .6	1.64137 73425
18 .7	2.16884 36446	23 .7	1.95814 81626	28 .7	1.78520 34913	33 .7	1.63862 99933
18 .8	2.16412 56668	23 .8	1.95438 03843	28 .8	1.78254 48789	33 .8	1.63588 96781
18 .9	2.15943 17989	23 .9	1.95062 74223	28 .9	1.77939 61788	33 .9	1.63315 63504
19°.0	2.15476 17499	24°.0	1.94688 91478	29°.0	1.77625 73156	34°.0	1.63042 99642
19 .1	2.15011 52718	24 .1	1.94316 54337	29 .1	1.77312 82228	34 .1	1.62771 04737
19 .2	2.14549 21155	24 .2	1.93945 61542	29 .2	1.77000 88226	34 .2	1.62499 78338
19 .3	2.14089 20321	24 .3	1.93576 11853	29 .3	1.76689 90564	34 .3	1.62229 19995
19 .4	2.13631 47778	24 .4	1.93208 04045	29 .4	1.76379 58221	34 .4	1.61959 29261
19 .5	2.13176 01120	24 .5	1.92841 36907	29 .5	1.76070 80817	34 .5	1.61690 05696
19 .6	2.12722 77981	24 .6	1.92476 09243	29 .6	1.75762 67509	34 .6	1.61421 48861
19 .7	2.12271 76032	24 .7	1.92112 19871	29 .7	1.75455 48209	34 .7	1.61153 58322
19 .8	2.11822 92977	24 .8	1.91749 67624	29 .8	1.75149 20738	34 .8	1.60886 33648
19 .9	2.11376 26554	24 .9	1.91388 51349	29 .9	7.74843 85734	34 .9	1.60617 52507
20°.0	2.10931 74749	25°.0	1.91028 69906	30°.0	1.74539 42379	35°.0	1.60353 80187
20 .1	2.10489 34736	25 .1	1.90670 22168	30 .1	1.74235 89719	35 .1	1.60088 50606
20 .2	2.10049 04984	25 .2	1.90313 07023	30 .2	1.73933 27503	35 .2	1.59823 85108
20 .3	2.09610 81060	25 .3	1.89957 23370	30 .3	1.73631 54182	35 .3	1.59559 83404
20 .4	2.09174 67141	25 .4	1.89602 70099	30 .4	1.73330 70022	35 .4	1.59296 68086
20 .5	2.08740 54906	25 .5	1.89249 46190	30 .5	1.73030 74092	35 .5	1.59033 69663
20 .6	2.08308 43339	25 .6	1.88897 50563	30 .6	1.72731 65754	35 .6	1.58771 57323
20 .7	2.07878 33567	25 .7	1.88546 82139	30 .7	1.72433 44418	35 .7	1.58510 06100
20 .8	2.07450 20487	25 .8	1.88197 39897	30 .8	1.72136 09441	35 .8	1.58249 17167
20 .9	2.07024 03192	25 .9	1.87849 22812	30 .9	1.71839 43577	35 .9	1.57988 89464

θ	$\log\frac{1}{q}$	θ	$\log\frac{1}{q}$	θ	$\log\frac{1}{q}$	θ	$\log\frac{1}{q}$
36°.0	1.57729 22786	38°.0	1.52658 12973	40°.0	1.47800 91213	42°.0	1.43132 88807
36 .1	1.57470 16674	38 .1	1.52410 41052	40 .1	1.47743 56428	42 .1	1.42900 82840
36 .2	1.57211 70745	38 .2	1.52163 22189	40 .2	1.47325 96571	42 .2	1.42675 33482
36 .3	1.56953 84614	38 .3	1.51916 56055	40 .3	1.47089 19296	42 .3	1.42417 31638
36 .4	1.56696 57904	38 .4	1.51670 42324	40 .4	1.46852 88339	42 .4	1.42219 73636
36 .5	1.56439 90238	38 .5	1.51424 80669	40 .5	1.46617 03422	42 .5	1.41992 51228
86 .6	1.56183 81241	38 .6	1.51179 70770	40 .6	1.46381 64253	42 .6	1.41765 68953
36 .7	1.55928 30542	38 .7	1.50935 12306	40 .7	1.46146 70556	42 .7	1.41539 31955
36 .8	1.55673 37776	38 .8	1.50691 04959	40 .8	1.45912 22064	42 .8	1.41313 31478
36 .9	1.55419 02575	38 .9	1.50447 48413	40 .9	1.45678 52037	42 .9	1.41087 67131
37°.0	1.55165 24578	39°.0	1.50204 42356	41°.0	1.45444 59544	43°.0	1.40862 49396
37 .1	1.54912 03424	39 .1	1.49961 86476	41 .1	1.45211 46656	43 .1	1.40637 67645
37 .2	1.54659 38757	39 .2	1.49719 80463	41 .2	1.44978 74551	43 .2	1.40413 24915
37 .3	1.54407 30223	39 .3	1.49478 24012	41 .3	1.44746 47943	43 .3	1.40189 20979
37 .4	1.54155 77470	39 .4	1.49237 16816	41 .4	1.44514 64892	43 .4	1.39965 55584
37 .5	1.53904 80147	39 .5	1.48996 58574	41 .5	1.44283 25145	43 .5	1.39742 28507
37 .6	1.53654 37911	39 .6	1.48756 48985	41 .6	1.44052 38533	43 .6	1.39519 39506
37 .7	1.53404 50416	39 .7	1.48516 87749	41 .7	1.43821 74502	43 .7	1.39296 87346
37 .8	1.53155 17319	39 .8	1.48277 74570	41 .8	1.43591 63096	43 .8	1.39074 74806
37 .9	1.52906 38283	39 .9	1.48039 09155	41 .9	1.43361 93915	43 .9	1.38852 98653

θ	$\log\frac{1}{q}$
44°.0	1.38631 59444
44 .1	1.38410 57574
44 .2	1.38195 35281
44 .3	1.37969 63290
44 .4	1.37749 70657
44 .5	1.37530 14008
44 .6	1.37310 93187
44 .7	1.37092 07937
44 .8	1.36873 52232
44 .9	1.36655 43337

Table

de degré en degré
depuis 45° jusqu'à 90°.

θ	$\log\frac{1}{q}$	θ	$\log\frac{1}{q}$
45°	1.36438 89200	68°	0.91945 19907
46°	1.34278 39459	69°	0.90102 83924
47°	1.32151 77315	70°	0.88252 37905
48°	1.30055 66348	71°	0.86391 12123
49°	1.27988 53659	72°	0.84516 07397
50°	1.25949 99351	73°	0.82623 88351
51°	1.23932 62369	74°	0.80710 74791
52°	1.21940 62901	75°	0.78772 30551
53°	1.19970 36923	76°	0.76803 48770
54°	1.18020 13054	77°	0.74798 32135
55°	1.16088 27518	78°	0.72749 65788
56°	1.14173 73795	79°	0.70648 79297
57°	1.12274 40173	80°	0.68484 91768
58°	1.10388 93078	81°	0.66244 30090
59°	1.08515 78899	82°	0.63909 02386
60°	1.06653 41635	83°	0.61454 92883
61°	1.04800 29083	84°	0.58848 09748
62°	1.02954 77374	85°	0.56038 34416
63°	1.01117 24158	86°	0.52945 95583
64°	1.99280 00070	87°	0.49430 70356
65°	1.97447 28641	88°	0.45221 54597
66°	1.95615 24532	89°	0.39436 17565
67°	1.93781 91489	89 .9	0.27699 72802
		90°	zèro

2.

Über die unmittelbare Verification einer Fundamentalformel der Theorie der elliptischen Functionen.

(Von Herrn Prof. C. G. J. Jacobi.)

In meinen „Fundamentis Novis" habe ich die Reihe

$$S = 1-q(z+z^{-1})+q^4(z^2+z^{-2})-q^9(z^3+z^{-3})+ \text{etc.}$$

dem Producte unendlich vieler Factoren

$$\Pi = (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\,..\,(1-qz)(1-q^3z)(1-q^5z)\,..$$
$$\times(1-qz^{-1})(1-q^3z^{-1})(1-q^5z^{-1})\,..$$

gleich gefunden. Wenn man die Logarithmen dieser beiden einander gleichen Ausdrücke S und Π nach q oder nach z differenziirt, die aus dem Product Π hervorgehenden Brüche entwickelt, und dann mit der Reihe S multiplicirt, so mufs man auf identische Gleichungen

$$1.\quad \frac{\partial S}{\partial q} = S\frac{\partial \log \Pi}{\partial q}, \qquad \frac{\partial S}{\partial z} = S\frac{\partial \log \Pi}{\partial z}$$

kommen. Man kann diese Identitäten auf folgende Art erweisen.

Setzt man

$$-q\frac{\partial \log \Pi}{\partial q} = P, \qquad -z\frac{\partial \log \Pi}{\partial z} = R,$$

so erhält man durch Substitution des Ausdrucks von Π,

$$P = \frac{2q^2}{1-q^2}+\frac{4q^4}{1-q^4}+\frac{6q^6}{1-q^6}+\text{etc.}$$
$$+\frac{qz}{1-qz}+\frac{3q^3z}{1-q^3z}+\frac{5q^5z}{1-q^5z}+\text{etc.}$$
$$+\frac{qz^{-1}}{1-qz^{-1}}+\frac{3q^3z^{-1}}{1-q^3z^{-1}}+\frac{5q^5z^{-1}}{1-q^5z^{-1}}+\text{etc.},$$

$$R = \frac{qz}{1-qz}+\frac{q^3z}{1-q^3z}+\frac{q^5z}{1-q^5z}+\text{etc.}$$
$$-\frac{qz^{-1}}{1-qz^{-1}}-\frac{q^3z^{-1}}{1-q^3z^{-1}}-\frac{q^5z^{-1}}{1-q^5z^{-1}}-\text{etc.}$$

Durch die Entwicklung der zur Rechten befindlichen Brüche erhält man

$$2.\quad P = 2\Sigma\psi(m)q^{2m} + \Sigma\Sigma p\, q^{pm}(z^m + z^{-m})$$
$$= \Sigma\left\{2\psi(m)q^{2m} + \frac{q^m(1+q^{2m})}{(1-q^{2m})^2}(z^m + z^{-m})\right\},$$
$$3.\quad R = \Sigma\Sigma q^{pm}(z^m - z^{-m})$$
$$= \Sigma\frac{q^m}{1-q^{2m}}(z^m - z^{-m}),$$

wo

m alle ganzen Zahlen von 1 bis ∞,
p alle ungeraden Zahlen von 1 bis ∞,
$\psi(m)$ die Factorensumme von m

bedeutet. Bezeichnet man noch mit

i alle ganze Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$,

so wird

$$4.\quad S = \Sigma(-1)^i q^{ii} z^i.$$

Substituirt man die Ausdrücke (2.), (3.), (4.) in die Gleichungen

$$5.\quad -q\frac{\partial S}{\partial q} = SP, \qquad -z\frac{\partial S}{\partial z} = SR,$$

welche aus (1.) folgen, so erhält man

$$6.\quad \begin{cases} \Sigma(-1)^i i^2 q^{ii} z^i = 2\Sigma\Sigma(-1)^i\psi(m)q^{ii+2m}z^i \\ \qquad\qquad + \Sigma\Sigma\Sigma(-1)^i p\, q^{ii+pm}(z^{i+m} + z^{i-m}), \\ \Sigma(-1)^i i\, q^{ii} z^i = \Sigma\Sigma\Sigma(-1)^i q^{ii+pm}(z^{i+m} - z^{i-m}). \end{cases}$$

Um in diesen beiden Formeln die allgemeinen Glieder der Summen rechter Hand auf die Form

$$(-1)^i q^{ii} Q_i z^i \quad \text{und} \quad (-1)^i q^{ii} Z_i z^i$$

zu bringen, wo Q_i und Z_i die Gröfse z nicht enthalten sollen, hat man in den dreifachen Summen $i-m$ oder $i+m$ für i zu setzen, wodurch man

$$7.\quad Q_i = 2\Sigma\psi(m)q^{2m} + \Sigma\Sigma(-1)^m p\, q^{m(m+p-2i)}$$
$$+ \Sigma\Sigma(-1)^m p\, q^{m(m+p+2i)},$$
$$8.\quad Z_i = \Sigma\Sigma(-1)^m q^{m(m+p-2i)} - \Sigma\Sigma(-1)^m q^{m(m+p+2i)}$$

erhält. Es ist daher, um die Gleichungen (6.) zu beweisen, aus welchen die Gleichungen (5.) oder, was dasselbe ist, die Gleichungen (1.) folgen, nöthig und ausreichend, zu zeigen, *dafs die Gröfsen Q_i und Z_i für jeden Werth von i von q unabhängig sind, und respective die einfachen Werthe $-ii$, $-i$ annehmen.* Dieses geschieht durch folgende Betrachtungen.

In den Ausdrücken der Gröfsen Q_i und Z_i bedeutet m jede ganze positive Zahl, die 0 nicht inbegriffen; p jede positive ungerade Zahl; i dagegen eine bestimmte positive oder negative Zahl, die 0 mit inbegriffen; es reicht aber hin, wie im Folgenden geschehen soll, i positiv oder 0 anzunehmen, da, wenn man $-i$ für i setzt, Q_i unverändert bleibt und Z_i sich in $-Z_i$ verwandelt.

Bedeutet jetzt π alle positiven und negativen ungeraden Zahlen von $-(2i-1)$ *bis* $2i-1$, so nimmt p alle Werthe der Zahlen $2i+\pi$ und $4i+p$ an. Man hat daher

$$\Sigma\Sigma(-1)^m p\, q^{m(m+p-2i)} + \Sigma\Sigma(-1)^m p\, q^{m(m+p+2i)}$$
$$= \Sigma\Sigma(-1)^m (2i+\pi) q^{m(m+\pi)} + \Sigma\Sigma(-1)^m (4i+2p) q^{m(m+p+2i)},$$
$$\Sigma\Sigma(-1)^m q^{m(m+p-2i)} - \Sigma\Sigma(-1)^m q^{m(m+p+2i)}$$
$$= \Sigma\Sigma(-1)^m q^{m(m+\pi)}.$$

Ich will jetzt die drei Fälle untersuchen, wenn in den Ausdrücken rechts vom Gleichheitszeichen $m+\pi$ negativ, $m+\pi$ positiv und $m+\pi=0$ ist.

1) Wenn $m+\pi$ negativ ist, so kann m auch den Werth $-(m+\pi)$ annehmen, und es werden sich je zwei von den Werthen der Gröfsen

$$(-1)^m(2i+\pi) q^{m(m+\pi)}, \qquad (-1)^m q^{m(m+\pi)},$$

in denen m die beiden Werthe m und $-(m+\pi)$ annimmt, gegenseitig aufheben, da für dieselben $(-1)^m$ entgegengesetzte Werthe erhält, der andere Factor aber ungeändert bleibt.

2) Wenn $m+\pi$ positiv ist, kann man $m+\pi$ für m setzen; da man auch $-\pi$ für π setzen kann, so kann man gleichzeitig $m+\pi$ und $-\pi$ statt m und π setzen. Man erhält so zu jedem Term

$$(-1)^m (2i+\pi) q^{m(m+\pi)}, \qquad (-1)^m q^{m(m+\pi)}$$

den entsprechenden

$$-(-1)^m (2i-\pi) q^{m(m+\pi)}, \qquad -(-1)^m q^{m(m+\pi)}.$$

Es werden sich daher, wenn $m+\pi$ positiv ist, je zwei Terme, die man durch Substitution von $m+\pi$, $-\pi$ für m, π aus einander erhält, in der Summe $\Sigma\Sigma(-1)^m q^{m(m+\pi)}$ aufheben, und in der Summe $\Sigma\Sigma(-1)^m(2i+\pi) q^{m(m+\pi)}$ zu *einem* Term

$$(-1)^m 2\pi q^{m(m+\pi)}$$

vereinigen. Da π in dem einen der beiden Terme positiv, in dem andern negativ ist, so darf in dem Term, der beide vereinigt, π nur seine positiven (oder nur seine negativen) Werthe annehmen. In diesem Term ist der *Exponent* von q das Product zweier Factoren, deren Differenz ungerade und *kleiner*

als $2i$ ist; der *Zahlencoëfficient* das Doppelte dieser Differenz; das *Vorzeichen* + oder —, je nachdem der kleinere Factor gerade oder ungerade ist. Dies ist genau dasselbe Gesetz, welches die Terme der Doppelsumme

$$\Sigma\Sigma(-1)^m(4i+2p)q^{m(m+p+2i)}$$

befolgen, nur dafs in letztrer die Differenz der beiden Factoren des Exponenten *gröfser* als $2i$ ist. Man kann daher in dem ersten der beiden vorgelegten Ausdrücke diejenigen Terme der ersten Doppelsumme, für welche $m+\pi$ positiv ist, mit der zweiten Doppelsumme in die eine

$$\Sigma\Sigma(-1)^m 2pq^{m(m+p)}$$

vereinigen.

3) Wenn $m+\pi=0$, erhält man die Terme

$$(-1)^m(2i+\pi), \qquad (-1)^m.$$

Die Werthe, welche in denselben m und π annehmen können, sind

$$m=1,\ \pi=-1;\quad m=3,\ \pi=-3;\ ..\quad m=2i-1,\ \pi=-(2i-1).$$

Hieraus folgt

$$\Sigma(-1)^m(2i+\pi)=-\{2i-1+2i-3+..+1\}=-ii,$$
$$\Sigma(-1)^m=-i.$$

Vereinigt man alle bisher gefundenen Resultate, so erhält man

$$Q_i=-ii+2\Sigma\psi(m)q^{2m}+2\Sigma\Sigma(-1)^m pq^{m(m+p)},$$
$$Z_i=-i.$$

Es ist daher der eine Satz, dafs $Z_i=-i$, bewiesen. Um auch $Q_i=-ii$ zu erhalten, was der andere zu beweisende Satz war, mufs noch gezeigt werden, dafs

$$-\Sigma\Sigma(-1)^m pq^{m(m+p)}=\Sigma\Sigma(-1)^{m+p}pq^{m(m+p)}=\Sigma\psi(m)q^{2m}$$

ist.

Die vorstehende Formel, welche allein noch zu beweisen übrig blieb, kommt mit dem folgenden Satze überein *):

---

*) Es ist nämlich

$$(-1)^{m+p}p=(-1)^{m+p}(m+p)+(-1)^m m.$$

Wenn die Zahl $m(m+p)$, welche jeden beliebigen positiven geraden Werth haben kann, gegeben ist, und man dieselbe auf irgend eine Art in zwei Factoren zerfällt, von denen der eine gerade, der andere ungerade ist, so hat man für $m+p$ den gröfseren, für m den kleineren dieser beiden Factoren zu setzen. Es wird daher in der Doppelsumme der Coëfficient von $q^{m(m+p)}$ oder $\Sigma(-1)^{m+p}p$ gleich der Summe aller dieser Factoren von $m(m+p)$, wenn man jeden Factor positiv oder negativ nimmt, je nachdem er gerade oder ungerade ist.

Wenn man eine gegebne gerade Zahl auf alle mögliche Arten in zwei Factoren zerfällt, von denen der eine ungerade, der andere gerade ist, so ist die Summe der geraden weniger der Summe der ungeraden Factoren gleich der Factorensumme der Hälfte der gegebnen Zahl.

Der Beweis dieses Satzes ist sehr leicht. Es sei nämlich die gerade Zahl $2^i N$, wo N ungerade; es sei ν die Factorensumme von N, so ist $(2^i-1)\nu$ die Factorensumme der halben Zahl oder von $2^{i-1}N$. Zerfällt man aber die gegebene Zahl $2^i N$ auf alle mögliche Arten in zwei Factoren, von denen der eine ungerade ist, so ist der andere immer durch 2^i theilbar, also die Summe dieser letztern $2^i\nu$, während ν die Summe der ungeraden Factoren ist. Die Differenz beider ist also $(2^i-1)\nu$ oder die Factorensumme von $2^{i-1}N$, w. z. b. w.

Die vorstehende Untersuchung giebt eine unmittelbare Verification der beiden Gleichungen (6.) oder (5.) oder der Gleichungen:

$$9.\quad q(z+z^{-1})-4q^4(z^2+z^{-2})+9q^9(z^3+z^{-3})-\text{etc.}$$
$$=\{1-q(z+z^{-1})+q^4(z^2+z^{-2})-q^9(z^3+z^{-2})+\text{etc.}\}$$
$$\times\Sigma\left\{2\psi(m)q^{2m}+\frac{q^m(1+q^{2m})}{(1-q^{2m})^2}(z^m+z^{-m})\right\},$$

$$10.\quad q(z-z^{-1})-2q^4(z^2-z^{-2})+3q^9(z^3-z^{-3})-\text{etc.}$$
$$=\{1-q(z+z^{-1})+q^4(z^2+z^{-2})-q^9(z^3+z^{-3})+\text{etc.}\}$$
$$\times\Sigma\frac{q^m}{1-q^{2m}}(z^m-z^{-m}),$$

in welchen m jede beliebige ganze positive Zahl, die Null ausgeschlossen, bedeutet. Da sich aus den Gleichungen (5.),

$$-q\frac{\partial S}{\partial q}=SP,\qquad -z\frac{\partial S}{\partial z}=SR,$$

wenn man für P und Q die Ausdrücke

$$-q\frac{\partial\log\Pi}{\partial q}=P,\qquad -z\frac{\partial\log\Pi}{\partial z}=R$$

setzt, die in den *Fundamentis* auf doppelte Art bewiesene Formel $S=\Pi$ ergiebt, so kann das Vorstehende auch als ein dritter Beweis dieser Fundamentalformel betrachtet werden.

Aus der Natur der Reihe S folgt die Gleichung

$$11.\quad q\frac{\partial S}{\partial q}=\frac{z\partial\cdot z\frac{\partial S}{\partial z}}{\partial z}.$$

Substituirt man hierin die Gleichungen

$$-q\frac{\partial S}{\partial q} = SP, \qquad -z\frac{\partial S}{\partial z} = SR,$$

so ergiebt sich

$$SP = \frac{z\partial\cdot SR}{\partial z} = S\frac{z\partial R}{\partial z} + R\frac{z\partial S}{\partial z} = S\frac{z\partial R}{\partial z} - SR^2.$$

Die Gleichung $SP = \frac{z\partial\cdot SR}{\partial z}$ läfst sich mittelst der oben bewiesnen $-ii = Q_i = iZ_i$ verificiren, da man

$$SP = \Sigma(-1)^i q^{ii} Q_i z^i, \qquad SR = \Sigma(-1)^i q^{ii} Z_i z^i$$

hat. Aus der vorstehenden Gleichung ergiebt sich ferner, wenn man durch S dividirt,

$$12. \quad R^2 = \frac{z\partial R}{\partial z} - P,$$

das ist, wenn man für P und R die Ausdrücke (2.) und (3.) setzt,

$$\left\{\Sigma\frac{q^m}{1-q^{2m}}(z^m - z^{-m})\right\}^2 = \Sigma\left\{\left(\frac{(m-1)q^m}{1-q^{2m}} - \frac{2q^{3m}}{(1-q^{2m})^2}\right)(z^m + z^{-m}) - 2\psi(m)q^{2m}\right\}.$$

Von dieser Formel findet man eine unmittelbare Verification in den Fundamentis S. 136. Es ist aber von besonderem Interesse, alle solche Formeln der Theorie der elliptischen Functionen hervorzuheben, welche sich auf Identitäten zurückführen lassen, die unmittelbar, d. i. ohne Hülfe anderweitiger analytischer Sätze eingesehen werden können, indem man dadurch ein Mittel erhält, neue Methoden zu gewinnen. So hat der unmittelbare Beweis der Formel

$$\left\{\frac{\sqrt{q}(z-z^{-1})}{1-q} + \frac{\sqrt{q^3}(z^3-z^{-3})}{1-q^3} + \frac{\sqrt{q^5}(z^5-z^{-5})}{1-q^5} + \text{etc.}\right\}^2$$
$$= \frac{q(z-z^{-1})^2}{1-q^2} + \frac{2q^2(z^2-z^{-2})^2}{1-q^4} + \frac{3q^3(z^3-z^{-3})^2}{1-q^6} + \text{etc.},$$

welchen ich in den Fundamentis S. 110 gegeben habe, zu einer neuen arithmetischen Methode geführt, aus den für die Zusammensetzungen der Zahlen aus *zwei* Quadraten bekannten Sätzen sowohl den bekannten Satz über die Zusammensetzbarkeit aller Zahlen aus *vier* Quadraten als auch neue Sätze über die *Anzahl* der Zusammensetzungen einer Zahl aus vier Quadraten abzuleiten.

3.

Über die partielle Differentialgleichung, welcher die Zähler und Nenner der elliptischen Functionen Genüge leisten.

(Von Herrn Prof. *C. G. J. Jacobi.*)

Es sei $k'k' = 1-k^2$, $\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)} = \Delta$ und

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta} = u, \quad \int_0^\varphi \Delta\, d\varphi = E(u),$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\Delta} = K, \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \Delta\, d\varphi = E,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k'k'\sin^2\varphi)}} = K', \quad e^{-\frac{\pi K'}{K}} = q,$$

$$\Theta = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}\,\Delta\, e^{\int_0^u E(u)du - \frac{1}{2}\frac{Eu^2}{K}},$$

endlich

$$u = \frac{2Kx}{\pi}.$$

In den „Fundamentis Theoriae F. Ell." habe ich gezeigt, dafs die elliptischen Functionen $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, Δ Brüche sind, deren Zähler und Nenner sich durch die Transcendente Θ darstellen lassen, welche selber sich in die Reihe

$$1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+ \text{etc.} = \Theta$$

entwickeln läfst. Jeder Term dieser Reihe und daher die ganze Reihe selbst genügt der partiellen Differentialgleichung

$$-4q\frac{\partial\Theta}{\partial q} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}.$$

Diese partielle Differentialgleichung mufs sich, ohne dafs man die Reihenentwicklung von Θ kennt, unmittelbar auch aus den aufgestellten Definitionen ergeben. Es kann die Frage entstehen, ob man nicht zu solchen einfachen partiellen Differentialgleichungen durch Einführung analoger Gröfsen auch für complicirtere Transcendenten gelangen könne. Ich werde daher, um aus den obigen Definitionen die partielle Differentialgleichung, welcher Θ Genüge leistet,

abzuleiten, statt von dem Integral u von dem allgemeineren Integral

$$\int t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-rt)^{-\alpha}dt$$

ausgehen welches sich für

$$\alpha=\beta=\tfrac{1}{2},\quad \gamma=1,\quad r=k^2,\quad t=\sin^2\varphi$$

auf $2u$ reducirt, und nur schliefslich, wenn die weitere Fortführung der Rechnung es erfordert, für α, β, γ die angegebnen besondern Werthe setzen.

Es sei für Werthe von α und β, welche zwischen 0 und 1 liegen, und für $\gamma>\beta$,

$$Y=\int_0^t t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-rt)^{-\alpha}dt,\qquad y=\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-rt)^{-\alpha}dt,$$

wo y die von *Euler*, *Pfaff*, *Gaufs*, *Kummer* und andern vielfach behandelte Transcendente ist. Man hat für die beiden Transcendenten Y und y die Differentialgleichungen:

$$(r-rr)Y''+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)r\}Y'-\alpha\beta Y=-\alpha t^{\beta}(1-t)^{\gamma-\beta}(1-rt)^{-\alpha-1},$$
$$(r-rr)y''+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)r\}y'-\alpha\beta y=0,$$

in denen, wie auch im Folgenden, durch die obern Indices die nach r für ein constantes t genommenen Differentialquotienten angedeutet werden. Setzt man

$$R=r^{\gamma}(1-r)^{\alpha+\beta+1-\gamma},\qquad T=t^{\beta}(1-t)^{\gamma-\beta},$$

so kann man diese Gleichungen auch so darstellen:

$$RY''+R'Y'-\alpha\beta\frac{YR}{r-rr}=-\alpha\frac{TR(1-rt)^{-\alpha-1}}{r-rr},$$

$$Ry''+R'y'-\alpha\beta\frac{yR}{r-rr}=0.$$

Nennt man z ein zweites Integral der Gleichung, welcher y genügt, so hat man auch

$$Rz''+R'z'-\alpha\beta\frac{zR}{r-rr}=0.$$

Ein solches Integral ist

$$z=\int_1^{\frac{1}{r}} t^{\beta-1}(t-1)^{\gamma-\beta-1}(1-rt)^{-\alpha}dt=r_1^{\gamma-\alpha-\beta}\int_0^1 t^{\gamma-\beta-1}(1-t)^{-\alpha}(1-r_1t)^{\alpha-\gamma}dt,$$

wo $r_1=1-r$. Aus den vorstehenden Differentialgleichungen folgt, wenn man

$$\frac{Y}{y}=v,\qquad \frac{z}{y}=l,\qquad Z=\int\frac{(1-rt)^{-\alpha-1}yR\,dr}{r-rr}$$

setzt, und c eine Constante bedeutet,

$$Rv' = -\alpha\frac{TZ}{yy}, \quad Rl' = \frac{c}{yy} \quad \text{oder} \quad \frac{c\,dr}{R} = yy\,dl.$$

Wenn man statt r die Gröfse l als unabhängige Variable einführt, so wird das vollständige Differential von v durch die Gleichung

$$dv = \frac{1}{y}\frac{\partial Y}{\partial t}dt + v'dr = \frac{T}{y}(1-rt)^{-\alpha}\frac{dt}{t-tt} - \frac{\alpha}{c}TZdl$$

gegeben. Betrachtet man v und l als die beiden unabhängigen Variabeln, und unterscheidet die unter dieser Annahme abgeleiteten partiellen Differentialen durch Klammern, so geben die vorstehenden Formeln:

$$\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right) = \frac{1}{\frac{\partial v}{\partial t}} = \frac{y(t-tt)(1-rt)^{\alpha}}{T},$$

$$\left(\frac{\partial t}{\partial l}\right) = \frac{\alpha}{c}\cdot y(t-tt)(1-rt)^{\alpha}.Z = \frac{\alpha TZ}{c}\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right),$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial l}\right) = \frac{1}{c}yyR.$$

Ist eine Function V in r und t gegeben, und man ersetzt die Variabeln r und t durch l und v, so wird

$$\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right) = \frac{\partial V}{\partial t}\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right),$$

und zufolge der vorstehenden Formeln das nach l genommene Differential,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial l}\right) = \frac{\partial V}{\partial t}\left(\frac{\partial t}{\partial l}\right) + \frac{\partial V}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial l}\right)$$
$$= \frac{\alpha TZ}{c}\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right) + \frac{yyR}{c}\frac{\partial V}{\partial r}.$$

Nimmt man für V die Function

$$V = \tfrac{1}{2}\alpha TZ = -\tfrac{1}{2}Ryyv' = \tfrac{1}{2}R(y'Y - yY'),$$

so wird

$$\left(\frac{\partial V}{\partial l}\right) = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial.VV}{\partial v}\right) + \frac{\alpha yyTR}{2c}\frac{\partial Z}{\partial r} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial\cdot VV}{\partial v}\right) + \frac{\alpha}{2c}\frac{y^2RR}{r-rr}T(1-rt)^{-\alpha-1}.$$

Es ist ferner

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right) = y, \quad \left(\frac{\partial Y'}{\partial v}\right) = \frac{\alpha t}{1-rt}\left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right) = \frac{\alpha ty}{1-rt},$$

woraus

$$\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right) = \tfrac{1}{2}\gamma R\left(y' - \frac{\alpha t y}{1-rt}\right)$$

folgt, und hieraus

$$-\left(\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}\right) = \frac{\alpha y^2 R}{2(1-rt)^2}\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right) = \tfrac{1}{2}\alpha y^3 R\frac{(t-tt)(1-rt)^{\alpha-2}}{T}.$$

Durch Combination aller dieser Formeln ergiebt sich

$$\left(\frac{\partial V}{\partial l}\right) - \frac{1}{c}\left(\frac{\partial\cdot VV}{\partial v}\right) = -\frac{1}{c}\,\frac{R}{r-rr}\,\frac{TT}{t-tt}(1-rt)^{-2\alpha+1}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}\right).$$

Man hat daher, wenn man $l = c\lambda$ setzt, in Bezug auf die hier betrachtete allgemeinere Transcendente Y den folgenden Satz:

Es sei

$$Y = \int_0^t t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-rt)^{-\alpha}dt,$$

$$y = \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-rt)^{-\alpha}dt,$$

$$\lambda = \int r^{-\gamma}(1-r)^{\gamma-\alpha-\beta-1}yy\,\partial r, \qquad v = \frac{Y}{y},$$

$$V = \tfrac{1}{2}r^{\gamma}(1-r)^{\alpha+\beta-\gamma+1}\left(Y\frac{\partial y}{\partial r} - y\frac{\partial Y}{\partial r}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\alpha t^{\beta}(1-t)^{\gamma-\beta}\int r^{\gamma-1}(1-r)^{\alpha+\beta-\gamma}(1-rt)^{-\alpha-1}y\,\partial r,$$

so genügt V, als Function von v und λ betrachtet, der partiellen Differentialgleichung,

$$0 = \frac{\partial V}{\partial\lambda} - 2V\frac{\partial V}{\partial v} + r^{\gamma-1}(1-r)^{\alpha+\beta-\gamma}t^{2\beta-1}(1-t)^{2\gamma-2\beta-1}(1-rt)^{-2\alpha+1}\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}.$$

In dieser Gleichung sind die Gröfsen t und r aufser in λ und v noch explicite enthalten, aber nur in einem einzigen in $\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}$ multiplicirten Factor. Ich will jetzt zu dem besondern Falle der elliptischen Integrale übergehen, in welchem dieser Factor der Einheit gleich wird.

Setzt man nämlich in den vorstehenden Formeln

$$\gamma = 1, \qquad \alpha = \beta = \tfrac{1}{2},$$

so wird

$$R = r - rr, \qquad TT = t - tt, \qquad (1-rt)^{-2\alpha+1} = 1,$$

und es verwandelt sich daher die zuletzt gefundne Gleichung in die folgende:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial l}\right) = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial\cdot VV}{\partial v}\right) - \frac{1}{c}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}\right).$$

Man setze

$$\int V dv = W,$$

so giebt die Integration dieser Gleichung nach v,

$$c\left(\frac{\partial W}{\partial l}\right) = \left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial v^2}\right).$$

Wenn das Integral, durch welches W definirt wird, von 0 an genommen wird, so mufs man zu demselben solche Function von l oder r addiren, dafs für $v = 0$ oder, was dasselbe ist, für $t = 0$ die vorstehende Gleichung erfüllt wird. Für $t = 0$ verschwindet Y und daher auch Y', und es wird daher

$$\left(\frac{\partial W}{\partial v}\right) = V = 0;$$

ferner erhält man aus dem oben angegebnen Werthe von $\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)$ für $t = 0$,

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial v^2}\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right) = \tfrac{1}{2} R \gamma \gamma'.$$

Setzt man daher

$$\int_0^v V dv + W^0 = W,$$

so mufs W^0 die Gleichung

$$c\left(\frac{\partial W^0}{\partial l}\right) = \gamma\gamma R \frac{\partial W^0}{\partial r} = -\tfrac{1}{2} R \gamma \gamma'$$

erfüllen, woraus

$$W^0 = -\log\sqrt{\gamma}$$

folgt. Setzt man endlich

$$\Omega = e^{-W} = \sqrt{\gamma}\, e^{-\int_0^v V dv},$$

so erhält die partielle Differentialgleichung, zu welcher man gelangt war, die einfache Form,

$$-c\left(\frac{\partial \Omega}{\partial l}\right) = \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial v^2}\right).$$

Es ist aber in dem hier betrachteten besondern Fall

$$Y = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(t(1-t)(1-rt))}}, \qquad \gamma = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(t(1-t)(1-rt))}},$$

und daher, wenn man

$$r = k^2, \qquad t = \sin^2\varphi$$

setzt, und den Gröfsen u, K, K' etc. die ihnen oben beigelegte Bedeutung giebt,

$$Y = 2u, \quad v = \frac{u}{K} = \frac{2x}{\pi}, \quad R = k^2 k'^2.$$

Die Differentialgleichung zweiter Ordnung, welcher K genügt, hat auch die Lösung K'; man kann daher

$$z = 2K'$$

setzen, woraus

$$l = \frac{z}{y} = \frac{K'}{K} = -\frac{1}{\pi}\log q$$

folgt. Die Constante c hat man aus der Gleichung $\frac{c\,dr}{R} = y^2\,dl$ oder

$$\frac{c\,d\cdot k^2}{k^2 k'^2} = -\frac{4}{\pi} KK\,d\log q$$

zu bestimmen. Für unendlich kleine Werthe von k wird nach einem Satze *Eulers* in den Opusc. V. A. $\frac{\pi K'}{2K} = \log\frac{4}{k}$, also $k^2 = 16q$, und daher

$$c = -\pi.$$

Substituirt man die Werthe $l = -\frac{1}{\pi}\log q$, $v = \frac{2x}{\pi}$, $c = -\pi$ in die für Ω gefundne partielle Differentialgleichung, so wird dieselbe

$$-4q\frac{\partial\Omega}{\partial q} = \frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}.$$

Ich will jetzt zeigen, dafs die Function Ω von der oben mit Θ bezeichneten Transcendente nur um einen constanten Factor verschieden ist.

Aus der Formel

$$\tfrac{1}{2}Y = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}$$

ergiebt sich, wenn man nach $r = k^2$ differentiirt,

$$Y' = \int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)^3}}.$$

Es ist aber

$$k^2 d\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta} = \left(-\frac{k'k'}{\Delta^3} + \Delta\right)d\varphi,$$

und daher

$$k^2 Y' = \int_0^\varphi \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{\Delta}\right)d\varphi = \frac{1}{k'k'}E(u) - u - \frac{k^2}{k'k'}\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}.$$

Hieraus folgt, wenn man $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ setzt,

$$k^2 y' = \frac{1}{k'k'}E - K,$$

und daher

$$\tfrac{1}{2}k^2(y'Y - yY') = \frac{-1}{k'k'}(KE(u) - E.u) + \frac{k^2K}{k'k'}\cdot\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}.$$

Man hat daher nach einander die Formeln

$$-V = \frac{-1}{2}k^2k'^2(y'Y - yY') = KE(u) - E.u - \frac{k^2K\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta},$$

$$-\int_0^v V dv = \frac{-1}{K}\int_0^u V du = \int_0^u E(u)du - \tfrac{1}{2}\frac{E.u^2}{K} + \log\Delta,$$

$$\Omega = \sqrt{(2K)}e^{-\int_0^v V dv} = \sqrt{(2K)}\Delta e^{\int_0^u E(u)du - \frac{Eu^2}{K}} = \sqrt{\pi}.\Theta,$$

w. z. b. w.

Die Transcendente $\Theta = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Omega$ genügt derselben partiellen Differentialgleichung wie Ω oder der Gleichung

$$-4q\frac{\partial\Theta}{\partial q} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2},$$

welche sich aus der Reihenentwicklung von Θ unmittelbar ergab. Umgekehrt kann man mittelst dieser partiellen Differentialgleichung die Reihenentwicklung von Θ finden. Wenn α positiv ist, wird für $t = \frac{1}{r}$ sowohl V als $\int V\partial v$ unendlich und demgemäfs Θ verschwinden. Für $t = \frac{1}{r}$ erhält man ferner, wenn man für z den oben angegebnen Werth setzt,

$$Y = y + (-1)^{\gamma-\beta-1}z, \quad v = 1 + (-1)^{\gamma-\beta-1}l,$$

und daher

$$u = K + K'\sqrt{-1}, \quad x = \frac{\pi u}{2K} = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\log q\sqrt{-1}.$$

Vermöge der partiellen Differentialgleichung erhält die für Θ anzunehmende Reihe die Form

$$A + A_1 q\cos 2x + A_2 q^4\cos 4x + A_3 q^9\cos 6x + \text{etc.},$$

wo A, A_1, A_2, etc. Zahlencoëfficienten sind, und es giebt die Bedingung, dafs diese Reihe für $x = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\log q\sqrt{-1}$ verschwinden soll, die Werthe

$$A = A_1 = A_2 .. = 1.$$

Die hierbei gemachte Voraussetzung, dafs eine Entwicklung von Θ nach den Cosinus der geraden Vielfachen von x für jeden reellen oder imaginären Werth von x gültig bleibt, rechtfertigt sich durch den Erfolg.

Die vorstehenden Betrachtungen lehren, dafs man aus der Definition der Function Θ durch geschlofsne Integralausdrücke die merkwürdige Reihenentwicklung dieser Transcendente mittelst allgemeiner Methoden, ohne einen der Theorie der elliptischen Functionen eigenthümlichen Satz zu kennen, ableiten kann. Die weitere Verfolgung dieser Betrachtungen und die Untersuchung, wie weit sie auf die allgemeinere Transcendente Y Anwendung finden, behalte ich einer andern Gelegenheit vor.

October 1847.

4.

Einfacher Beweis des vom Hrn. Geh. Hofrath Schweins im 32. Bande dieses Journals No. 25. mitgetheilten statischen Satzes.

(Von Herrn Prof. *A. F. Möbius* in Leipzig.)

Zwei nicht in einer Ebene wirkende Kräfte p, q lassen sich in ein Kräftepaar und in eine einzelne nicht in der Ebene des Paares enthaltene Kraft verwandeln. Heifse t die einzelne Kraft, und u, v seien die Kräfte des Paares. Weil hiernach p, q mit t, u, v gleiche Wirkungen haben sollen, so mufs die Summe der auf irgend eine Axe bezogenen Momente von p, q der Summe der Momente der auf dieselbe Axe bezogenen Momente von t, u, v gleich sein. Schneide nun eine mit der Ebene des Paares u, v parallel gelegte Ebene die Richtungen p, q, t resp. in P, Q, T und werde die Gerade PQ zur Axe genommen, so sind die Momente p und q einzeln Null, weil p sowohl als q von PQ geschnitten wird. Da ferner ein Kräftepaar in der Ebene, in welcher es wirkt, ohne Änderung seiner Wirkung beliebig verlegt werden kann, und weil PQ, als eine Gerade, die in einer mit der Ebene des Paares parallelen Ebene liegt, mit ersterer Ebene gleichfalls parallel ist, so können wir die Kräfte u, v des Paares parallel mit PQ annehmen. Alsdann aber sind die auf PQ bezogenen Momente von u und v, jedes für sich, ebenfalls Null. Mithin mufs auch das auf PQ bezogene Moment von t Null sein; folglich mufs t mit PQ in einer Ebene liegen, und folglich T ein Punct der PQ sein.

Werden demnach *die Kräfte p, q in ein Kräftepaar und eine einzelne Kraft t verwandelt, so liegen die Puncte P, Q, T, in welchen p, q, t von irgend einer mit der Ebene des Paares parallelen Ebene geschnitten werden, in einer Geraden.*

Unter den unendlich vielen Arten, auf welche diese Verwandlung möglich, giebt es bekanntlich eine, bei welcher die Ebene des Paares auf t normal ist. Die Lage, welche alsdann t hat, werde mit τ bezeichnet und heifse, wie in dem Aufsatze des Herrn *Schweins*, die *Hauptdrehlinie* des Systems der Kräfte p, q (so wie jedes andern Systems von Kräften, welches auf p, q reducirbar ist). Für diesen besondern Fall lautet der vorige Satz also:

Die Puncte T, P, Q, in denen die Hauptdrehlinie τ eines Systems von Kräften und die zwei Kräfte p, q, auf welche das System reducirbar ist, von einer auf τ normalen Ebene geschnitten werden, liegen in einer Geraden; oder mit andern Worten: *eine die p und q schneidende und auf τ normale Gerade schneidet auch die τ.*

Von hier bis zu dem Satze des Herrn *Schweins* ist jetzt nur ein Schritt noch übrig. Diejenige Gerade nämlich, welche p und q zugleich rechtwinklig schneidet und folglich auf jeder mit p und q zugleich parallelen Ebene normal ist, ist auch auf τ normal, weil p, q, τ einer und derselben Ebene parallel sind. Wir schliefsen daher:

Hat ein System von Kräften zwei nicht in einer Ebene wirkende Kräfte zu Resultanten, so wird von der Geraden, welche diese zwei Kräfte rechtwinklig schneidet, auch die Hauptdrehlinie des Systems rechtwinklig geschnitten.

Dafs übrigens p, q und τ oder die Richtung von t einer und derselben Ebene parallel sind, erhellet sogleich daraus, dafs die Gleichheit der Wirkung zwischen p, q einerseits und t, u, v andererseits auch noch bestehen mufs, wenn die fünf Kräfte, parallel mit ihren Richtungen, an einen und denselben Punct getragen werden. Denn alsdann heben sich u und v, als zwei einander gleiche und direct entgegengesetzte Kräfte, gegen einander auf, und es müssen folglich p und q mit t gleiche Wirkung haben, folglich p, q, t in einer Ebene begriffen sein, folglich u. s. w.

5.

Über die phoronomische Deutung des Taylorschen Theorems.

(Von Herrn Prof. *Möbius* in Leipzig.)

(Aus den Berichten über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig.)

Bedeute Ft eine beliebige Function der Veränderlichen t, und seien t_1 und t_2 zwei bestimmte Werthe von t, so ist nach *Taylor:*

$$Ft_2 - Ft_1 = F(t_1 + t_2 - t_1) - Ft_1$$
$$= (t_2 - t_1)F't_1 + \tfrac{1}{2}(t_2 - t_1)^2 F''t_1 + \frac{1}{2.3}(t_2 - t_1)^3 F'''t_1 + \ldots,$$

worin $F't_1$, $F''t_1$, $F'''t_1$, u. s. w. die Werthe von $\frac{dFt}{dt}$, $\frac{d^2Ft}{dt^2}$, $\frac{d^3Ft}{dt^3}$, u. s. w. für $t = t_1$ bezeichnen.

Sei nun t die von einer gewissen Epoche an gerechnete Zeit, also Ft irgend eine im Verlaufe der Zeit sich ändernde Gröfse. Alsdann ist $Ft_2 - Ft_1$ die Änderung von Ft während der von $t = t_1$ bis $t = t_2$ verfliefsenden Zeit; $F't_1$ aber, oder die durch dt dividirte Änderung von Ft während des auf t_1 folgenden dt, ist nichts anderes, als die Geschwindigkeit, mit welcher sich Ft am Ende der Zeit t_1 ändert. Eben so ist $F''t_1$, oder der Werth von $\frac{dF't}{dt}$ für $t = t_1$, die Geschwindigkeit, mit welcher sich $F't$ zu derselben Zeit ändert; $F'''t_1$ die Geschwindigkeit der Änderung von $F''t$ zu derselben Zeit; u. s. w.

Wir wollen hiernach die aus Ft abgeleiteten Functionen $F't$, $F''t$, $F'''t$, u. s. w. die erste, zweite, dritte, u. s. w. Geschwindigkeit von Ft nennen, so dafs die $(m+1)$te Geschwindigkeit von Ft diejenige ist, mit welcher sich die $m$te Geschwindigkeit ändert.

Das anschaulichste Beispiel giebt uns ein in einer geraden Linie nach einem gewissen Gesetze sich bewegender Punct P. Bestehe dieses Gesetz darin, dafs am Ende der Zeit t der Abstand des P von dem zum Anfange der Linie genommenen Puncte, welcher A heifse, $= Ft$ ist, und seien P_1, P_2

die Örter von P am Ende von t_1 und von t_2, so wird

$$Ft_2 - Ft_1 = AP_2 - AP_1 = P_1 P_2,$$

und daher, wenn wir die Endpuncte der Zeitlängen t_1 und t_2 mit T_1 und T_2 bezeichnen und die erste, zweite, dritte u. s. w. Geschwindigkeit, mit welcher sich AP zur Zeit T_1 ändert, v_1', v_1'', v_1''', u. s. w. nennen:

$$P_1 P_2 = T_1 T_2 \cdot v_1' + \tfrac{1}{2} T_1 T_2^2 \cdot v_1'' + \frac{1}{2 \cdot 3} T_1 T^3 \cdot v_1''' + \ldots;$$

wobei nur noch zu bemerken, dafs, weil die erste Geschwindigkeit, mit welcher sich AP ändert, offenbar mit der Geschwindigkeit von P selbst einerlei ist, auch die folgenden Geschwindigkeiten von AP mit den gleichvielten von P identisch sind.

Es ist leicht einzusehen, dafs diese Formel für die Länge des während $T_1 T_2$ zurückgelegten Weges auch dann noch Gültigkeit behält, wenn der Punct sich krummlinig bewegt, und wenn seine Geschwindigkeiten blofs aus der Gröfse der von ihm in den einzelnen Zeit-Elementen durchlaufenen Wege ohne Rücksicht auf deren sich alsdann fortwährend ändernde Richtung bestimmt werden. Es läfst sich aber die Formel, wenn die Bewegung nicht geradlinig ist, noch auf eine andere Weise deuten; so nämlich, dafs die Änderung, nicht blofs der Länge, sondern auch der Richtung des Weges mit in Betracht gezogen wird.

Bewege sich demnach der Punct P krummlinig; P_1 und P_2 seien die Örter von P in den Zeitpuncten T_1 und T_2, und A sei ein irgendwo angenommener ruhender Punct. Die gerade Linie AP wird alsdann eine im Verlaufe der Zeit ihre Länge und Richtung zugleich ändernde Linie, wenigstens im Allgemeinen, sein. Die Änderung von AP während $T_1 T_2$, als wodurch AP_1 in AP_2 übergeht, ist die gerade Linie $P_1 P_2$, indem dieselbe geometrisch, d. i. nicht blofs ihrer Länge, sondern auch ihrer Richtung nach, zu AP_1 addirt, die Linie AP_2 giebt. Um die Geschwindigkeit, mit welcher sich AP zur Zeit T_1 ändert, zu finden, setze man den Zeittheil $T_1 T_2$ unendlich klein, das $m$fache desselben $=$ der Zeit-Einheit, wo daher m eine unendlich grofse Zahl bezeichnet. Die Linie $P_1 P_2$ ist dann ebenfalls unendlich klein und giebt, wenn sie $m$mal nach einerlei Richtung an einander gesetzt wird, die verlangte Geschwindigkeit. Letztere wird daher durch eine Linie dargestellt, welche die Richtung $P_1 P_2$ und eine Länge $= m \cdot P_1 P_2$ hat, und ist folglich einerlei mit der Geschwindigkeit, welche P selbst zur Zeit T_1 hat.

Von einer geraden, ihre Länge und Richtung stetig ändernden Linie AP ist demnach, wenn ihr Anfangspunct A unverändert bleibt, die Geschwindigkeit, ihrer Änderung der Gröfse und Richtung nach, einerlei mit der Geschwindigkeit ihres Endpunctes P.

Es werden daher auch die zweite, dritte u. s. w. Geschwindigkeit von AP einerlei mit der ebensovielten Geschwindigkeit von P sein. Um diese höhern Geschwindigkeiten zu finden, lasse man zunächst einen Punct Q in Bezug auf einen ruhenden Punct B sich also bewegen, dafs die gerade Linie BQ stets gleich und gleichgerichtet mit der Geschwindigkeit von P ist; und es wird nach demselben Satze die Geschwindigkeit von Q ihrer Gröfse und Richtung nach = der Geschwindigkeit, mit welcher sich BQ, d. i. die Geschwindigkeit von P_1 ändert, also = der zweiten Geschwindigkeit von P sein. — Eben so wird, wenn man einem dritten Puncte R gegen einen ruhenden C eine solche Bewegung giebt, dafs die Linie CR stets gleich und gleichgerichtet mit der Geschwindigkeit von Q ist, die Geschwindigkeit von R = der zweiten Geschwindigkeit von Q, = der dritten Geschwindigkeit von P sein, u. s. w.; wobei nur noch bemerkt werden mag, dafs die zweite Geschwindigkeit von P, sowohl ihrer Richtung als Gröfse nach, einerlei mit der sogenannten beschleunigenden Kraft ist, durch welche die Bewegung von P hervorgebracht wird.

Es läfst sich nun leicht zeigen, dafs die Taylorsche Reihe in der ihr vorhin für die geradlinige Bewegung eines Puncts P gegebenen Form

$$P_1P_2 = T_1T_2 \cdot v_1' + \tfrac{1}{2} T_1T_2^2 \cdot v_1'' + \frac{1}{2\cdot 3} T_1T_2^3 \cdot v_1''' + \ldots.$$

auch für eine krummlinige Bewegung gilt, wenn man v_1', v_1'', v_1''', ..., d. i. die erste und die folgenden Geschwindigkeiten von P im Zeitpuncte T_1, auf die eben gezeigte Weise bestimmt und sie somit als gerade Linien von bestimmter Länge und Richtung darstellt. Wird nämlich die Zeitlänge T_1T_2, nach der als Zeit-Einheit festgesetzten Zeitlänge, als reine Zahl ausgedrückt, werden die Linien v_1', v_1'', ... resp. mit den Zahlen T_1T_2, $\frac{1}{2}T_1T_2^2$, ... multiplicirt und somit in andere verwandelt, welche dieselben Richtungen wie die erstern haben, deren Längen aber resp. das T_1T_2fache, das $\frac{1}{2}T_1T_2^2$fache, u. s. w. der Längen der erstern sind, und werden diese neuen Linien geometrisch addirt, d. h. parallel mit ihren Richtungen an einander gesetzt, jede folgende mit ihrem Anfangspuncte an den Endpunct der nächstvorhergehenden: so ist die geometrische Summe oder die gerade Linie, welche vom Anfangspuncte

J'ajouterai encore quelques mots rélatifs à la démonstration analytique du théorème de Mr. *Steiner*.

Soient $2a$, $2b$ les axes d'une ellipse, et x, y les coordonnées d'un point de la courbe; j'appellerai l'angle α *correspondant* quand il satisfait aux équations

$$x = a\cos\alpha, \quad y = b\sin\alpha.$$

Soient A, B, C, D quatre points d'une ellipse par lesquels on peut faire passer un cercle, et α, β, γ, δ les angles correspondants; alors on aura

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = \text{à un multiple de } 2\pi.$$

Ce théorème est très-utile, et sa démonstration n'offre point de difficultés. On peut déterminer par cette formule le point d'intersection D d'un cercle osculateur au point A, et de l'ellipse. On aura l'équation

$$3\alpha+\delta = 2n\pi,$$

n étant un nombre entier. Soit B un second point, et β l'angle correspondant; je suppose que le cercle osculateur au point B, passe également par D; alors on obtiendra l'équation

$$3\beta+\delta = 2m\pi,$$

donc

$$3(\beta-\alpha) = 2\pi(m-n),$$

ou bien

$$\beta = \alpha+\tfrac{1}{3}(m-n)2\pi = \alpha\pm\tfrac{2}{3}\pi+2c\pi.$$

Comme on peut faire abstraction des multiples de 2π, on a

$$\beta = \alpha\pm\tfrac{2}{3}\pi.$$

Donc, outre le point A, il y a deux autres points B, C qui correspondent aux angles

$$(1.)\quad \beta = \alpha+\tfrac{2}{3}\pi, \quad \gamma = \alpha-\tfrac{2}{3}\pi,$$

et dont les cercles osculateurs passent par un point D déterminé par l'angle

$$(2.)\quad \delta = 2n\pi-3\alpha.$$

La somme des équations (1.) et (2.) est

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = 2n\pi.$$

On voit par ce résultat, que les points A, B, C, D sont situés sur une circonférence de cercle.

L'ellipse est la projection orthogonale d'une circonférence de cercle, et ABC est la projection d'un triangle inscrit au cercle $A'B'C'$. Les équations (1.) font voir que le triangle $A'B'C'$ est équilatéral: donc le centre du cercle est le centre de gravité des points A', B', C', et le centre de la conique sera également le centre de gravité des points A, B, C.

Berlin 15 Nov. 1847.

6.

Démonstration d'un théorème de Mr. Steiner.

(Par Mr. *F. Joachimsthal* de Berlin.)

Mr. *Steiner* a publié (Tome 32, page 300), sans démonstration, le théorème suivant:

„Par un point quelconque D d'une ellipse passent trois circonférences de cercle, osculatrices à trois autres points A, B, C de la conique; les quatre points A, B, C, D sont situés sur une circonférence de cercle."

Je dis que le centre de gravité des trois points A, B, C coïncide avec le centre de l'ellipse.

On sait que les cordes communes d'un cercle et d'une conique font des angles égaux avec les axes, ou bien que les droites qui divisent en deux parties égales les angles formés par les cordes communes, sont parallèles aux axes; et réciproquement: les extrémités de deux cordes, également inclinées aux axes (sans être parallèles), sont sur une circonférence de cercle. Soient A, B, C trois points d'une ellipse dont le centre de gravité coïncide avec le centre de l'ellipse; alors la tangente en A est parallèle à BC. En effet, le diamètre qui passe par A, divisera BC en deux parties égales: donc BC est une droite conjuguée à ce diamètre, et parallèle à la tangente en A.

Soit D le quatrième point d'intersection de la conique et du cerle qui passe par A, B, C; alors les droites BC et AD seront également inclinées aux axes, et comme BC est parallèle à la tangente en A, cette tangente et la droite AD feront des angles égaux avec les axes.

Le cercle osculateur en A coupera la conique au point D': je dis que les deux points D et D' coïncident. Comme trois intersections du cercle osculateur et de l'ellipse sont réunies en A, la tangente en A et la corde AD' seront des cordes communes; donc, la tangente et AD' sont également inclinées aux axes; par conséquent D et D' coïncident, et le cercle osculateur en A passe par D; il en sera également des cercles osculateurs en B et C, c. q. f. d.

Comme les tangentes en A, B, C sont parallèles à BC, CA, AB, les normales en A, B, C sont les hauteurs du triangle ABC; donc elles se rencontrent au même point F. Soit D' le point diamétralement opposé à FD; alors la normale en D' passera également par F. (Tome 26, page 175, théorème 3.)

Soit A un point d'une parabole, D le point d'intersection du cercle osculateur en A et de la courbe; si y et y' sont les distances de A et D à l'axe, on aura l'équation

$$3y + y' = 0.$$

7.

Über die Differentialgleichung, welcher die Reihen

$1\pm 2q+2q^4\pm 2q^9+$ etc.,

$2\sqrt[4]{q}+2\sqrt[4]{q^9}+2\sqrt[4]{q^{25}}+$ etc.

Genüge leisten.

(Von Herrn Prof. *C. G. J. Jacobi.*)

Die Aufgabe, eine gegebene Function durch eine Differentialgleichung zu definiren, ist im Allgemeinen eine unbestimmte, weil man mittelst der Gleichung, welche zwischen der Function und der unabhängigen Variable Statt findet, die Differentialgleichung auf unendlich viel Arten abändern kann. Aber diese Aufgabe wird bestimmt, wenn die Function keine algebraische ist, die Differentialgleichung aber, wie stillschweigend vorausgesetzt zu werden pflegt, eine algebraische Gleichung zwischen der unabhängigen Variable, der Function und ihren Differentialquotienten sein soll. Unter allen Differentialgleichungen dieser Art, welchen dieselbe Function Genüge leistet, wird eine die niedrigste Ordnung haben, und die übrigen durch Differentiation ergeben. Von dieser soll allein im Folgenden die Rede sein, wenn man von der Differentialgleichung spricht, welcher eine Function Genüge leistet. Macht man diese Gleichung rational und befreit den Ausdruck, welcher $=0$ wird, von Brüchen, so bestimmt die Dimension, auf welche der höchste Differentialquotient in diesem Ausdrucke steigt, den *Grad* der Differentialgleichung.

Es giebt aber im Allgemeinen kein Mittel, um zu erkennen, ob es eine solche endliche Differentialgleichung zwischen der Function und der unabhängigen Variable giebt, oder wenn man irgend woher wüfste, dafs es eine solche giebt, um dieselbe aufzufinden. Nur wenn die Function einer *linearen* Differentialgleichung Genüge leistet, hat man einige allgemeine Vorschriften, dieses zu erkennen, und die Differentialgleichung selber zu bilden. Wenn man z. B. die Reihe

$$y = 1+2q+2q^4+2q^9+ \text{ etc.}$$

betrachtet, deren Bildungsgesetz so einfach ist, so giebt es doch trotz dieser Einfachheit kein Mittel, um *aus der Natur dieser Reihe selber* zu erkennen, ob sie durch eine endliche Differentialgleichung, d. h. durch eine algebraische

Gleichung zwischen ihr selbst, der unabhängigen Variable und ihren Differentialquotienten definirt werden kann. Und wenn es möglich ist, mit Hülfe der Theorie der elliptischen Functionen eine solche Differentialgleichung zu finden, wie complicirt und indirect sind die dazu nöthigen Betrachtungen! Man mufs zuerst zeigen, dafs man die beiden Gröfsen y und q durch eine dritte Variable k mittelst der transcendenten Gleichungen,

$$y = \sqrt{\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}\right\}},$$

$$\log\frac{1}{q} = \frac{\pi\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{(\cos^2\varphi+k^2\sin^2\varphi)}}}{\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}}$$

ausdrücken kann. Wie sehr man auch bei der Mannigfaltigkeit der Methoden, welche die Theorie der elliptischen Functionen darbietet, den Beweis dieses merkwürdigen Theorems abkürzen mag, so wird derselbe doch immer eine lange Kette subtiler Schlüsse erfordern. Man zeigt dann, dafs der Zähler sowohl wie der Nenner des für $\log\frac{1}{q}$ angegebnen Ausdrucks einer und derselben Differentialgleichung zweiter Ordnung, in welcher k die unabhängige Variable ist, genügen. Durch diesen Umstand wird es möglich, den Differentialquotient $\frac{\partial \log q}{\partial k}$ durch y und k auszudrücken, wodurch es ferner möglich wird, in der zwischen y und k Statt findenden Differentialgleichung zweiter Ordnung die nach k genommnen Differentialquotienten von y durch andere nach $\log q$ genommene zu ersetzen. Man gewinnt hierdurch eine Gleichung, aus welcher man k durch y und seine nach $\log q$ genommenen Differentialquotienten bestimmen kann. Durch eine neue Differentiation endlich erhält man mittelst Elimination von k eine blofs zwischen y und seinen nach q genommenen Differentialquotienten Statt findende Gleichung dritter Ordnung und zweiten Grades, welche die verlangte Differentialgleichung ist. Diese Differentialgleichung steigt in Bezug auf y und seine Differentialquotienten bis auf die *vierzehnte Dimension*, und sie dürfte daher trotz aller unserer Kenntnisse von den quadratischen Formen durch die unmittelbare Substitution der Reihe schwer zu beweisen sein. Ich will jetzt die etwas beschwerliche Rechnung näher angeben, durch welche man zu dieser Differentialgleichung gelangen kann, deren Complication in einem merkwürdigen Gegensatz zu der Einfachheit der Reihe steht, welche ihr genügt.

Die Substitution

$$\cos\psi = \frac{k'\sin\varphi}{\Delta},\qquad \sin\psi = \frac{\cos\varphi}{\Delta},\qquad \sqrt{(1-k^2\sin^2\psi)} = \frac{k'}{\Delta},$$

in welcher

$$k' = \sqrt{(1-k^2)},\qquad \Delta = \sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}$$

ist, giebt

$$\frac{d\psi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\psi)}} = \frac{d\varphi}{\Delta},$$

und daher die Gleichungen

$$1.\quad \begin{cases} \int \Delta\, d\varphi = k'^2 \int \frac{d\varphi}{\Delta^3}, \\ \int \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta} = \int \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\Delta^3}, \\ \int \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\Delta} = k'^2 \int \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta^3}, \end{cases}$$

wo die Integrale, so wie auch im Folgenden immer, von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ ausgedehnt gedacht werden. Bezeichnet man das ganze Integral der ersten Gattung mit

$$K = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}},$$

so hat man

$$kK = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(\frac{1}{k^2}-\sin^2\varphi\right)}},\qquad k'K = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(\frac{\cos^2\varphi}{k'^2}+\sin^2\varphi\right)}}.$$

Die Differentiation dieser drei Integrale nach k^2 ergiebt, wenn man die Formeln (1.) zu Hülfe nimmt, die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial\cdot k^2} &= \tfrac{1}{2}\int \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta^3} &&= \frac{1}{2k'^2}\int \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\Delta}, \\ \frac{\partial\cdot kK}{\partial\cdot k^2} &= \frac{1}{2k}\int \frac{d\varphi}{\Delta^3} &&= \frac{1}{2kk'^2}\int \Delta\, d\varphi, \\ \frac{\partial\cdot k'K}{\partial\cdot k^2} &= -\frac{1}{2k'}\int \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\Delta^3} &&= -\frac{1}{2k'}\int \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta}. \end{aligned}$$

Die letztere erhält man leicht, wenn man bemerkt, dafs $\partial.k^2 = -\partial.k'^2$.

Es ist ferner, wenn man wieder die Gleichungen (1.) zu Hülfe ruft,

$$\frac{\partial\cdot\int \frac{k^2\cos^2\varphi\, d\varphi}{\Delta}}{\partial\cdot k^2} = \frac{\partial\cdot\int \frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}\left(\frac{1}{\Delta}-\Delta\right)d\varphi}{\partial\cdot k^2} = \tfrac{1}{2}\int\left(\frac{\cos^2\varphi}{\Delta}+\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^3}\right)d\varphi = \tfrac{1}{2}\int\frac{d\varphi}{\Delta},$$

$$\frac{\partial\int \frac{1}{k}\Delta\, d\varphi}{\partial\cdot k^2} = \frac{\partial\cdot\int\sqrt{\left(\frac{1}{k^2}-\sin^2\varphi\right)}d\varphi}{\partial\cdot k^2} = -\frac{1}{2k^3}\int\frac{d\varphi}{\Delta},$$

$$\frac{\partial\int\frac{k^2}{k'}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta}}{\partial\cdot k^2} = \frac{\partial\int\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{\left(\frac{\cos^2\varphi}{k'^2}+\sin^2\varphi\right)}}}{\partial\cdot k'^2} - \frac{\partial\int\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{\left(\frac{\cos^2\varphi}{k'^2}+\sin^2\varphi\right)}d\varphi}{\partial\cdot k'^2}$$

$$= \frac{1}{2k'^3}\int\left\{\frac{k'^2\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta^3}+\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta}\right\} = \frac{1}{2k'^3}\int\frac{\partial\varphi}{\Delta}.$$

Setzt man daher

$$K = \tfrac{1}{2}\pi\cdot A, \quad kK = \tfrac{1}{2}\pi\cdot A_1, \quad k'K = \tfrac{1}{2}\pi\cdot A_2,$$

ferner

$$k^2\int\frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{\Delta} = \tfrac{1}{2}\pi\cdot B,$$

$$\frac{1}{k}\int\Delta\,d\varphi = \tfrac{1}{2}\pi\cdot B_1,$$

$$\frac{k^2}{k'}\int\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta} = \tfrac{1}{2}\pi\cdot B_2,$$

so wird

$$2. \quad \begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial\cdot k^2} = \dfrac{1}{2k^2k'^2}B, & \dfrac{\partial B}{\partial\cdot k^2} = \tfrac{1}{2}A; \\ \dfrac{\partial A_1}{\partial\cdot k^2} = \dfrac{1}{2k'^2}B_1, & \dfrac{\partial B_1}{\partial\cdot k^2} = -\dfrac{1}{2k^4}A_1; \\ \dfrac{\partial A_2}{\partial\cdot k^2} = -\dfrac{1}{2k^2}B_2, & \dfrac{\partial B_2}{\partial\cdot k^2} = \dfrac{1}{2k'^4}A_2. \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen zeigt, dafs A der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{\partial\cdot k^2k'^2\frac{\partial A}{\partial\cdot k^2}}{\partial\cdot k^2} = \tfrac{1}{2}A,$$

oder, wenn man der Kürze halber

$$\frac{\partial\cdot k^2}{k^2k'^2} = \partial\log\frac{k^2}{k'^2} = \partial l$$

setzt, der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 A}{\partial l^2} = \tfrac{1}{4}k^2k'^2A$$

Genüge leistet. Diese Differentialgleichung bleibt unverändert, wenn man k in k' verändert. Es ist daher auch

$$K' = \int\frac{d\varphi}{(1-k'^2\sin^2\varphi)}$$

ein Integral derselben. Aus den beiden Gleichungen

$$\frac{\partial^2 A}{\partial l^2} = \tfrac{1}{4}k^2k'^2A, \qquad \frac{\partial^2 K'}{\partial l^2} = \tfrac{1}{4}k^2k'^2K'$$

folgt

$$A\frac{\partial^2 K'}{\partial l^2} - K'\frac{\partial^2 A}{\partial l^2} = 0,$$

und durch Integration

$$A\frac{\partial K'}{\partial l} - K'\frac{\partial A}{\partial l} = \alpha,$$

wo α eine Constante ist. Diese Gleichung kann man auch so darstellen,

$$\frac{\partial\cdot\frac{K'}{A}}{\partial l} = \frac{\alpha}{A^2} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial\cdot\frac{K'}{A}}{\partial\cdot k^2} = \frac{\alpha}{k^2k'^2\cdot A^2}.$$

Der Bruch $\frac{1}{k'^2A^2} = \frac{\pi^2}{4k'^2K^2}$ läfst sich für kleine Werthe von k in eine nach den ganzen positiven Potenzen von k^2 fortschreitende, mit der Einheit beginnende Reihe entwickeln, woraus durch Integration folgt, dafs der Werth von $\frac{K'}{A} = \frac{\pi K'}{2K}$ für kleine Werthe von k bis auf Gröfsen von der Ordnung k^2 genau

$$\alpha \log k^2 + \beta$$

ist, wo β eine neue Constante bedeutet. Die Werthe von α und β hat ***Euler*** in den „Opusculis varii argumenti" $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \log 4$ gefunden. Substituirt man den Werth von α, und setzt

$$\log q = -\frac{\pi K'}{K} = -2\frac{K'}{A},$$

so erhält man

$$3. \quad \frac{\partial \log q}{\partial\cdot k^2} = \frac{1}{k^2k'^2A^2} = \frac{1}{k'^2A_1^2} = \frac{1}{k^2A_2^2},$$

oder auch

$$3^*. \quad \frac{\partial \log\frac{k^2}{k'^2}}{\partial \log q} = A^2, \qquad \frac{\partial \log\frac{1}{k'^2}}{\partial \log q} = A_1^2, \qquad \frac{\partial \log k^2}{\partial \log q} = A_2^2.$$

Wenn man mittelst der Formeln (3.) statt des Differentials $\partial\cdot k^2$ das Differential $\partial \log q$ einführt, so werden die Formeln (2.):

$$4. \quad \begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial \log q} = \tfrac{1}{2}BA^2, & \dfrac{\partial B}{\partial \log q} = \tfrac{1}{2}k^2k'^2A^3; \\[2ex] \dfrac{\partial A_1}{\partial \log q} = \tfrac{1}{2}B_1A_1^2, & \dfrac{\partial B_1}{\partial \log q} = -\tfrac{1}{2}\dfrac{k'^2}{k^4}A_1^3; \\[2ex] \dfrac{\partial A_2}{\partial \log q} = -\tfrac{1}{2}B_2A_2^2, & \dfrac{\partial B_2}{\partial \log q} = \tfrac{1}{2}\dfrac{k^2}{k'^4}A_2^3. \end{cases}$$

Man hat daher, wenn man

$$A = \frac{1}{C},\quad A_1 = \frac{1}{C_1},\quad A_2 = \frac{1}{C_2}$$

setzt, und die nach $\log q$ genommenen Differentialen der Functionen C mit obern Indices bezeichnet,

$$5.\quad 4C^3C'' = -k^2k'^2,\quad 4C_1^3C_1'' = \frac{k'^2}{k^4},\quad 4C_2^3C_2'' = -\frac{k^2}{k'^4}.$$

Ich bemerke jetzt, dafs wenn man in dem Ausdruck

$$\frac{\sqrt{(4h+1)}-1}{\sqrt{(4h+1)}+1}$$

für h die drei vorstehenden Gröfsen

$$-k^2k'^2,\quad \frac{k'^2}{k^4},\quad \frac{k^2}{k'^4}$$

setzt, die drei Gröfsen

$$-\frac{k^2}{k'^2},\quad k'^2,\quad k^2$$

erhalten werden. Dies sind zufolge (3*.) die Gröfsen, deren Logarithmen differentiirt die Differentiale $A^2\partial\log q$, $-A_1^2\partial\log q$, $A_2^2\partial\log q$ oder

$$\frac{\partial\log q}{C^2},\quad -\frac{\partial\log q}{C_1^2},\quad \frac{\partial\log q}{C_2^2}$$

geben. Es ist aber

$$\partial\log\frac{\sqrt{(4h+1)}-1}{\sqrt{(4h+1)}+1} = \frac{\partial h}{h\sqrt{(4h+1)}} = \frac{\partial\log h}{\sqrt{(4h+1)}}.$$

Substituirt man daher in $\frac{\partial\log h}{\sqrt{(4h+1)}}$ für h die drei Werthe (5.), so erhält man

$$\frac{\partial\log q}{C^2},\quad \frac{-\partial\log q}{C_1^2},\quad \frac{\partial\log q}{C_2^2}.$$

Hieraus ergiebt sich, dafs für alle drei Gröfsen C, C_1, C_2 dieselbe Differentialgleichung

$$6.\quad \partial\log\cdot C^3C'' = \sqrt{(16C^3C''+1)}\frac{\partial\log q}{C^2}$$

Statt findet, nur dafs man, wenn man C_1 für C setzt, die Quadratwurzel negativ zu nehmen hat. Macht man diese Gleichung rational, so ergiebt sich für alle drei Functionen

$$C = \frac{\pi}{2K},\quad C_1 = \frac{\pi}{2kK},\quad C_2 = \frac{\pi}{2k'K}$$

dieselbe Differentialgleichung dritter Ordnung und zweiten Grades,

$$7.\quad C^2(CC'''+3C'C'')^2 = C''^2(16C^3C''+1).$$

Wenn man

$$C = y^{-2}$$

setzt, und die nach $\log q$ genommenen Differentialquotienten von y wieder durch obere Indices bezeichnet, so erhält man nach einander

$$C' = -2y^{-3}y', \qquad C'' = -2y^{-3}y''+6y^{-4}y'^2,$$
$$C''' = -2y^{-3}y'''+18y^{-4}y'y''-24y^{-5}y'^3,$$

und daher

$$CC'''+3C'C'' = -2y^{-5}y'''+30y^{-6}y'y''-60y^{-7}y'^3.$$

Es verwandelt sich daher die Differentialgleichung (7.), wenn man noch mit $\frac{1}{4}y^{18}$ multiplicirt, in die folgende Differentialgleichung zwischen y und q,

$$8.\qquad (y^2y'''-15yy'y''+30y'^3)^2+32(yy''-3y'^2)^3 = y^{10}(yy''-3y'^2)^2.$$

In dieser Gleichung kann y, den drei Werthen von C entsprechend, jede der drei Functionen $\sqrt{\frac{2K}{\pi}}$, $\sqrt{\frac{2kK}{\pi}}$, $\sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}$ bedeuten. Wenn man daher die aus der Theorie der elliptischen Functionen bekannten, nach den Potenzen von q fortschreitenden Reihenentwicklungen dieser Functionen einführt, so erhält man das folgende Theorem:

Theorem.

Es bedeute y eine der drei Reihen

$$1\pm2q+2q^4\pm2q^9+2q^{16}\pm2q^{25}+\text{ etc.},$$
$$2\{\sqrt[4]{q}+\sqrt[4]{q^9}+\sqrt[4]{q^{25}}+\sqrt[4]{q^{49}}+\text{ etc.}\},$$

so findet zwischen y und q die folgende Differentialgleichung dritter Ordnung und zweiten Grades Statt, in welcher $d\log q$ ***als das constante Differential angenommen ist,***

$$\{y^2d^3y-15y\,dy\,d^2y+30dy^3\}^2+32\{y\,d^2y-3dy^2\}^3$$
$$= y^{10}\{y\,d^2y-3dy^2\}^2(d\log q)^2.$$

Die beiden der vorstehenden Differentialgleichung genügenden Reihen

$$1+2q+2q^4+2q^9+\ldots = \sqrt{\frac{2K}{\pi}},$$

$$1-2q+2q^4-2q^9+\ldots = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}},$$

werden aus einander durch Veränderung von q in $-q$ erhalten. Allgemeiner

kann man, da die Differentialgleichung (8.) nur die nach $\log q$ genommenen Differentiale und nicht q selber enthält, aus jedem für y gefundenen Ausdruck einen andern, welcher derselben Differentialgleichung Genüge leistet, erhalten, wenn man αq statt q setzt, wo α eine beliebige Constante bedeutet. Wenn man in der Reihe

$$2\sqrt[4]{q}\{1+q^2+q^6+q^{12}+q^{20}+\text{etc.}\} = \sqrt{\frac{2kK}{\pi}},$$

welche ebenfalls der Differentialgleichung (8.) genügt, die Variable q in $-q$ verwandelt, oder $\alpha = -1$ setzt, so wird diese Reihe mit einer 8ten Wurzel der Einheit multiplicirt. Die Differentialgleichung (8.) mufs daher so beschaffen sein, dafs sie unverändert bleibt, wenn man y mit einer 8ten Wurzel der Einheit multiplicirt, oder es müssen in den verschiedenen Termen der Gleichung (8.) die Unterschiede ihrer Dimensionen in Bezug auf y und seine Differentialquotienten durch 8 theilbar sein. Dies ist auch in der That der Fall, da in Bezug auf y und seine Differentialquotienten die Terme links vom Gleichheitszeichen in der Gleichung (8.) von der 6ten, die Terme rechts vom Gleichheitszeichen von der 14ten Dimension sind.

Die Gleichung

$$\partial \log q = \frac{\partial\cdot k^2}{k^2k'^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2} = \frac{\partial\cdot k^2}{k^2k'^2y^4}$$

bleibt unverändert, wenn man q in q^m und gleichzeitig y in $\frac{y}{\sqrt[4]{m}}$ (oder C in $\sqrt{m}C$) ändert. Hieraus folgt, *dafs aus jeder gegebenen Function, welche der Differentialgleichung* (8.) *Genüge leistet, eine andere erhalten wird, welche derselben Differentialgleichung genügt, wenn man die gegebene Function mit* $\sqrt[4]{m}$ *multiplicirt und gleichzeitig* q *in* q^m *ändert*. Es mufs daher in jedem Term der Differentialgleichung (8.) die Summe der Ordnungen der einzelnen Differentialquotienten weniger dem 4ten Theile seiner in Bezug auf y und die Differentialquotienten von y gemefsnen Dimension die gleiche Zahl geben, oder in je zwei verschiednen Termen die Differenz der Summe der Ordnungen der Differentialquotienten gleich dem vierten Theile des Unterschiedes ihrer Dimensionen sein. In der That ist in (8.) der 4te Theil des Unterschiedes der Dimensionen der Terme rechts und links vom Gleichheitszeichen $\frac{1}{4}(14-6) = 2$ und der Unterschied der Summe der Ordnungen ihrer Differentialquotienten ebenfalls $6-4 = 2$.

In der Theorie der Transformation der elliptischen Functionen wird gezeigt, dafs durch die Änderung von q in q^m, wenn m eine beliebige rationale Zahl ist, das ganze elliptische Integral K und daher auch $C=\frac{\pi}{2K}$ mit einem Factor, welcher eine algebraische Function von k ist, multiplicirt wird. Bedeutet daher g einen solchen Factor, so mufs dem Vorhergehenden zufolge der Differentialgleichung (7.), welcher C genügt, auch die Function $\frac{gC}{\sqrt{m}}$ genügen. Es giebt daher unendlich viele Fälle, in welchen zwei Integrale der Differentialgleichung (7.) aus einander durch Multiplication mit einer algebraischen Function von k erhalten werden. Wenn allgemein f einen Factor von der Beschaffenheit bedeutet, dafs $fC=\frac{\pi f}{2K}$ wieder ein Integral der Differentialgleichung (7.) wird, welcher C genügt, so findet man die zwischen diesem Factor f und dem Modul k bestehende Differentialgleichung auf folgende Art.

Die zwischen den Gröfsen C und q Statt findende Differentialgleichung (7.) wurde durch Elimination von $k^2k'^2$ aus den Gleichungen

$$4C^3C''=-k^2k'^2,\qquad \frac{\partial\log - k^2k'^2}{\sqrt{(1-4k^2k'^2)}}=\frac{\partial\log q}{C^2}$$

abgeleitet. Die letztere Gleichung folgt aus der Gleichung $\partial\log\frac{k^2}{k'^2}=\partial l=\frac{\partial\log q}{C^2}$. Diese giebt für eine beliebige Function u,

$$C^2u'=C^2\frac{\partial u}{\partial\log q}=\frac{\partial u}{\partial l}.$$

Setzt man

$$D=f.C,$$

und bezieht die obern Indices von D und f, ebenso wie die von y, C und u auf die Differentiation nach $\log q$, so wird

$$D''=fC''+2f'C'+f''C.$$

Man hat daher

$$4D^3D''=-4f^4k^2k'^2+4f^3C^2\frac{\partial.C^2f'}{\partial\log q}$$

$$=-4f^4k^2k'^2+4f^3\frac{\partial^2 f}{\partial l^2},$$

$$\frac{\partial l}{f^2}=\frac{\partial\log q}{D^2}.$$

Setzt man den Ausdruck

$$9.\qquad -4f^4k^2k'^2+4f^3\frac{\partial^2 f}{\partial l^2}=H,$$

und denkt sich die Function f so bestimmt, dafs

$$10.\quad \frac{\partial \log H}{\sqrt{(4H+1)}} = \frac{\partial l}{f^2},$$

so hat man die beiden Gleichungen

$$11.\quad 4D^3D'' = H,\quad \frac{\partial \log H}{\sqrt{(4H+1)}} = \frac{\partial \log q}{D^2}.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen die Gröfse H, so erhält man dieselbe Differentialgleichung zwischen D und q, welche zwischen C und q gefunden worden ist. Wenn man andrerseits aus (9.) den Werth von H in (10.) substituirt, so erhält man eine Differentialgleichung 3ter Ordnung zwischen f und k. Setzt man in dieser Differentialgleichung $l = \log k_1$ oder

$$\frac{k^2}{k'^2} = k_1,$$

so wird dieselbe,

$$12.\quad k_1^2 f^4 \left(\frac{\partial H}{\partial k_1}\right)^2 = H^2 + 4H^3,$$

wo zufolge (9.) die Gröfse H den Ausdruck

$$13.\quad 4k_1^2 f^3 \frac{\partial^2 f}{\partial k_1^2} + 4k_1 f^3 \frac{\partial f}{\partial k_1} - \frac{4k_1 f^4}{(1+k_1)^2} = H$$

bedeutet.

So wie die Function $D = \frac{\pi f}{2K}$ ein Integral der Gleichung (7.) wurde, wenn f ein beliebiges Integral der Gleichung (12.) ist, so wird auch umgekehrt $f = \frac{2K}{\pi} D$ ein Integral der Gleichung (12.), wenn D ein beliebiges Integral der Gleichung (7.) ist. Setzt man nämlich $4D^3D'' = H$, so verwandelt sich die Gleichung (7.), welcher D genügt, in die Gleichung (10.). Bestimmt man dann f durch die Gleichung $D = \frac{\pi f}{2K} = fC$, so erhält man durch zweimalige Differentiation für H den Werth (9.), und wenn man diesen in die Gleichung (10.) substituirt, die Differentialgleichung (12.).

Aus den Gleichungen (3*.) und (5.) ergiebt sich, dafs man, ohne dafs $\partial \log q$ und die Gleichung (7.) sich ändert, für $-\frac{k^2}{k'^2}$ die Gröfsen $\frac{1}{k'^2}$ und k^2 setzen kann, wenn man gleichzeitig K in kK und $k'K$ ändert. Bedeutet daher $f(k_1)$ ein beliebiges Integral der Differentialgleichung (12.), so wird nicht nur $\frac{\pi}{2K} f\left(\frac{k^2}{k'^2}\right)$, sondern es werden auch die Functionen $\frac{\pi}{2kK} f\left(-\frac{1}{k'^2}\right)$, $\frac{\pi}{2k'K} f(-k^2)$

Integrale der Gleichung (7.) werden. Umgekehrt werden, wenn D ein beliebiges Integral der Gleichung (7.) ist, die Functionen $\frac{2K}{\pi}D$, $\frac{2kK}{\pi}D$, $\frac{2k'K}{\pi}D$ Integrale der Gleichung (12.), je nachdem in letzterer k_1 die Gröfsen $\frac{k^2}{k'^2}$, $-\frac{1}{k'^2}$, $-k^2$ bedeutet.

Der Differentialgleichung (12.) genügen unendlich viel algebraische Werthe von f, welche nur um einen Zahlenfactor von den Werthen verschieden sind, die der in der Theorie der Transformation der elliptischen Integrale vorkommende Multiplicator M für die verschiednen Transformationen annimmt. Kennt man die algebraische Gleichung zwischen dem gegebnen Modul k und dem transformirten λ, so wird das Quadrat dieses Multiplicators rational durch k und λ vermittelst der allgemeinen Formel

$$14.\qquad M^2 = \frac{(\lambda-\lambda^3)\partial k}{n(k-k^3)\partial\lambda}$$

gegeben, wo n die Ordnung der Transformation bedeutet. Aufserdem findet zwischen den nach k genommnen ersten beiden Differentialquotienten von M und dem ersten von λ noch die Differentialgleichung

$$15.\qquad M\left\{(k-k^3)\frac{\partial^2 M}{\partial k^2}+(1-3k^2)\frac{\partial M}{\partial k}-kM\right\}+\frac{\lambda\partial\lambda}{n\partial k} = 0$$

Statt. In den *Fund. N.* (pag. 77) ist aus den beiden Gleichungen (14.) und (15.) durch Elimination von M die zwischen je zwei Moduln, welche in einander transformirt werden können, bestehende Differentialgleichung 3ter Ordnung gefunden worden. Wenn man aber aus denselben beiden Differentialgleichungen statt M den transformirten Modul λ eliminirt, so erhält man für $\sqrt{n}.M$ dieselbe Differentialgleichung, wie oben für f gefunden worden, welche von der Ordnung der Transformation unabhängig ist. Es können nämlich die beiden Gleichungen (14.) und (15.), wenn man $\lambda'^2 = 1-\lambda^2$, $l = \log\frac{k^2}{k'^2}$ setzt, durch folgende beide ersetzt werden:

$$16.\qquad \begin{cases} n^2\left\{-4M^4k^2k'^2+4M^3\frac{\partial^2 M}{\partial l^2}\right\} = -\lambda^2\lambda'^2, \\ \partial\log\frac{\lambda^2}{\lambda'^2} = \frac{\partial\log.-\lambda^2\lambda'^2}{\sqrt{(1-4\lambda^2\lambda'^2)}} = \frac{\partial l}{nM^2}. \end{cases}$$

Da nun, wenn man

$$H = -\lambda^2\lambda'^2,\qquad f = \sqrt{n}.M$$

setzt, die Gleichungen (9.) und (10.) mit den Gleichungen (16.) übereinkom-

men, so werden die Functionen $\sqrt{n}.M$ Integrale der zwischen f und $k_1=\frac{k^2}{k'^2}$ bestehenden Differentialgleichung (12.), und zwar algebraische Integrale dieser Gleichung.

Die für C und y oben aufgestellten Differentialgleichungen sind aus der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren besondere Integrale K und K' sind, in Verbindung mit der Gleichung

$$\partial \log q = \partial \cdot \frac{-\pi K'}{K} = \frac{\partial . k^2}{k^2 k'^2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2}$$

erhalten worden. Setzt man für K und K' zwei vollständige Integrale der erstern,

$$Q = aK+\sqrt{-1}\,bK', \qquad Q' = a'K'+\sqrt{-1}\,b'K,$$

so wird

$$\partial \cdot \frac{-\pi Q'}{Q} = \frac{(aa'+bb')\partial \cdot k^2}{k^2 k'^2 \left(\frac{2Q}{\pi}\right)^2}.$$

Hieraus folgt, dafs man in den zwischen K, k und q aufgestellten Differentialgleichungen für K und $\log q$ auf die allgemeinste Art die Gröfsen $\frac{Q}{\sqrt{(aa'+bb')}}$ und $-\frac{\pi Q'}{Q}$ setzen kann. *Es wird daher das vollständige Integral der Differentialgleichungen* (7.) *und* (8.) *durch das System der beiden Gleichungen*

$$17. \quad \begin{cases} C^{-\frac{1}{2}} = y = \sqrt{\dfrac{\frac{2}{\pi}(aK+\sqrt{-1}\,bK')}{\sqrt{(aa'+bb')}}}, \\[2ex] \log q = -\dfrac{\pi(a'K'+\sqrt{-1}\,b'K)}{aK+\sqrt{-1}\,bK'} \end{cases}$$

gegeben, wo a, b, a', b' willkürliche Constanten bedeuten, und die Gröfsen K und K' gegebne Functionen einer dritten Gröfse k sind, nämlich die ganzen elliptischen Integrale erster Gattung für die Moduln k und $\sqrt{(1-k^2)}$.

Setzt man

$$-\frac{K'}{K} = r,$$

woraus

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1+2e^{\pi r}+2e^{4\pi r}+2e^{9\pi r}+\text{ etc.}$$

folgt, so erhält man aus der letzten der beiden vorstehenden Gleichungen (17.),

$$\log q = \frac{\pi(a'r-\sqrt{-1}\,b')}{a-\sqrt{-1}\,br},$$

und daher

$$r = \frac{a\log q+\sqrt{-1}\,b'\pi}{a'\pi+\sqrt{-1}\,b\log q},\qquad a-\sqrt{-1}\,br = \frac{(aa'+bb')\pi}{a'\pi+\sqrt{-1}\,b\log q}.$$

Der vollständige Werth von y, durch r ausgedrückt, wird

$$y = \sqrt{\frac{a-\sqrt{-1}\,br}{\sqrt{(aa'+bb')}}}\cdot\{1+2e^{\pi r}+2e^{4\pi r}+2e^{9\pi r}+\text{etc.}\}.$$

Wenn man in diesen Formeln a, b, a', b' statt $\frac{a}{\sqrt{(aa'+bb')}}$, $\frac{b}{\sqrt{(aa'+bb')}}$, $\frac{a'}{\sqrt{(aa'+bb')}}$, $\frac{b'}{\sqrt{(aa'+bb')}}$ und

$$q = e^{\pi\varrho},\qquad \log q = \pi\varrho$$

setzt, so erhält man das folgende

Theorem.

„Die Reihe

$$y = 1+2e^{\pi\varrho}+2e^{4\pi\varrho}+2e^{9\pi\varrho}+\text{etc.}$$

genügt der Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\{y^2d^3y-15y\,dy\,d^2y+30\,dy^3\}^2+32\{y\,d^2y-3\,dy^2\}^3 = y^{10}\{y\,d^2y-3\,d^2y\}^2\pi^2d\varrho^2,$$

in welcher $d\varrho$ das beständige Differential ist, und es wird das vollständige Integral dieser Differentialgleichung,

$$y = \frac{1+2e^{\pi r}+2e^{4\pi r}+2e^{9\pi r}+\text{etc.}}{\sqrt{(a'+\sqrt{-1}\,b\varrho)}},$$

wo

$$r = \frac{a\varrho+\sqrt{-1}\,b'}{a'+\sqrt{-1}\,b\varrho}$$

ist, und a, a', b, b' willkürliche Constanten bedeuten, für welche

$$aa'+bb' = 1$$

ist."

Man kann das vorstehende Theorem aus dem ersten oben gegebnen Theorem ableiten, wenn man beweist,

dafs, wenn $y=f(\varrho)$, *wo* $\pi\varrho=\log q$, *ein beliebiges particuläres Integral der Differentialgleichung* (8.) *bedeutet, und man* $r=\frac{a\varrho+\sqrt{-1}\,b'}{a'+\sqrt{-1}\,b\varrho}$ *setzt, wo* $aa'+bb'=1$, *die Function*

$$y = \frac{f(r)}{\sqrt{(a'+\sqrt{-1}\,b\varrho)}}$$

das vollständige Integral der Differentialgleichung (8.) *ist.*

Man zeigt dieses leicht auf folgende Art.

Die Differentialgleichung (8.) verwandelt sich, wenn man $y=C^{-1}$ setzt, in die Differentialgleichung (7.), welche, wie wir gesehen haben, aus dem Systeme zweier Gleichungen,

$$4C^3C''=H,\quad \frac{\partial \log H}{\sqrt{(1+4H)}}=\frac{\partial \log q}{C^2},$$

durch Elimination von H hervorgeht. Setzt man $\log q=\pi\varrho$, und für C ein beliebiges particuläres Integral der Differentialgleichung (7.),

$$C=\varphi(\varrho)=\{f(\varrho)\}^{-2},$$

so werden die beiden vorstehenden Gleichungen, wenn man sich der *Lagrange*schen Bezeichnungsart der Differentialquotienten bedient,

$$4\varphi(\varrho)^3\varphi''(\varrho)=\pi^2H,\quad \frac{\partial \log H}{\sqrt{(1+4H)}}=\frac{\pi\partial\varrho}{\varphi(\varrho)^2}.$$

Schreibt man r für ϱ, so werden auch zwei Gleichungen von der Form

$$4\varphi(r)^3\varphi''(r)=\pi^2H_1,\quad \frac{\partial \log H_1}{\sqrt{(1+4H_1)}}=\frac{\pi\partial r}{\varphi(r)^2}$$

gleichzeitig Statt finden. Es seien a, b, a', b' Constanten, für welche $aa'+bb'=1$, und

$$r=\frac{a\varrho+\sqrt{-1}\,b'}{a'+\sqrt{-1}\,b\varrho},\quad \partial r=\frac{\partial\varrho}{(a'+\sqrt{-1}\,b\varrho)^2},$$

ferner

$$\psi(\varrho)=(a'+\sqrt{-1}\,b\varrho)\varphi(r):$$

so erhält man durch zweimaliges Differentiiren,

$$\psi'(\varrho)=\sqrt{-1}\,b\varphi(r)+\frac{\varphi'(r)}{a'+\sqrt{-1}\,b\varrho},$$

$$\psi''(\varrho)=\frac{\varphi''(r)}{(a'+\sqrt{-1}\,b\varrho)^3},$$

und daher

$$\psi(\varrho)^3\psi''(\varrho)=\varphi(r)^3\varphi''(r).$$

Fügt man hinzu die Formel

$$\frac{\partial r}{\varphi(r)^2}=\frac{\partial\varrho}{(a'+\sqrt{-1}\,b\varrho)^2\varphi(r)^2}=\frac{\partial\varrho}{\psi(\varrho)^2},$$

so verwandeln sich die beiden Gleichungen

$$4\varphi(r)^3\varphi''(r)=\pi^2H_1,\quad \frac{\partial \log H_1}{\sqrt{(1+4H_1)}}=\frac{\pi\partial r}{\varphi(r)^2}.$$

in die ganz ähnlichen,

$$4\psi(\varrho)^3\psi''(\varrho) = \pi^2 H_1, \qquad \frac{\partial \log H_1}{\sqrt{(1+4H_1)}} = \frac{\pi\,\partial\varrho}{\psi(\varrho)^2}.$$

Es folgt hieraus, dafs die Function

$$\psi(\varrho) = (a'+\sqrt{-1}\,b\varrho)\varphi(r),$$

eben so wie $\varphi(\varrho)$, ein Integral der Differentialgleichung (7.) und daher auch

$$\{\psi(\varrho)\}^{-\frac{1}{2}} = \frac{f(r)}{\sqrt{(a'+\sqrt{-1}\,b\varrho)}}$$

ein Integral der Differentialgleichung (8.) ist, und zwar sind dies die vollständigen Integrale dieser Differentialgleichungen, weil sie 3 willkürliche Constanten enthalten.

Man hat oben gesehn, dafs die Reihe

$$2\sqrt[4]{q}+2\sqrt[4]{q^9}+2\sqrt[4]{q^{25}}+2\sqrt[4]{q^{49}}+ \text{etc.}$$

ebenfalls ein Integral der Differentialgleichung (8.) ist. Man wird daher mittelst des eben gefundenen Satzes auch aus dieser Reihe das vollständige Integral der Differentialgleichung (8.) ableiten können, und es mufs das aus der einen Form erhaltene vollständige Integral das Integral der andern Form umfassen. Es müssen daher in dem Ausdruck $r = \frac{a\varrho+\sqrt{-1}\,b'}{a'+\sqrt{-1}\,b\varrho}$ die Constanten a, b, a', b' immer so bestimmt werden können, dafs

$$\frac{1+2e^{\pi r}+2e^{4\pi r}+2e^{9\pi r}+\text{etc.}}{\sqrt{(a'+\sqrt{-1}\,b\varrho)}} = 2e^{\frac{1}{4}\pi\varrho}+2e^{\frac{9}{4}\pi\varrho}+2e^{\frac{25}{4}\pi\varrho}+\text{etc.}$$

Die Theorie der elliptischen Transcendenten lehrt, dafs diese Bestimmung auf unendlich viel Arten möglich ist. Es ergiebt sich nämlich aus der Theorie der unendlich vielen Formen der Transcendente Θ *), dafs die vorstehende Gleichung immer gilt, wenn a, b, a', b' positive oder negative ganze Zahlen sind, von denen a, a' und b ungerade sind, und a' und b durch 4 dividirt nicht denselben Rest lassen. *Das Zeichen der den Nenner bildenden Quadratwurzel in der vorstehenden Formel hängt von dem Werthe der in der Theorie der quadratischen Reste mit* $\left(\frac{a'}{b}\right)$ *bezeichneten Gröfse ab.* Ein doppelter Gang der Untersuchung, welchen man einschlagen kann, führt zu dieser Zeichen-

*) Ich habe diese Theorie in mehreren an der Königsberger Universität gehaltnen Vorlesungen umständlich auseinandergesetzt, und behalte mir vor, dieselbe bei einer andern Gelegenheit bekannt zu machen.

bestimmung entweder mittelst einer Kettenbruchentwicklung oder der von *Gaufs* in seiner Abhandlung *Summatio serierum quarundam singularium* betrachteten Summen. Die vorstehende Gleichung wird, wenn a und b ungerade ist, immer gelten, wofern man nur die eine Seite derselben mit einer 8ten Wurzel der Einheit multiplicirt. Wenn von den Zahlen a und b die eine gerade, die andere ungerade ist, hat man die Gleichung

$$\delta\cdot\frac{1+2e^{\pi r}+2e^{4\pi r}+2e^{9\pi r}+\ldots}{\sqrt{(a'+\sqrt{-1}\,b\varrho)}} = 1\pm 2e^{\pi\varrho}+2e^{4\pi\varrho}\pm 2e^{9\pi\varrho}+\ldots,$$

wo δ eine 8te Wurzel der Einheit bedeutet, und das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem von den Zahlen a' und b die eine gerade, die andere ungerade oder beide ungerade sind.

Die vorstehenden Reihenentwicklungen setzen voraus, dafs der reelle Theil der Gröfsen ϱ und r negativ ist. Wenn dies bei ϱ, aber nicht bei der Gröfse r der Fall ist, so kann man die Constanten a und b' mit $\sqrt{-1}$ multipliciren und die Constanten a' und b mit $\sqrt{-1}$ dividiren, wodurch die Bedingung $aa'+bb'=1$ unverändert bleibt, und sich r in $-r$ verwandelt, also der reelle Theil negativ wird. *Für beliebige reelle Werthe der willkürlichen Constanten a, a', b, b' wird, wenn der reelle Theil von ϱ negativ ist, auch der reelle Theil von r immer negativ sein.* Setzt man nämlich

$$\varrho = -\varrho_0+\varrho_1\sqrt{-1},$$

so wird

$$r = -\frac{a\varrho_0+(a\varrho_1+b_1)\sqrt{-1}}{a'-b\varrho_1-b\varrho_0\sqrt{-1}}$$

$$= -\frac{\varrho_0+\sqrt{-1}\{(a'-b\varrho_1)(a\varrho_1+b_1)-ab\varrho_0^2\}}{(a'-b\varrho_1)^2+b^2\varrho_0^2},$$

woraus der vorstehende Satz folgt.

Den 10ten November 1847.

Verbesserungen.

S. 102 Z. 5 $\frac{k^2}{k'^4}$ st. $-\frac{k^2}{k'^4}$

Z. 9 $\frac{k'^2}{k^4}$ st. $\frac{k^2}{k^4}$

Z. 10 nach „setzt" ist einzufügen „und bei der zweiten die Wurzel negativ nimmt,"

Z. 11 $\frac{1}{k'^2}$ st. k'^2

Z. 13, 14, 18 ist das Minuszeichen fortzulassen.

8.

Über eine particuläre Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

(Von Herrn Prof. *C. G. J. Jacobi.*)

1.

Es seien x, y, z rechtwinklichte Coordinaten und

$$\varphi(x,y,z) = \varrho, \quad \varphi_1(x,y,z) = \varrho_1, \quad \varphi_2(x,y,z) = \varrho_2$$

die Gleichungen dreier orthogonalen Flächensysteme, in welchen man ϱ, ϱ_1, ϱ_2 als die veränderlichen Parameter betrachtet. Für gegebne Werthe der Coordinaten x, y, z erhalten durch diese Gleichungen die drei Parameter ϱ, ϱ_1, ϱ_2 bestimmte Werthe, und es ist daher für einen gegebnen Punct des Raumes die individuelle Fläche jedes Systems bestimmt, welche durch ihn hindurchgeht. Setzt man

$$\left(\frac{\partial\varrho}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varrho}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varrho}{\partial z}\right)^2 = h^2,$$

$$\left(\frac{\partial\varrho_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varrho_1}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varrho_1}{\partial z}\right)^2 = h_1^2,$$

$$\left(\frac{\partial\varrho_2}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varrho_2}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varrho_2}{\partial z}\right)^2 = h_2^2,$$

und nennt

$$\alpha, \beta, \gamma; \quad \alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \quad \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$$

die Cosinus der Winkel, welche die an den drei Flächen in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitt errichteten Normalen mit den drei Coordinatenachsen bilden, so hat man

$$1. \quad \begin{cases} h\alpha = \frac{\partial\varrho}{\partial x}, & h\beta = \frac{\partial\varrho}{\partial y}, & h\gamma = \frac{\partial\varrho}{\partial z}, \\ h_1\alpha_1 = \frac{\partial\varrho_1}{\partial x}, & h_1\beta_1 = \frac{\partial\varrho_1}{\partial y}, & h_1\gamma_1 = \frac{\partial\varrho_1}{\partial z}, \\ h_2\alpha_2 = \frac{\partial\varrho_2}{\partial x}, & h_2\beta_2 = \frac{\partial\varrho_2}{\partial y}, & h_2\gamma_2 = \frac{\partial\varrho_2}{\partial z}. \end{cases}$$

Da die drei Normalen selber auf einander senkrecht stehen, so haben die 9 Gröfsen α, β, etc. die bekannten Eigenschaften der Coëfficienten der Transformationsformeln zweier rechtwinklichten Coordinatensysteme.

Aus den vorstehenden Formeln folgt für eine beliebige Function V,

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\alpha.h\frac{\partial V}{\partial\varrho}+\alpha_1.h_1\frac{\partial V}{\partial\varrho_1}+\alpha_2.h_2\frac{\partial V}{\partial\varrho_2},$$
$$\frac{\partial V}{\partial y}=\beta.h\frac{\partial V}{\partial\varrho}+\beta_1.h_1\frac{\partial V}{\partial\varrho_1}+\beta_2.h_2\frac{\partial V}{\partial\varrho_2},$$
$$\frac{\partial V}{\partial z}=\gamma.h\frac{\partial V}{\partial\varrho}+\gamma_1.h_1\frac{\partial V}{\partial\varrho_1}+\gamma_2.h_2\frac{\partial V}{\partial\varrho_2},$$

und daher zufolge der erwähnten Eigenschaften der Gröfsen α, β, etc.

$$2.\quad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2=h^2\left(\frac{\partial V}{\partial\varrho}\right)^2+h_1^2\left(\frac{\partial V}{\partial\varrho_1}\right)^2+h_2^2\left(\frac{\partial V}{\partial\varrho_2}\right)^2.$$

Vermöge der Eigenschaften dieser Gröfsen hat man auch

$$\Sigma\pm\alpha\beta_1\gamma_2=1,$$

woraus durch Substitution von (1.) die Formel

$$\Sigma\pm\frac{\partial\varrho}{\partial x}\frac{\partial\varrho_1}{\partial y}\frac{\partial\varrho_2}{\partial z}=hh_1h_2$$

folgt, und daher auch vermittelst einer bekannten Eigenschaft der Determinanten,

$$3.\quad \Sigma\pm\frac{\partial x}{\partial\varrho}\frac{\partial y}{\partial\varrho_1}\frac{\partial z}{\partial\varrho_2}=\frac{1}{hh_1h_2}.$$

Man kann diese Formel auch folgendermafsen ableiten. Aus (1.) ergiebt sich

$$\alpha dx+\beta dy+\gamma dz=\frac{1}{h}d\varrho,$$
$$\alpha_1 dx+\beta_1 dy+\gamma_1 dz=\frac{1}{h_1}d\varrho_1,$$
$$\alpha_2 dx+\beta_2 dy+\gamma_2 dz=\frac{1}{h_2}d\varrho_2,$$

und daraus vermöge der Eigenschaften der Gröfsen α, β, etc.

$$dx=\frac{\alpha}{h}d\varrho+\frac{\alpha_1}{h_1}d\varrho_1+\frac{\alpha_2}{h_2}d\varrho_2,$$
$$dy=\frac{\beta}{h}d\varrho+\frac{\beta_1}{h_1}d\varrho_1+\frac{\beta_2}{h_2}d\varrho_2,$$
$$dz=\frac{\gamma}{h}d\varrho+\frac{\gamma_1}{h_1}d\varrho_1+\frac{\gamma_2}{h_2}d\varrho_2,$$

ferner

$$4.\quad dx^2+dy^2+dz^2=\frac{1}{h^2}d\varrho^2+\frac{1}{h_1^2}d\varrho_1^2+\frac{1}{h_2^2}d\varrho_2^2.$$

Die ersten drei der vorstehenden Gleichung ergeben

$$5.\quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \varrho}=\frac{\alpha}{h}, & \frac{\partial y}{\partial \varrho}=\frac{\beta}{h}, & \frac{\partial z}{\partial \varrho}=\frac{\gamma}{h}, \\ \frac{\partial x}{\partial \varrho_1}=\frac{\alpha_1}{h_1}, & \frac{\partial y}{\partial \varrho_1}=\frac{\beta_1}{h_1}, & \frac{\partial z}{\partial \varrho_1}=\frac{\gamma_1}{h_1}, \\ \frac{\partial x}{\partial \varrho_2}=\frac{\alpha_2}{h_2}, & \frac{\partial y}{\partial \varrho_2}=\frac{\beta_2}{h_2}, & \frac{\partial z}{\partial \varrho_2}=\frac{\gamma_2}{h_2}, \end{cases}$$

und hieraus folgt, wie oben gefunden worden,

$$\Sigma\pm\frac{\partial x}{\partial \varrho}\frac{\partial y}{\partial \varrho_1}\frac{\partial z}{\partial \varrho_2}=\frac{1}{hh_1h_2}\Sigma\pm\alpha\beta_1\gamma_2=\frac{1}{hh_1h_2}.$$

Diese Formel zeigt, dafs das Raumelement $dx\,dy\,dz$, wenn man die Parameter ϱ, ϱ_1, ϱ_2 statt der rechtwinklichten Coordinaten einführt, durch das Element

$$\frac{1}{hh_1h_2}d\varrho\, d\varrho_1 d\varrho_2$$

ausgedrückt wird, wie sich leicht auch aus geometrischen Betrachtungen ergiebt.

Will man die Gröfsen ϱ, ϱ_1, ϱ_2 statt x, y, z in die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

einführen, so kann man die transformirte partielle Differentialgleichung unmittelbar aus den beiden Formeln (2.) und (3.) erhalten, wie aus den folgenden Betrachtungen erhellt.

2.

Man denke sich ein $n$faches Integral, welches unter dem Integralzeichen eine unbestimmte abhängige Variable nebst ihren partiellen Differentialquotienten beliebiger Ordnung enthält, durch Einführung neuer unabhängiger Variabeln in ein anderes transformirt, und die Variationen der beiden einander gleichen Integrale nach den bekannten Vorschriften durch partielle Integration so reducirt, dafs sich unter den $n$fachen Zeichen nur noch die eine Variation der abhängigen Variable als Factor findet. Die in diese Variation unter den $n$fachen Integralzeichen multiplicirten Ausdrücke müssen einander gleich sein. Wenn man in dieser Gleichung die Elemente, in welche diese Ausdrücke multiplicirt sind, auf einander zurückführt, so erhält man die Transformation der Function, welche sich in der reducirten Variation des gegebnen Integrals unter dem $n$fachen Zeichen findet, und welche immer auf eine viel höhere Ordnung wie die Function steigt, die in dem gegebnen Integral selbst unter dem Zeichen steht. Ist z. B. F eine Function von

$$x,\ y,\ z,\ V,\ \frac{\partial V}{\partial x},\ \frac{\partial V}{\partial y},\ \frac{\partial V}{\partial z},$$

welche sich durch Einführung dreier andern Variabeln u, u_1, u_2 für x, y, z in eine Function von

$$u,\quad u_1,\quad u_2,\quad V,\quad \frac{\partial V}{\partial u},\quad \frac{\partial V}{\partial u_1},\quad \frac{\partial V}{\partial u_2}$$

verwandelt, und setzt man

$$\Sigma \pm \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u_1}\frac{\partial z}{\partial u_2} = \Delta,$$

so folgt aus der Gleichung

$$\iiint F\,dx\,dy\,dz = \iiint F\Delta\,du\,du_1\,du_2$$

durch Reduction der Variation der beiden Integrale die Gleichung

$$\Delta\left\{\frac{\partial F}{\partial V} - \frac{\partial\cdot\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial V}{\partial x}}}{\partial x} - \frac{\partial\cdot\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial V}{\partial y}}}{\partial y} - \frac{\partial\cdot\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial V}{\partial z}}}{\partial z}\right\}$$

$$= \Delta\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right) - \left(\frac{\partial\cdot\Delta\left(\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial V}{\partial u}}\right)}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial\cdot\Delta\left(\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial V}{\partial u_1}}\right)}{\partial u_1}\right) - \left(\frac{\partial\cdot\Delta\left(\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial V}{\partial u_2}}\right)}{\partial u_2}\right),$$

wo ich durch die hinzugefügten Klammern angedeutet habe, dafs die zu differentiirenden Gröfsen als Functionen von u, u_1, u_2, V, $\frac{\partial V}{\partial u}$, $\frac{\partial V}{\partial u_1}$, $\frac{\partial V}{\partial u_2}$ angesehen werden. Man dehnt diese zur Transformation der Differentialausdrücke dienende Methode leicht auf die Fälle aus, in welchen sich unter dem Integralzeichen mehrere abhängige Variabeln mit ihren Differentialquotienten befinden. Sie bietet den doppelten Vortheil, beschwerliche Rechnungen zu ersparen, und die Resultate in einer bequemen Form zu geben.

Setzt man in dem vorstehenden Beispiele

$$F = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2,$$

und verwandelt sich dieser Ausdruck durch Einführung neuer Variabeln u, u_1, u_2 in

$$E\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2 + E_1\left(\frac{\partial V}{\partial u_1}\right)^2 + E_2\left(\frac{\partial V}{\partial u_2}\right)^2$$

$$+2e\frac{\partial V}{\partial u_1}\frac{\partial V}{\partial u_2} + 2e_1\frac{\partial V}{\partial u_2}\frac{\partial V}{\partial u} + 2e_2\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial V}{\partial u_1}$$

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2,$$

und ist ferner, wie im Vorhergehenden,

$$\Sigma \pm \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u_1}\frac{\partial z}{\partial u_2} = \Delta,$$

so giebt die obige allgemeine Formel,

$$1.\quad \Delta\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right\}$$

$$= \frac{\partial\cdot\Delta\left\{E\frac{\partial V}{\partial u}+e_2\frac{\partial V}{\partial u_1}+e_1\frac{\partial V}{\partial u}\right\}}{\partial u}$$

$$+\frac{\partial\cdot\Delta\left\{e_2\frac{\partial V}{\partial u}+E_1\frac{\partial V}{\partial u_1}+e\frac{\partial V}{\partial u_2}\right\}}{\partial u_1}$$

$$+\frac{\partial\cdot\Delta\left\{e_1\frac{\partial V}{\partial u}+e\frac{\partial V}{\partial u_1}+E_2\frac{\partial V}{\partial u_2}\right\}}{\partial u_2}.$$

Wird insbesondere

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = E\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2+E_1\left(\frac{\partial V}{\partial u_1}\right)^2+E_2\left(\frac{\partial V}{\partial u_2}\right)^2,$$

so erhält man

$$2.\quad \Delta\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right\} = \frac{\partial\cdot\Delta E\frac{\partial V}{\partial u}}{\partial u}+\frac{\partial\cdot\Delta E_1\frac{\partial V}{\partial u_1}}{\partial u_1}+\frac{\partial\cdot\Delta E_2\frac{\partial V}{\partial u_2}}{\partial u_2}.$$

Nimmt man für die neuen Variabeln die Parameter ϱ, ϱ_1, ϱ_2, so wird man zufolge dieser Formel aus den Gleichungen (2.) und (3.) des vorigen Paragraphen,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = h^2\left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right)^2+h_1^2\left(\frac{\partial V}{\partial \varrho_1}\right)^2+h_2^2\left(\frac{\partial V}{\partial \varrho_2}\right)^2,$$

$$\Sigma \pm \frac{\partial x}{\partial \varrho}\frac{\partial y}{\partial \varrho_1}\frac{\partial z}{\partial \varrho_2} = \Delta = \frac{1}{h h_1 h_2},$$

unmittelbar auch die folgende erhalten:

$$3.\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$= h h_1 h_2\left\{\frac{\partial\cdot\frac{h}{h_1 h_2}\frac{\partial V}{\partial \varrho}}{\partial \varrho}+\frac{\partial\cdot\frac{h_1}{h_2 h}\frac{\partial V}{\partial \varrho_1}}{\partial \varrho_1}+\frac{\partial\cdot\frac{h_2}{h h_1}\frac{\partial V}{\partial \varrho_2}}{\partial \varrho_2}\right\}.$$

Die vorgelegte partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

verwandelt sich daher durch Einführung der Parameter ϱ, ϱ_1, ϱ_2 statt der rechtwinklichten Coordinaten x, y, z in die Gleichung

$$4. \quad \frac{\partial \cdot \frac{h}{h_1 h_2} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varrho}}{\partial \varrho} + \frac{\partial \cdot \frac{h_1}{h_2 h} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varrho_1}}{\partial \varrho_1} + \frac{\partial \cdot \frac{h_2}{h h_1} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varrho_2}}{\partial \varrho_2} = 0,$$

welche von Herrn *Lamé* im 23ten Hefte des Pariser Polytechnischen Journals gegeben ist. Setzt man in (3.) für V eine Function von ϱ,

$$V = f(\varrho), \quad \text{und} \quad \frac{\partial f(\varrho)}{\partial \varrho} = f'(\varrho),$$

so erhält man

$$\frac{\partial^2 f(\varrho)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(\varrho)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(\varrho)}{\partial z^2} = h h_1 h_2 \frac{\partial \cdot \frac{h}{h_1 h_2} f'(\varrho)}{\partial \varrho}.$$

Setzt man $f(\varrho) = \varrho$, so folgt hieraus

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial z^2} = h^2 \frac{\partial \log \frac{h}{h_1 h_2}}{\partial \varrho},$$

welche Formel Herr *Lamé* ebendaselbst S. 222 gegeben hat. — Wenn der Coëfficient ΔE in (2.) von u unabhängig ist, so giebt diese Formel

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

so dafs also, wenn ΔE von u unabhängig ist, $V = u$ eine Lösung der vorgelegten partiellen Differentialgleichung ist.

Ich will bei dieser Gelegenheit noch bemerken, dafs man die Transformation des Ausdrucks

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2,$$

so wie den Werth von Δ, immer aus der Transformation des Ausdrucks $dx^2 + dy^2 + dz^2$ erhalten kann. Hat man nämlich für irgend welche neue Variabeln u, u_1, u_2,

$$dx^2 + dy^2 + dz^2$$
$$= A du^2 + B du_1^2 + C du_2^2 + 2a\, du_1 du_2 + 2b\, du_2 du + 2c\, du\, du_1,$$

so wird

$$\Delta^2 = \left\{ \Sigma \pm \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u_1} \frac{\partial z}{\partial u_2} \right\}^2 = ABC - Aa^2 - Bb^2 - Cc^2 + 2abc$$

und

$$\Delta^2\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right\}$$

$$=(BC-a^2)\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2+(CA-b^2)\left(\frac{\partial V}{\partial u_1}\right)^2+(AB-c^2)\left(\frac{\partial V}{\partial u_2}\right)^2$$

$$+2(bc-aA)\frac{\partial V}{\partial u_1}\frac{\partial V}{\partial u_2}+2(ca-BC)\frac{\partial V}{\partial u_2}\frac{\partial V}{\partial u}+2(ab-cC)\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial V}{\partial u_1}.$$

Diese Formel in Verbindung mit der Formel (1.) zeigt,

dafs der transformirte Ausdruck des Quadrates des Linienelementes $dx^2+dy^2+dz^2$ allein hinreicht, um sogleich die Transformation der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$ zu erhalten.

Ist insbesondere

$$dx^2+dy^2+dz^2 = A\,du^2+A_1\,du_1^2+A_2\,du_2^2,$$

so erhält man

$$\Delta=\sqrt{(\Delta A_1 A_2)},\quad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2=\frac{1}{A}\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2+\frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial V}{\partial u_1}\right)^2+\frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial V}{\partial u_2}\right)^2,$$

und die transformirte partielle Differentialgleichung wird

$$\frac{\partial\cdot\sqrt{\frac{A_1A_2}{A}}\frac{\partial V}{\partial u}}{\partial u}+\frac{\partial\cdot\sqrt{\frac{A_2A}{A_1}}\frac{\partial V}{\partial u_1}}{\partial u_1}+\frac{\partial\cdot\sqrt{\frac{AA_1}{A_2}}\frac{\partial V}{\partial u_2}}{\partial u_2}=0.$$

Die Zeichen der Wurzelgröfsen sind hier aus einem derselben dadurch bestimmt, dafs sich die Wurzelgröfsen wie $\frac{1}{A}, \frac{1}{A_1}, \frac{1}{A_2}$ verhalten müssen.

Durch Einführung von Polarcoordinaten statt der rechtwinklichten erhält man, indem man

$$x = u\cos u_1,\quad y = u\sin u_1\cos u_2,\quad z = u\sin u_1\sin u_2$$

setzt,

$$dx^2+dy^2+dz^2 = du^2+u^2du_1^2+u^2\sin u_1^2\,du_2^2;$$

es wird daher für diesen Fall $A=1$, $A_1=u^2$, $A_2=u^2\sin u_1^2$, also

$$\sqrt{\frac{A_1A_2}{A}}=u^2\sin u_1,\quad \sqrt{\frac{A_2A}{A_1}}=\sin u_1,\quad \sqrt{\frac{AA_1}{A_2}}=\frac{1}{\sin u_1},$$

und daher die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0,$$

durch Einführung der Polarcoordinaten in die folgende:

$$\sin u_1\frac{\partial\cdot\frac{u^2\partial V}{\partial u}}{\partial u}+\frac{\partial\cdot\sin u_1\frac{\partial V}{\partial u_1}}{\partial u_1}+\frac{1}{\sin u_1}\frac{\partial^2 V}{\partial u_2^2}=0,$$

transformirt, welches die bekannte von *Laplace* aufgestellte Gleichung ist.

Um dieselben Formeln auf den Fall anzuwenden, wenn man statt der rechtwinklichten Coordinaten x, y, z die sogenannten *elliptischen* einführt, will ich die bekannten auf diese bezüglichen Relationen in der Kürze ableiten.

3.

Die für die Zerfällung rationaler Brüche in Partialbrüche bekannten Formeln ergeben die Gleichung

$$1.\quad \frac{(\lambda-\varrho^2)(\lambda-\varrho_1^2)(\lambda-\varrho_2^2)}{\lambda(\lambda-b^2)(\lambda-c^2)}=1-\frac{x^2}{\lambda}-\frac{y^2}{\lambda-b^2}-\frac{z^2}{\lambda-c^2},$$

wenn man

$$2.\quad \begin{cases} x^2=\dfrac{\varrho^2\varrho_1^2\varrho_2^2}{b^2c^2},\\ y^2=\dfrac{(\varrho^2-b^2)(\varrho_1^2-b^2)(\varrho_2^2-b^2)}{b^2(b^2-c^2)},\\ z^2=\dfrac{(\varrho^2-c^2)(\varrho_1^2-c^2)(\varrho_2^2-c^2)}{c^2(c^2-b^2)}\end{cases}$$

setzt. Es seien b, c und ϱ, ϱ_1, ϱ_2 positiv, ferner

$$c>b,$$

so werden die Gröfsen x, y, z immer reell, wenn

$$\varrho>c,\quad c>\varrho_1>b,\quad b>\varrho_2,$$

und umgekehrt, wenn die Gröfsen x, y, z reell sind, kommen die Gröfsen ϱ, ϱ_1, ϱ_2 in den angegebnen Intervallen zu liegen. Die Formel (1.) zeigt nämlich, dafs die cubische Gleichung

$$3.\quad 1=\frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\lambda-b^2}+\frac{z^2}{\lambda-c^2},$$

durch welche λ bestimmt wird, die Gröfsen ϱ^2, ϱ_1^2, ϱ_2^2 zu Wurzeln hat, und es folgt aus bekannten Principien der Theorie der Gleichungen, dafs, wenn x^2, y^2, z^2 reelle positive Gröfsen sind, die Wurzeln der Gleichung (3.) immer in den angegebnen Intervallen liegen.

Die drei Gleichungen

$$4.\quad \begin{cases} 1=\dfrac{x^2}{\varrho^2}+\dfrac{y^2}{\varrho^2-b^2}+\dfrac{z^2}{\varrho^2-c^2},\\ 1=\dfrac{x^2}{\varrho_1^2}+\dfrac{y^2}{\varrho_1^2-b^2}+\dfrac{z^2}{\varrho_1^2-c^2},\\ 1=\dfrac{x^2}{\varrho_2^2}+\dfrac{y^2}{\varrho_2^2-b^2}+\dfrac{z^2}{\varrho_2^2-c^2}\end{cases}$$

geben, wenn man den Parametern ϱ, ϱ_1, ϱ_2 alle ihre in den angegebnen Intervallen

befindlichen Werthe beilegt, alle möglichen Ellipsoide und ein- und zweiflächigen Hyperboloide, in denen die Hauptschnitte dieselben Brennpuncte haben, die xy- und xz Schnitte die Puncte der x Achse, die um b und c, die yz Schnitte, die Puncte der y Achse, die um $\sqrt{(c^2-b^2)}$ vom Mittelpunct entfernt sind.

Da man die identische Gleichung $\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{b^2(b^2-c^2)}+\frac{1}{c^2(c^2-b^2)}=0$ hat, so folgt aus den Formeln (2.),

$$5.\quad\begin{cases}\dfrac{x^2}{\varrho_1^2\varrho_2^2}+\dfrac{y^2}{(\varrho_1^2-b^2)(\varrho_2^2-b^2)}+\dfrac{z^2}{(\varrho_1^2-c^2)(\varrho_2^2-c^2)}=0,\\[2ex] \dfrac{x^2}{\varrho_2^2\varrho^2}+\dfrac{y^2}{(\varrho_2^2-b^2)(\varrho^2-b^2)}+\dfrac{z^2}{(\varrho_2^2-c^2)(\varrho^2-c^2)}=0,\\[2ex] \dfrac{x^2}{\varrho^2\varrho_1^2}+\dfrac{y^2}{(\varrho^2-b^2)(\varrho_1^2-b^2)}+\dfrac{z^2}{(\varrho^2-c^2)(\varrho_1^2-c^2)}=0.\end{cases}$$

Diese Formeln, welche sich auch ergeben, wenn man je zwei der Formeln (4.) von einander abzieht, zeigen, dafs die drei Flächensysteme orthogonal sind. Wenn man die Gleichung (1.) nach λ differentiirt, und hierauf dieser Gröfse nach einander die Werthe ϱ^2, ϱ_1^2, ϱ_2^2 beilegt, so erhält man

$$6.\quad\begin{cases}\dfrac{(\varrho^2-\varrho_1^2)(\varrho^2-\varrho_2^2)}{\varrho^2(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2)}=\dfrac{x^2}{\varrho^4}+\dfrac{y^2}{(\varrho^2-b^2)^2}+\dfrac{z^2}{(\varrho^2-c^2)^2},\\[2ex] \dfrac{(\varrho_1^2-\varrho^2)(\varrho_1^2-\varrho_2^2)}{\varrho_1^2(\varrho_1^2-b^2)(\varrho_1^2-c^2)}=\dfrac{x^2}{\varrho_1^4}+\dfrac{y^2}{(\varrho_1^2-b^2)^2}+\dfrac{z^2}{(\varrho_1^2-c^2)^2},\\[2ex] \dfrac{(\varrho_2^2-\varrho^2)(\varrho_2^2-\varrho_1^2)}{\varrho_2^2(\varrho_2^2-b^2)(\varrho_2^2-c^2)}=\dfrac{x^2}{\varrho_2^4}+\dfrac{y^2}{(\varrho_2^2-b^2)^2}+\dfrac{z^2}{(\varrho_2^2-c^2)^2}.\end{cases}$$

Nimmt man von den Gleichungen (2.) die Logarithmen und differentiirt, so erhält man

$$7.\quad\begin{cases}dx=\dfrac{x\varrho}{\varrho^2}d\varrho+\dfrac{x\varrho_1}{\varrho_1^2}d\varrho_1+\dfrac{x\varrho_2}{\varrho_2^2}d\varrho_2,\\[2ex] dy=\dfrac{y\varrho}{\varrho^2-b^2}d\varrho+\dfrac{y\varrho_1}{\varrho_1^2-b^2}d\varrho_1+\dfrac{y\varrho_2}{\varrho_2^2-b^2}d\varrho_2,\\[2ex] dz=\dfrac{z\varrho}{\varrho^2-c^2}d\varrho+\dfrac{z\varrho_1}{\varrho_1^2-c^2}d\varrho_1+\dfrac{z\varrho_2}{\varrho_2^2-c^2}d\varrho_2,\end{cases}$$

und daher, vermöge (5.) und (6.),

$$dx^2+dy^2+dz^2$$
$$=\frac{(\varrho^2-\varrho_1^2)(\varrho^2-\varrho_2^2)}{(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2)}d\varrho^2+\frac{(\varrho_1^2-\varrho_2^2)(\varrho_1^2-\varrho^2)}{(\varrho_1^2-b^2)(\varrho_1^2-c^2)}d\varrho_1^2+\frac{(\varrho_2^2-\varrho^2)(\varrho_2^2-\varrho_1^2)}{(\varrho_2^2-b^2)(\varrho_2^2-c^2)}d\varrho_2^2.$$

Bestimmt man respective ϱ, ϱ_1, ϱ_2 als Functionen von u, u_1, u_2 mittelst der Gleichungen

$$8.\quad \begin{cases} \dfrac{d\varrho}{\sqrt{((\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2))}} = du, \\ \dfrac{d\varrho_1}{\sqrt{(-(\varrho_1^2-b^2)(\varrho_1^2-c^2))}} = du_1, \\ \dfrac{d\varrho_2}{\sqrt{((\varrho_2^2-b^2)(\varrho_2^2-c^2))}} = du_2, \end{cases}$$

so verwandelt sich diese Gleichung in die folgende,

$$9.\quad dx^2+dy^2+dz^2 = A\,du^2+A_1\,du_1^2+A_2\,du_2^2,$$

wo

$$10.\quad \begin{cases} A = (\varrho^2-\varrho_1^2)(\varrho^2-\varrho_2^2), \\ A_1 = (\varrho_1^2-\varrho_2^2)(\varrho_1^2-\varrho^2), \\ A_2 = (\varrho_2^2-\varrho^2)(\varrho_2^2-\varrho_1^2), \end{cases}$$

und daher

$$\Delta = \sqrt{(AA_1A_2)} = (\varrho_1^2-\varrho_2^2)(\varrho^2-\varrho_1^2)(\varrho^2-\varrho_2^2).$$

Man erhält aus (8.) zufolge der im vorigen Paragraphen gegebnen allgemeinen Regel,

$$11.\quad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{A}\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2+\frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial V}{\partial u_1}\right)^2+\frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial V}{\partial u_2}\right)^2,$$

und die partielle Differentialgleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$ wird, wenn man die Gröfsen u, u_1, u_2 als unabhängige Variabeln einführt,

$$\frac{\partial\cdot\dfrac{\sqrt{(AA_1A_2)}}{A}\dfrac{\partial V}{\partial u}}{\partial u}+\frac{\partial\cdot\dfrac{\sqrt{(AA_1A_2)}}{A_1}\dfrac{\partial V}{\partial u_1}}{\partial u_1}+\frac{\partial\cdot\dfrac{\sqrt{(AA_1A_2)}}{A_2}\dfrac{\partial V}{\partial u_2}}{\partial u_2} = 0,$$

oder, wenn man die obigen Werthe von A, A_1, A_2 substituirt,

$$12.\quad (\varrho_1^2-\varrho_2^2)\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}+(\varrho^2-\varrho_2^2)\frac{\partial^2 V}{\partial u_1^2}+(\varrho^2-\varrho_1^2)\frac{\partial^2 V}{\partial u_2^2} = 0,$$

welches die elegante von Herrn *Lamé* gegebne Transformation ist. Die Gleichung (12.) ergiebt sich auch aus der allgemeinen Formel (3.) des vorigen Paragraphen, wenn man bemerkt, dafs die im §. 1. eingeführten Gröfsen h, h_1, h_2 die Werthe

$$13.\quad h = \frac{1}{\sqrt{A}}\frac{d\varrho}{du},\quad h_1 = \frac{1}{\sqrt{A_1}}\frac{d\varrho_1}{du_1},\quad h_2 = \frac{1}{\sqrt{A_2}}\frac{d\varrho_2}{du_2}$$

annehmen, welche sich aus Vergleichung der Formel (11.) mit der Formel (2.) §. 1. ergeben.

Zufolge der allgemeinen Formel (2.) des vorigen Paragraphen wird für eine beliebige Function V der linke Theil der Gleichung (12.)

$$(\varrho_1^2-\varrho_2^2)\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}+(\varrho^2-\varrho_2^2)\frac{\partial^2 V}{\partial u_1^2}+(\varrho^2-\varrho_1^2)\frac{\partial^2 V}{\partial u_2^2}$$

$$=(\varrho_1^2-\varrho_2^2)(\varrho^2-\varrho_1^2)(\varrho^2-\varrho_2^2)\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right\}.$$

Ist V eine Function der einen Gröfse ϱ, $V=f(\varrho)$, so folgt hieraus

$$\frac{\partial^2 f(\varrho)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f(\varrho)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f(\varrho)}{\partial z^2}=\frac{1}{(\varrho^2-\varrho_1^2)(\varrho^2-\varrho_2^2)}\frac{d^2 f(\varrho)}{du^2},$$

welche Formel mehrerer merkwürdiger Anwendungen fähig ist.

4.

Der partiellen Differentialgleichung

$$(\varrho_1^2-\varrho_2^2)\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}+(\varrho^2-\varrho_2^2)\frac{\partial^2 V}{\partial u_1^2}+(\varrho^2-\varrho_1^2)\frac{\partial^2 V}{\partial u_2^2}=0$$

geschieht durch einen Ausdruck von der Form

$$f(u+u_1\sqrt{-1}+u_2)+f_1(u+u_1\sqrt{-1}-u_2)$$
$$+f_2(u-u_1\sqrt{-1}+u_2)+f_3(u-u_1\sqrt{-1}-u_2)=V$$

Genüge, wo f, f_1, f_2, f_3 vier willkürliche Functionen sind. Es kann aber niemals eine allgemeine Lösung aus dieser particulären zusammengesetzt werden, weil dieselbe jeder partiellen Differentialgleichung von der Form

$$(U_1-U_2)\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}+(U-U_2)\frac{\partial^2 V}{\partial u_1^2}+(U-U_1)\frac{\partial^2 V}{\partial u_2^2}=0$$

angehört, die Gröfsen U, U_1, U_2 mögen Functionen der drei Gröfsen u, u_1, u_2 sein, welche sie wollen.

Vermittelst der Theorie der elliptischen Functionen oder des *Abel*schen Lehrsatzes kann man die willkürlichen Functionen f etc. in andere verwandeln, deren Argumente algebraische Functionen von x, y, z sind. Es sei

1. $(\lambda^2+m\lambda+n)^2-p^2\lambda(\lambda-b^2)(\lambda-c^2)=(\lambda-\varrho^2)(\lambda-\varrho_1^2)(\lambda-\varrho_2^2)(\lambda-\sigma^2)$.

Sieht man in dieser Gleichung die Gröfsen ϱ, ϱ_1, ϱ_2 als Veränderliche an, so werden m, n, p, σ Functionen derselben. Zwischen der letzten dieser Gröfsen und ϱ, ϱ_1, ϱ_2 hat man in Folge des *Abel*schen Theorems die Differentialgleichung

$$\frac{d\varrho}{\sqrt{\{(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2)\}}}\pm\frac{d\varrho_1}{\sqrt{\{(\varrho_1^2-b^2)(\varrho_1^2-c^2)\}}}\pm\frac{d\varrho_2}{\sqrt{\{(\varrho_2^2-b^2)(\varrho_2^2-c^2)\}}}$$
$$=\frac{d\sigma}{\sqrt{\{(\sigma^2-b^2)(\sigma^2-c^2)\}}}.$$

Der linke Theil dieser Gleichung ist zufolge (8.) des vorigen Paragraphen $du \pm du_1\sqrt{-1} \pm du_2$, woraus hervorgeht, dafs die particuläre Lösung $V = f(u \pm u_1\sqrt{-1} \pm u_2)$ auch durch

$$V = f(\sigma)$$

dargestellt werden kann. Je nach den vier Werthen von σ, welche den verschiedenen Zeichen der Quadratwurzeln entsprechen, erhält man vier solcher Lösungen, welche man durch Addition mit einander verbinden kann.

Die Werthe, welche der Ausdruck $\lambda^2 + m\lambda + n$ für $\lambda = 0,\ b^2,\ c^2$ annimmt, sind zufolge (1.):

$$\varrho\varrho_1\varrho_2\sigma, \quad \sqrt{\{(b^2-\varrho^2)(b^2-\varrho_1^2)(b^2-\varrho_2^2)\}}\cdot\sqrt{(b^2-\sigma^2)},$$
$$\sqrt{\{(c^2-\varrho^2)(c^2-\varrho_1^2)(c^2-\varrho_2^2)\}}\cdot\sqrt{(c^2-\sigma^2)},$$

oder nach den zu Anfang des §. 3. gegebnen Formeln,

$$bc\cdot x\sigma, \quad b\sqrt{(b^2-c^2)}\cdot y\sqrt{(b^2-\sigma^2)}, \quad c\sqrt{(c^2-b^2)}\cdot z\sqrt{(c^2-\sigma^2)}.$$

Man erhält daher durch Zerfällung in Partialbrüche,

$$2.\quad \frac{\lambda^2+m\lambda+n}{\lambda(\lambda-b^2)(\lambda-c^2)} = \frac{x\sigma\sqrt{-1}}{bc}\cdot\frac{1}{\lambda} + \frac{y\sqrt{(b^2-\sigma^2)}}{b\sqrt{(b^2-c^2)}}\cdot\frac{1}{\lambda-b^2} + \frac{z\sqrt{(c^2-\sigma^2)}}{c\sqrt{(c^2-b^2)}}\cdot\frac{1}{\lambda-c^2}.$$

Entwickelt man beide Seiten dieser Gleichung nach den absteigenden Potenzen von λ, so erhält man durch Vergleichung der Coëfficienten von $\frac{1}{\lambda}$:

$$3.\quad 1 = \frac{x\sigma\sqrt{-1}}{bc} + \frac{y\sqrt{(\sigma^2-b^2)}}{b\sqrt{(c^2-b^2)}} + \frac{z\sqrt{(c^2-\sigma^2)}}{c\sqrt{(c^2-b^2)}}.$$

Es ergiebt sich hieraus der Satz:

wird die Gröfse σ durch x, y, z mittelst der Gleichung

$$1 = \sqrt{-1}\,\frac{x\sigma}{bc} + \frac{y\sqrt{(\sigma^2-b^2)}}{b\sqrt{(c^2-b^2)}} + \frac{z\sqrt{(c^2-\sigma^2)}}{c\sqrt{(c^2-b^2)}}$$

bestimmt, in welcher b und c beliebige Constanten bedeuten, so genügt jede Function dieser Gröfse,

$$V = f(\sigma),$$

der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Man kann dieses Resultat auch auf folgende Art erhalten und verallgemeinern.

5.

Damit es erlaubt sei, in der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

für V eine willkürliche Function einer Gröfse σ zu setzen, mufs nicht nur die Gleichung

$$1.\quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2}=0,$$

sondern auch die Gleichung

$$2.\quad \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \sigma}{\partial z}\right)^2=0$$

Statt finden, und umgekehrt kann man, so oft die Function σ beide Gleichungen erfüllt, für V eine beliebige Function von σ setzen. Ein Corollar dieses Satzes ist, *dafs kein Ausdruck σ, von dem jede beliebige Function der Gleichung*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

genügt, reell sein kann.

Bezeichnet man die zwischen der Gröfse σ und x, y, z Statt findende Gleichung durch

$$\Pi(x, y, z, \sigma)=0,$$

so wird

$$3.\quad \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial x}=-\frac{\partial \Pi}{\partial x},\quad \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial y}=-\frac{\partial \Pi}{\partial y},\quad \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial z}=-\frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

Es erfordert daher die Gleichung (2.), dafs auch

$$4.\quad \left\{\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right\}^2+\left\{\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right\}^2+\left\{\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right\}^2=0$$

sei. Differentiirt man die Gleichungen (3.) respective nach x, y, z, und addirt, so verschwindet wegen (2.) der in $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma^2}$ multiplicirte Ausdruck, und man erhält

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma}\left\{\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2}\right\}$$

$$=-2\left\{\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma \partial x}\frac{\partial \sigma}{\partial x}+\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma \partial y}\frac{\partial \sigma}{\partial y}+\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma \partial z}\frac{\partial \sigma}{\partial z}\right\}-\left\{\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2}\right\}.$$

Der erste Theil des Ausdrucks rechts vom Gleichheitszeichen reducirt sich aber, wenn man ihn mit $\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma}$ multiplicirt und die Werthe (3.) substituirt, auf das nach σ

genommne partielle Differential des Ausdrucks

$$\left\{\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right\}^2+\left\{\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right\}^2+\left\{\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right\}^2.$$

Ist daher die Function Π so beschaffen, dafs die Gleichung (4.) *identisch* erfüllt wird, so verschwindet dieser Theil und man erhält

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma}\left\{\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2}\right\} = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2}.$$

Umgekehrt hat man die beiden Gleichungen

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \sigma}{\partial z}\right)^2 = 0, \qquad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} = 0,$$

wenn σ als Function von x, y, z durch die Gleichung $\Pi = 0$ bestimmt wird, und die beiden Gleichungen

$$5. \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)^2 = 0, \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} = 0, \end{cases}$$

und zwar die erste *identisch*, Statt finden. Man hat daher den Satz:

Wenn eine Gröfse σ als Function von x, y, z durch die Gleichung $\Pi = 0$ bestimmt wird, in welcher die Function Π der partiellen Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)^2 = 0,$$

Genüge leistet, und man aufserdem

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} = 0$$

hat, so ist eine willkürliche Function der Gröfse σ,

$$V = f(\sigma)$$

eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Wenn Π in Bezug auf x, y, z linear ist, so findet die zweite der Bedingungsgleichungen (5.) von selber Statt. Man findet daher in diesem Falle als Corollar des vorstehenden Satzes den folgenden:

Wird eine Gröfse σ als Function von x, y, z durch die Gleichung

$$Ax+By+Cz-1 = 0$$

bestimmt, in welcher A, B, C beliebige Functionen von σ bedeuten,

welche der Gleichung

$$A^2+B^2+C^2=0$$

Genüge leisten, so ist jede Function von σ,

$$V=f(\sigma)$$

eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0.$$

Der oben mit Hülfe des *Abel*schen Theorems gefundene Satz 3. §. 4. ist ein specieller Fall des vorstehenden. In der That findet für

$$A=\frac{\sigma\sqrt{-1}}{bc},\quad B=\frac{\sqrt{(\sigma^2-b^2)}}{b\sqrt{(c^2-b^2)}},\quad C=\frac{\sqrt{(c^2-\sigma^2)}}{c\sqrt{(c^2-b^2)}}$$

die Gleichung $A^2+B^2+C^2=0$ Statt. Man sieht aber aus dem vorstehenden allgemeinern, dafs man in (3.) §. 4. links vom Gleichheitszeichen statt 1 eine beliebige Function von σ setzen kann. Man sieht leicht, dafs derselbe für jede Zahl Variabeln gilt. Für $n=2$ erhält man auf diese Weise die bekannte allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0;$$

denn es folgt in diesem Falle aus der Gleichung $Ax+By=1$, in welcher $A^2+B^2=0$, dafs $\frac{1}{A}=x+y\sqrt{-1}$; es wird daher σ, als Function von A, eine Function derselben Gröfse, und man kann daher für V eine beliebige Function von $x+y\sqrt{-1}$ setzen.

6.

Eine Function V, welche der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

genügt, ist bestimmt, wenn sie auf allen Puncten zweier von den §. 3. betrachteten confocalen Ellipsoïden gegebne Werthe annimmt. Ich will jetzt untersuchen, wie diese Werthe beschaffen sein müssen, damit der allgemeine Werth von V die im §. 4. angegebne Form

$$f(u+u_1\sqrt{-1}+u_2)+f_1(u+u_1\sqrt{-1}-u_2)$$
$$+f_2(u-u_1\sqrt{-1}+u_2)+f_3(u-u_1\sqrt{-1}-u_2)=V$$

erhält, wo die Gröfsen u, u_1, u_2 durch die Gleichungen des §. 3. mit den rechtwinklichten Coordinaten x, y, z verbunden sind.

Den gegebnen confocalen Ellipsoïden entsprechen constante Werthe von ϱ, die ich mit ϱ^0 und ϱ^1 bezeichne, und daher auch constante Werthe von u, die ich entsprechend u^0 und u^1 nennen will, so wie V^0 und V^1 die entsprechenden Werthe der Function V sein sollen. Setzt man daher

$$\begin{aligned}
f(u^0+u_1\sqrt{-1}+u_2)+f_3(u^0-u_1\sqrt{-1}-u_2) &= \varphi(u_1\sqrt{-1}+u_2),\\
f(u^1+u_1\sqrt{-1}+u_2)+f_3(u^1-u_1\sqrt{-1}-u_2) &= \varphi_1(u_1\sqrt{-1}+u_2),\\
f_1(u^0+u_1\sqrt{-1}-u_2)+f_2(u^0-u_1\sqrt{-1}+u_2) &= \psi(u_1\sqrt{-1}-u_2),\\
f_1(u^1+u_1\sqrt{-1}-u_2)+f_2(u^1-u_1\sqrt{-1}+u_2) &= \psi_1(u_1\sqrt{-1}-u_2),
\end{aligned}$$

so wird

$$\begin{aligned}
V^0 &= \varphi(u_1\sqrt{-1}+u_2)+\psi(u_1\sqrt{-1}-u_2),\\
V^1 &= \varphi_1(u_1\sqrt{-1}+u_2)+\psi_1(u_1\sqrt{-1}-u_2).
\end{aligned}$$

In diesen Formeln ist

$$\sqrt{-1}\,du_1 = \frac{d\varrho_1}{\sqrt{((\varrho_1^2-b^2)(\varrho_1^2-c^2))}},\qquad du_2 = \frac{d\varrho_2}{\sqrt{((\varrho_2^2-b^2)(\varrho_2^2-c^2))}}.$$

Setzt man

$$1.\qquad \lambda(\lambda+m)^2-n^2(\lambda-b^2)(\lambda-c^2) = (\lambda-\varrho_1^2)(\lambda-\varrho_2^2)(\lambda-\tau),$$

so wird zufolge des *Abel*schen Theorems,

$$\frac{d\tau}{\sqrt{((\tau^2-b^2)(\tau^2-c^2))}} = \sqrt{-1}\,du_1\pm du_2.$$

Es werden also die beiden der Gleichung (1.) genügenden Werthe von τ, die ich τ_1 und τ_2 nennen will, respective Functionen von $u_1\sqrt{-1}+u_2$ und $u_1\sqrt{-1}-u_2$, und es erhält daher jede von den Functionen V^0 und V^1 die Form

$$\Pi_1(\tau_1)+\Pi_2(\tau_2),$$

wo Π_1 und Π_2 beliebige Functionen sein können.

Aus (1.) folgt, wenn man der Gröfse λ die Werthe b^2, c^2 beilegt,

$$\begin{aligned}
b(b^2+m) &= \sqrt{((b^2-\varrho_1^2)(b^2-\varrho_2^2)(b^2-\tau))},\\
c(c^2+m) &= \sqrt{((c^2-\varrho_1^2)(c^2-\varrho_2^2)(c^2-\tau))},
\end{aligned}$$

oder zufolge der Formeln (2.) §. 3.:

$$\begin{aligned}
\frac{b^2+m}{b^2-c^2} &= \frac{y}{\sqrt{(\varrho^2-b^2)}}\,\frac{\sqrt{(b^2-\tau)}}{\sqrt{(b^2-c^2)}},\\
\frac{c^2+m}{c^2-b^2} &= \frac{z}{\sqrt{(\varrho^2-c^2)}}\,\frac{\sqrt{(c^2-\tau)}}{\sqrt{(c^2-b^2)}}.
\end{aligned}$$

Die Addition dieser beiden Formeln ergiebt

$$1 = \frac{y}{\sqrt{(\varrho^2-b^2)}}\sqrt{\frac{b^2-\tau}{b^2-c^2}}+\frac{z}{\sqrt{(\varrho^2-c^2)}}\sqrt{\frac{c^2-\tau}{c^2-b^2}}.$$

In diesen Formeln sind ϱ, $\sqrt{(\varrho^2-b^2)}$, $\sqrt{(\varrho^2-c^2)}$ die halben Hauptachsen des Ellipsoïds. Man kann daher

$$\frac{x}{\varrho}=\sin\eta,\qquad \frac{y}{\sqrt{(\varrho^2-b^2)}}=\cos\eta\cos\vartheta,\qquad \frac{z}{\sqrt{(\varrho^2-c^2)}}=\cos\eta\sin\vartheta$$

setzen. Setzt man ferner

$$\tau = b^2\sin^2 t+c^2\cos^2 t,$$

wodurch

$$\sqrt{\frac{b^2-\tau}{b^2-c^2}}=\cos t,\qquad \sqrt{\frac{c^2-\tau}{c^2-b^2}}=\sin t,$$

so verwandelt sich die Gleichung, durch welche τ bestimmt worden, wenn man die verschiednen Zeichen der Wurzelgröfsen berücksichtigt, in

$$1 = \cos\eta\cos(t\pm\vartheta),$$

woraus

$$\cos(t\pm\vartheta)=\frac{1}{\cos\eta},\qquad \pm\sqrt{-1}\sin(t\pm\vartheta)=\frac{\sin\eta}{\cos\eta},$$

$$\pm\sqrt{-1}(t\pm\vartheta)=\log\frac{1+\sin\eta}{\cos\eta}$$

folgt. Hieraus ergeben sich die vier Werthe von t,

$$t = \pm\vartheta\pm\sqrt{-1}\log\frac{1+\sin\eta}{\cos\eta},$$

von denen jedoch je zwei, die einander entgegengesetzt sind, hier nur für einen zu rechnen sind. Nennt man t_1 und t_2 zwei nicht blofs einander entgegengesetzte Werthe von t, so kann die hier betrachtete besondere Form, welche die Function V für $\varrho=\varrho^0$ und $\varrho=\varrho^1$ annehmen soll, $V=\Pi_1(\tau_1)+\Pi_2(\tau_2)$, auch durch

$$V = \Pi_1(t_1)+\Pi_2(t_2)$$

dargestellt werden, da eine beliebige Function von τ auch eine beliebige Function von t ist. Man hat daher den Satz:

Wenn auf den beiden gegebnen confocalen Ellipsoïden,

$$\frac{x^2}{\varrho^{0\,2}}+\frac{y^2}{\varrho^{0\,2}-b^2}+\frac{z^2}{\varrho^{0\,2}-c^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{\varrho^{1\,2}}+\frac{y^2}{\varrho^{1\,2}-b^2}+\frac{z^2}{\varrho^{1\,2}-c^2}=1,$$

die Coordinaten der Puncte durch zwei Winkel η und ϑ mittelst der Formeln

$$x=\varrho^0\sin\eta,\quad y=\sqrt{(\varrho^{0\,2}-b^2)}\cos\eta\cos\vartheta,\quad z=\sqrt{(\varrho^{0\,2}-c^2)}\cos\eta\sin\vartheta,$$

$$x=\varrho^1\sin\eta,\quad y=\sqrt{(\varrho^{1\,2}-b^2)}\cos\eta\cos\vartheta,\quad z=\sqrt{(\varrho^{1\,2}-c^2)}\cos\eta\sin\vartheta$$

ausgedrückt werden, und die diesen Puncten entsprechenden Werthe einer Function V, welche der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

genügt, für jedes der beiden Ellipsoïde die Form

$$\Pi\left(\vartheta+\sqrt{-1}\log\frac{1+\sin\eta}{\cos\eta}\right)+\Pi_1\left(\vartheta-\sqrt{-1}\log\frac{1+\sin\eta}{\cos\eta}\right)$$

annehmen, so erhält der allgemeine Werth von V die Form

$$V=F_1(\sigma_1)+F_2(\sigma_2)+F_3(\sigma_3)+F_4(\sigma_4),$$

wo F_1, F_2, F_3, F_4 willkürliche Functionen und σ_1^2, σ_2^2, σ_3^2, σ_4^2 die vier Wurzeln der Gleichung

$$1=\sqrt{-1}\cdot\frac{x\sigma}{bc}+\frac{y\sqrt{(\sigma^2-b^2)}}{b\sqrt{(c^2-b^2)}}+\frac{z\sqrt{(c^2-\sigma^2)}}{c\sqrt{(c^2-b^2)}}$$

sind.

Setzt man

$$\log\frac{1+\sin\eta}{\cos\eta}=\vartheta_1,\quad\text{oder}\quad\frac{1-\sin\eta}{\cos\eta}=\sqrt{\frac{1-\sin\eta}{1+\sin\eta}}=e^{-\vartheta_1},$$

so erhält V in dem hier betrachteten Fall auf jedem der confocalen Ellipsoïde die Form

$$V=\Pi(\vartheta+\vartheta_1\sqrt{-1})+\Pi_1(\vartheta-\vartheta_1\sqrt{-1})$$

und genügt daher der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta_1^2}=0.$$

In demselben Falle hatte aber auch V auf jedem der confocalen Ellipsoïde die Form

$$V=\varphi(u_1\sqrt{-1}+u_2)+\psi(u_1\sqrt{-1}-u_2)$$

und genügte daher der ganz ähnlichen partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u_1^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial u_2^2}=0.$$

Was die Gränzen dieser verschiedenen Variabeln betrifft, so ist zu bemerken, dafs, während die Gröfse ϑ alle Werthe von 0 bis 2π, die Gröfse ϑ_1 alle Werthe von $-\infty$ bis ∞ annimmt, die Werthe von u_1 und u_2 immer endlich bleiben.

7.

Um die Gröfsen u, u_1, u_2 auf die übliche Form der elliptischen Integrale zu reduciren, führe man statt der Gröfsen ρ, ρ_1, ρ_2 Winkel ein, welche von 0

bis $\frac{1}{2}\pi$ wachsen oder abnehmen, wenn ϱ von c bis ∞, ϱ_1 von b bis c, ϱ_2 von 0 bis b wächst. Zu diesem Zweck setze man

$$\varrho = \sqrt{(c^2+(c^2-b^2)\operatorname{tang}^2\chi)},$$

woraus

$$\sqrt{\frac{\varrho^2-b^2}{c^2-b^2}} = \frac{1}{\cos\chi}, \quad \sqrt{\frac{\varrho^2-c^2}{c^2-b^2}} = \operatorname{tang}\chi, \quad \frac{1}{c^2-b^2}\,d\varrho = \frac{\operatorname{tang}\chi\,d\chi}{\cos\chi\sqrt{(c^2-b^2\sin^2\chi)}}$$

folgt, und daher

$$du = \frac{d\varrho}{\sqrt{((\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2))}} = \frac{d\chi}{\sqrt{(c^2-b^2\sin^2\chi)}}.$$

Ferner setze man

$$\varrho_1 = \sqrt{(c^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)},$$

woraus

$$\sqrt{\frac{\varrho_1^2-b^2}{c^2-b^2}} = \cos\varphi, \quad \sqrt{\frac{c^2-\varrho_1^2}{c^2-b^2}} = \sin\varphi,$$

$$\frac{1}{c^2-b^2}\,d\varrho_1 = \frac{-bc\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{(c^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)^3}}$$

folgt, und daher

$$du_1 = \frac{-d\varrho_1}{\sqrt{((\varrho_1^2-b^2)(c^2-\varrho_1^2))}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{(c^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)}}.$$

Endlich setze man

$$\varrho_2 = b\sin\psi,$$

woraus

$$du_2 = \frac{d\varrho_2}{\sqrt{((b^2-\varrho_2^2)(c^2-\varrho_2^2))}} = \frac{d\psi}{\sqrt{(c^2-b^2\sin^2\varphi)}}.$$

Wenn

$$\frac{b}{c} = k', \quad \frac{1}{c}\sqrt{(c^2-b^2)} = k,$$

so wird nach der *Legendre*schen Bezeichnung,

$$cu = F(\chi, k'), \quad cu_1 = F(\varphi, k), \quad cu_2 = F(\psi, k').$$

Setzt man

$$cu = v, \quad cu_1 = v_1, \quad cu_2 = v_2,$$

so erhält man nach den von mir eingeführten Bezeichnungen, wenn man überall den Modul k hinzudenkt, wenn kein anderer angegeben ist,

$$\varphi = \operatorname{am} v_1, \quad \psi = \operatorname{am}(v_2, k'),$$
$$\varrho_1 = c\Delta\operatorname{am} v_1, \quad \varrho_2 = c.k'\sin\operatorname{am}(v_2, k'),$$

und daher, wenn man noch die Formeln (2.) §. 3. zu Hülfe nimmt,

$$\sin\eta = \frac{x}{\varrho} = \frac{\varrho_1\varrho_2}{bc} = \varDelta\,\text{am}\,v_1 \sin\text{am}(v_2,k'),$$

$$\cos\eta\cos\vartheta = \frac{y}{\sqrt{(\varrho^2-b^2)}} = \frac{\sqrt{((\varrho_1^2-b^2)(b^2-\varrho_2^2))}}{b\sqrt{(c^2-b^2)}} = \cos\text{am}\,v_1\cos\text{am}(v_2,k'),$$

$$\cos\eta\sin\vartheta = \frac{z}{\sqrt{(\varrho^2-c^2)}} = \frac{\sqrt{((c^2-\varrho_1^2)(c^2-\varrho_2^2))}}{c\sqrt{(c^2-b^2)}} = \sin\text{am}\,v_1\varDelta\,\text{am}(v_2,k').$$

Um alle Puncte des Ellipsoïds zu erhalten, mufs man dem Winkel ϑ alle Werthe von 0 bis 2π und dem Winkel η alle Werthe von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $\frac{1}{2}\pi$, oder der Gröfse v_1 alle Werthe von 0 bis $4K$, der Gröfse v_2 alle Werthe von $-K'$ bis $+K'$ beilegen, wenn man, wie gewöhnlich, mit K und K' die ganzen Integrale

$$K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}},\qquad K' = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k'^2\sin^2\varphi)}}$$

bezeichnet.

Will man das im vorigen Paragraphen gefundene Resultat in der gewöhnlichen Bezeichnung der elliptischen Functionen darstellen, so erhält man den Satz,

dafs durch die Substitution

$$\tan\!g\,\vartheta = \frac{\tan\!g\,\text{am}\,v_1}{\sin\text{coam}(v_2,k')} = \frac{\sin\text{am}\,v_1\,\varDelta\,\text{am}(v_2,k')}{\cos\text{am}\,v_1\cos\text{am}(v_2,k')},$$

$$e^{-\vartheta_1} = \sqrt{\frac{1-\varDelta\,\text{am}\,v_1\sin\text{am}(v_2,k')}{1+\varDelta\,\text{am}\,v_1\sin\text{am}(v_2,k')}}$$

die partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 V}{\partial v_1^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial v_2^2} = 0,\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta_1^2} = 0$$

in einander übergehen.

Aus den Gleichungen, durch welche in dem Vorhergehenden $\tan\!g\,\vartheta$ und $e^{-\vartheta_1}$ bestimmt worden sind, ergeben sich die Formeln,

$$d\vartheta = \frac{\varDelta\varphi\cos\psi\,\varDelta(\psi,k')\,dv_1+k^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\,dv_2}{1-\varDelta^2\varphi\sin^2\psi},$$

$$d\vartheta_1 = \frac{-k^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\,dv_1+\varDelta\varphi\cos\psi\,\varDelta(\psi,k')\,dv_2}{1-\varDelta^2\varphi\sin^2\psi}.$$

Hieraus folgt nach mehreren Reductionen,

$$\frac{1}{\cos^2\eta}\{d\eta^2+\cos^2\eta\,d\vartheta^2\} = d\vartheta^2+d\vartheta_1^2 = \frac{1-k^2\sin^2\varphi-k'^2\sin^2\psi}{1-\varDelta^2\varphi\sin^2\psi}(dv_1^2+dv_2^2),$$

woraus sich zufolge der §. 2. gegebnen allgemeinen Formeln sogleich die Transformation der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial v_1^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial v_2^2}=0$ in die partielle Differentialgleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta_1^2}=0$ ergiebt.

* 71

8.

Man hat in §. 6. gesehn, dafs die Function

$$V = \Pi(\vartheta+\vartheta_1\sqrt{-1})+\Pi_1(\vartheta-\vartheta_1\sqrt{-1})$$

der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial v_1^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial v_2^2} = 0$$

genügt. Es mufs sich daher diese Function als die Summe zweier Functionen respective von $v_1+v_2\sqrt{-1}$ und von $v_1-v_2\sqrt{-1}$ darstellen lassen, wie sich auch aus bekannten Formeln der Theorie der elliptischen Functionen ergiebt.

Man erhält nämlich aus den Formeln des vorigen Paragraphen

$$\frac{\cos\eta(\cos\vartheta+\sqrt{-1}.\sin\vartheta)}{1+\sin\eta} = e^{-\vartheta_1+\vartheta\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{\cos\operatorname{am}v_1\cos\operatorname{am}(v_2,k')+\sqrt{-1}\sin\operatorname{am}v_1\Delta\operatorname{am}(v_2,k')}{1+\Delta\operatorname{am}v_1\sin\operatorname{am}(v_2,k')}.$$

Da (Fundam. pag. 34)

$$\sin\operatorname{am}(v_2,k') = -\sqrt{-1}\operatorname{tang}\operatorname{am}(v_2\sqrt{-1}),$$

$$\cos\operatorname{am}(v_2,k') = \frac{1}{\cos\operatorname{am}(v_2\sqrt{-1})},$$

$$\Delta\operatorname{am}(v_2,k') = \frac{\Delta\operatorname{am}(v_2\sqrt{-1})}{\cos\operatorname{am}(v_2\sqrt{-1})},$$

so wird

$$e^{-\vartheta_1+\vartheta\sqrt{-1}} = \frac{\cos\operatorname{am}v_1+\sqrt{-1}\sin\operatorname{am}v_1\Delta\operatorname{am}(v_2\sqrt{-1})}{\cos\operatorname{am}(v_2\sqrt{-1})-\sqrt{-1}\Delta\operatorname{am}v_1\sin\operatorname{am}(v_2\sqrt{-1})}.$$

Multiplicirt man Zähler und Nenner des vorstehenden Bruchs mit

$$\cos\operatorname{am}(v_2\sqrt{-1})+\sqrt{-1}\Delta\operatorname{am}v_1\sin\operatorname{am}(v_2\sqrt{-1}),$$

und bemerkt, dafs

$$\cos^2\operatorname{am}(v_2\sqrt{-1})+\Delta^2\operatorname{am}v_1\sin^2\operatorname{am}(v_2\sqrt{-1}) = 1-k^2\sin^2\operatorname{am}v_1\sin^2\operatorname{am}(v_2\sqrt{-1}),$$

ferner die Fundamentalformeln

$$\cos\operatorname{am}(v_1+v_2\sqrt{-1})$$
$$= \frac{\cos\operatorname{am}v_1\cos\operatorname{am}(v_2\sqrt{-1})-\sin\operatorname{am}v_1\Delta\operatorname{am}v_1\sin\operatorname{am}(v_2\sqrt{-1})\Delta\operatorname{am}(v_2\sqrt{-1})}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}v_1\sin^2\operatorname{am}(v_2\sqrt{-1})},$$

$$\sin\operatorname{am}(v_1+v_2\sqrt{-1})$$
$$= \frac{\sin\operatorname{am}v_1\cos\operatorname{am}(v_2\sqrt{-1})\Delta\operatorname{am}(v_2\sqrt{-1})+\sin\operatorname{am}(v_2\sqrt{-1})\cos\operatorname{am}v_1\Delta\operatorname{am}v_1}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}v_1\sin^2\operatorname{am}(v_2\sqrt{-1})},$$

so erhält man

$$e^{-\vartheta_1+\vartheta\sqrt{-1}} = \cos\operatorname{am}(v_1+v_2\sqrt{-1})+\sqrt{-1}\sin\operatorname{am}(v_1+v_2\sqrt{-1}) = e^{\sqrt{-1}\operatorname{am}(v_1+v_2\sqrt{-1})},$$

und daher auch, wenn man das Zeichen von $\sqrt{-1}$ ändert,

$$e^{-\vartheta_1-\vartheta\sqrt{-1}} = e^{-\sqrt{-1}\,\mathrm{am}(v_1-v_2\sqrt{-1})}.$$

Hieraus folgen die Formeln

$$\mathrm{am}(v_1+v_2\sqrt{-1}) = \vartheta+\vartheta_1\sqrt{-1},$$
$$\mathrm{am}(v_1-v_2\sqrt{-1}) = \vartheta-\vartheta_1\sqrt{-1},$$

aus denen sich sogleich der zu beweisende Satz ergiebt. Die §. 7. gegebnen Formeln können dazu angewandt werden, aus den Gröfsen

$$\sin\mathrm{am}\,v_1,\quad \cos\mathrm{am}\,v_1,\quad \Delta\,\mathrm{am}\,v_1,$$
$$\sin\mathrm{am}(v_2,k'),\quad \cos\mathrm{am}(v_2,k'),\quad \Delta\,\mathrm{am}(v_2,k')$$

den reellen und imaginären Theil von $\mathrm{am}(v_1+v_2\sqrt{-1})$ zu berechnen. Diese Formeln zeigen, dafs, wenn man

$$\mathrm{am}(v_1+v_2\sqrt{-1}) = \vartheta+\vartheta_1\sqrt{-1}$$

setzt, wo v_1 und v_2 reell, v_2 zwischen $-K'$ und $+K'$, und v_1 und ϑ gleichzeitig 0 sein sollen, die Gröfsen v_2 und ϑ_1 immer gleichzeitig positiv und negativ sind, und die beiden Winkel $\mathrm{am}\,v_1$ und ϑ immer in denselben Quadranten liegen, welchen Werth zwischen $-K'$ und $+K'$ auch v_2 annimmt. Nimmt man $\mathrm{am}\,v_1$ und ϑ in einem beliebigen Quadranten, und läfst v_2 sich einer seiner Gränzen K' oder $-K'$ nähern, so nähert sich ϑ dem nächsten ungeraden Vielfachen von $\pm\frac{1}{2}\pi$, und fällt mit demselben zusammen, wenn $v_2=\pm K'$ wird, wie auch der Werth von v_1 beschaffen ist. Wenn gleichzeitig $v_1=0$, oder ein Vielfaches von $\pm 2K$ und $v_2=+K'$ oder $-K'$, so wird respective $\vartheta_1=+\infty$ oder $-\infty$ und ϑ unbestimmt.

Ich bemerke noch die Formeln,

$$\cos.n\,\mathrm{am}(v_1+v_2\sqrt{-1})+\cos.n\,\mathrm{am}(v_1-v_2\sqrt{-1}) = (e^{n\vartheta_1}+e^{-n\vartheta_1})\cos n\vartheta,$$
$$\sqrt{-1}\,\{\cos.n\,\mathrm{am}(v_1+v_2\sqrt{-1})-\cos.n\,\mathrm{am}(v_1-v_2\sqrt{-1})\} = (e^{n\vartheta_1}-e^{-n\vartheta_1})\sin n\vartheta,$$
$$\sin.n\,\mathrm{am}(v_1+v_2\sqrt{-1})+\sin.n\,\mathrm{am}(v_1-v_2\sqrt{-1}) = (e^{n\vartheta_1}+e^{-n\vartheta_1})\sin n\vartheta,$$
$$\sqrt{-1}\,\{\sin.n\,\mathrm{am}(v_1-v_2\sqrt{-1})-\sin.n\,\mathrm{am}(v_1+v_2\sqrt{-1})\} = (e^{n\vartheta_1}-e^{-n\vartheta_1})\cos n\vartheta.$$

Diese Formeln zeigen, dafs für einen positiven Werth von v_2 der erste und vierte und eben so der zweite und dritte Ausdruck, wenn n ins Unendliche wächst, selber ihren absoluten Werthen nach ins Unendliche wachsen, während ihre Unterschiede unendlich klein werden.

Berlin, den 10ten Juli 1847.

9.

De seriebus ac differentiis observatiunculae.

(Auct. *C. G. J. Jacobi.*)

Proponatur series

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots$$

eiusque aliae post alias formentur differentiarum series, ac denotetur $(n+1)$tus terminus $m$tae differentiarum seriei signo

$$\Delta^m A_n.$$

Constat inter terminos $\Delta^m A_n$ innumeras locum habere relationes *lineares*. Scilicet ex arbitrio sumtis inter binas quantitates A et $A-1$ aequationibus ipsius A respectu identicis, quae sane habentur numero infinitae, singulae e singulis oriuntur aequationes inter terminos $\Delta^m A_n$. Etenim cum functionem quantitatum x et y rationalem integram quamcunque $f(x,y)$ habere liceat pro aggregato terminorum $x^n y^m$ lineari, si statuitur

$$F(x,y) = (x-y-1)f(x,y),$$

erit $F(x,y)$ huiusmodi terminorum $x^n y^m$ aggregatum tale, quod evanescit ponendo $x-y-1=0$ sive

$$x = A, \quad y = A-1.$$

Jam dico, quod per principia nota demonstratur, aequationem $F(x,y)=0$ sive $F(A,A-1)=0$ tum quoque locum habere, si singulis productis $A^m(A-1)^n$ singuli substituantur termini differentiales $\Delta^m A_n$. Unde hoc habetur theorema:

Theorema I.

Ex unaquaque aequatione inter quantitates A et $A-1$, ut aequatione lineari inter terminos $A^n(A-1)^m$ spectata, emergit formula differentialis, dummodo singulis terminis $A^n(A-1)^m$ substituantur termini differentiales $\Delta^m A^n$.

Theorema reciprocum eo patet, quod posito $A_n = A^n$, fiat

$$\Delta^m A^n = A^n(A-1)^m.$$

Theorema antecedens etiam tum valet, si termini $\Delta^m A_n$ in infinitum excurrunt, dummodo certo ordine progredientes convergant.

E quaque aequatione inter quantitates A et $A-1$ identica, si ipsi A substituitur $-(A-1)$, similis derivatur identica inter quantitates $-(A-1)$ et $-A$. Unde si aequationi identicae propositae forma induitur aequationis inter quanti-

tates $\Delta^n(A-1)^m$ linearis, ex ea alia obtinetur ponendo cuiusque termini $\Delta^n(A-1)^m$ loco terminum $(-1)^{m+n}\Delta^m(A-1)^n$. Hinc sequens fluit

Theorema II.

Ex unaquaque relatione lineari inter differentias $\Delta^m A_n$ altera obtinetur, si in locum cuiusque termini $\Delta^m A_n$ ponitur terminus

$$(-1)^{m+n}\Delta^n A_m.$$

Formulae duae elementares,

$$\Delta^m A_0 = A_m - mA_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}A_{m-2}\ldots \pm A_0,$$

$$A_m = \Delta^m A_0 + m\Delta^{m-1}A_0 + \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^{m-2}A_0 \ldots + A_0,$$

per theorema II. altera ex altera fluunt. Secundum theorema I. altera ex evolutione potestatis $(A-1)^m$, altera ex evolutione potestatis $A^m = (A-1+1)^m$ eruitur. Alia varia praetereo exempla, quibus theorema generale I. illustrari possit. Addam tantum concinnam demonstrationem duarum insignium formularum, quas *Eulerus* olim in Calculo Differentiali tradidit. Invenit *Eulerus*, posito

$$x = \frac{y}{1+y} \quad \text{sive} \quad y = \frac{x}{1-x},$$

fieri

$$A_0 x + A_1 x^2 + A_2 x^3 + A_3 x^4 + \text{etc.}$$
$$= A_0 y + \Delta A_0 . y^2 + \Delta^2 A_0 . y_3 + \Delta^3 A_0 . y^4 + \text{etc.}$$

Quae transformatio sequitur e formula

$$\frac{x}{1-Ax} = \frac{y}{1-(A-1)y},$$

functione altera secundum ipsius x, altera secundum ipsius y potestates ascendentes evoluta, et secundum theorema I. in locum quantitatum A^n et $(A-1)^n$ terminis A_n et $\Delta^n A_0$ positis.

Secundo loco, posito

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.},$$

atque

$$S = aA_0 + bA_1 x + cA_2 x^2 + dA_3 x^3 + \text{etc.},$$

invenit *Eulerus* fieri

$$S = A_0 f(x) + \Delta A_0 . x\frac{df(x)}{dx} + \frac{1}{1.2}\Delta^2 A_0 . x^2\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$
$$+ \frac{1}{1.2.3}\Delta^3 A_0 . x^3\frac{d^3 f(x)}{dx^3} + \text{etc.}$$

Demonstratio transformationis prodit e formula

$$f(Ax) = f(x+(A-1)x),$$

parte altera secundum ipsius Ax, altera theorematis *Tayloriani* ope secundum ipsius $(A-1)x$ potestates evoluta, ac deinde ipsis A^n, $(A-1)^n$ mutatis in A_n, $\Delta^n A_0$.

Serie

$$1,\quad \frac{\beta}{\gamma},\quad \frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)},\quad \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+1)},\quad \text{etc.}$$

proposita, fit differentiarum series *prima*,

$$\frac{\beta-\gamma}{\gamma},\quad \frac{\beta-\gamma}{\gamma}\cdot\frac{\beta}{\gamma+1},\quad \frac{\beta-\gamma}{\gamma}\cdot\frac{\beta(\beta+1)}{(\gamma+1)(\gamma+2)},\quad \frac{\beta-\gamma}{\gamma}\cdot\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)},\quad \text{etc.},$$

secunda,

$$\frac{(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)}{\gamma(\gamma+1)},\quad \frac{(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)}{\gamma(\gamma+1)}\cdot\frac{\beta}{\gamma+2},\quad \frac{(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)}{\gamma(\gamma+1)}\cdot\frac{\beta(\beta+1)}{(\gamma+2)(\gamma+3)},\quad \text{etc.}$$

et ita porro. Generaliter si seriei propositae terminos denotamus per

$$A_n = \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)},$$

erit

$$\Delta^m A_0 = \frac{(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)\dots(\beta-\gamma-m+1)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+m-1)},$$

ac generalius

$$\Delta^m A_n = \frac{(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)\dots(\beta-\gamma-m+1).\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\dots(\gamma+m+n-1)}.$$

Hinc eruitur

Theorema III.

Quaecunque inter quantitates $A^n(A-1)^m$ habetur aequatio linearis, iusta manet, si in ea ipsis $A^n(A-1)^m$ substituuntur quantitates

$$\frac{(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)\dots(\beta-\gamma+m-1).\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\dots(\gamma+m+n-1)},$$

designantibus β et γ quantitates quascunque.

Applicemus hanc propositionem ad aequationem quae nascitur evolutione fractionum aequalium,

$$\frac{1}{(1-Ax)^\alpha} = \frac{1}{(1-x-(A-1)x)^\alpha},$$

vel, si placet, in theoremate *Euleriano* posteriore ponamus $f(x) = (1-x)^{-\alpha}$ ipsisque A_n, $\Delta^m A_0$ valores supra traditos tribuamus; venit nota formula,

$$1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1).\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2).\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\text{etc.}$$
$$=\frac{1}{(1-x)^\alpha}\left\{1+\frac{\alpha(\beta-\gamma)}{1.\gamma}\frac{x}{1-x}+\frac{\alpha(\alpha+1).(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{(1-x)^2}+\text{etc.}\right\}.$$

Series uncis inclusa e proposita provenit ponendo α loco β, $\gamma-\beta$ loco α, $\frac{x}{x-1}$ loco x. Qua igitur similiter atque proposita transformata, obtinetur

$$1+\frac{\alpha(\beta-\gamma)}{1.\gamma}\cdot\frac{x}{1-x}+\frac{\alpha(\alpha+1).(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{(1-x)^2}+\text{etc.}$$
$$=\frac{1}{(1-x)^{\beta-\gamma}}\left\{\frac{(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)}{1.\gamma}x+\frac{(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1).(\alpha-\gamma)(\alpha-\gamma-1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2+\text{etc.}\right\}.$$

Duabus iunctis transformationibus eruitur formula celebris ***Euleriana***,

$$1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1).\beta(\beta+1)}{2.\gamma(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2).\beta(\beta+1)(\beta+2)}{2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\text{etc.}$$
$$=\frac{1}{(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma}}\left\{1+\frac{(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)}{\gamma}x+\frac{(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)(\alpha-\gamma)(\alpha-\gamma-1)}{2.\gamma(\gamma+1)}x^2+\text{etc.}\right\}.$$

(V. Institutt. Calc. Int. t. IV pag. 245; Nova Acta t. XII pag. 58.)

Demonstratio harum transformationum antecedentibus tradita in eam redit, quam dedit Cl. ***Pfaff*** ineunte anno 1797 in Commentatione,

Observationes analyticae ad L. Euleri institutionum calculi integralis Vol. IV Supplem. II et IV,

quae ***Supplemento Historiae tomi XI Novorum Actorum Petropol.*** inserta est. Idem vir eodem loco alteram ***Eulerianae*** formulae addidit demonstrationem, innixam lemmati eleganti,

pro numero l integro positivo positoque $s=l+m+n+p-1$, ***fieri***

$$1+\frac{l.m.n}{1.p.s}+\frac{l(l-1).m(m-1).n(n-1)}{1.2.p(p+1).s(s-1)}+\text{etc.}$$
$$=\frac{(p+m)(p+m+1)..(p+m+l-1).(p+n)(p+n+1)..(p+n+l-1)}{p(p+1)..(p+l-1).(p+m+n)(p+m+n+1)..(p+m+n+l-1)}$$
$$=\frac{\Pi(p-1)\Pi(s-l)\Pi(s-m)\Pi(s-n)}{\Pi(p+l-1)\Pi(p+m-1)\Pi(p+n-1)\Pi s}.$$

Quod lemma, Cl. ***Pfaff*** demonstravit, si pro aliquo ipsius l valore valeat, valere idem pro valore ipsius l unitate maiore, unde pro ipsius l valore integro positivo quocunque valere sequitur, cum pro $l=1$ facilè pateat. Eius autem lemmatis ope Cl. ***Pfaff*** ipsam transigendo multiplicationem per factorem $(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}$ in seriem evolutum prodire formulam ***Eulerianam*** demonstravit.

Lemma commemoratum, quod facile patet ad valores ipsius l integros positivos non restringi, peti potest e transformatione seriei generalioris

$$1+\frac{\alpha.\beta.\lambda}{1.\gamma.\nu}+\frac{\alpha(\alpha+1).\beta(\beta+1).\lambda(\lambda+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1).\nu(\nu+1)}+\text{etc.},$$

quam dedit Cl. *Kummer* in Diar. Crell. t. XV pg. 172. Placuit autem, data occasione, commentationem Cl[i]. *Pfaff* nimis latente loco publicatam ab oblivione vindicasse. Addo eum ibidem modo concinno traditas transformationes transcendentis

$$1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1).\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2+\text{etc.}$$

exhibere, scilicet formulis, duarum quantitatum r et r' commutationem permittentibus,

$$\frac{1}{(1+x)^r}\left\{1+\frac{r(p+r')}{1.p}x+\frac{r(r-1).(p+r')(p+r'+1)}{1.2.p(p+1)}x^2+\text{etc.}\right\}$$

$$=\frac{1}{(1+x)^{r'}}\left\{1+\frac{r'(p+r)}{1.p}x+\frac{r'(r'-1).(p+r)(p+r+1)}{1.2.p(p+1)}x^2+\text{etc.}\right\}$$

$$=1+\frac{rr'}{1.p}\frac{x}{1+x}+\frac{r(r-1).r'(r'-1)}{1.2.p(p+1)}\frac{x^2}{(1+x)^2}+\text{etc.}$$

Quae transformationes pro valoribus saltem constantium certos limites non egredientibus de luculenta etiam fluunt transcendentis expressione per integralia definita, ab *Eulero* in Institt. Calc. Int. tradita.

Antecedentibus obiter adnotatis, iam de seriebus ac differentiis theorema hoc propono, propositione I. generalius:

Theorema IV.

Proponatur series

$$A_l,\ A_{l+1},\ \ldots\ A_{l+m}$$

eiusque designetur m^{ta} *differentia per* $A_{l,m}$; *seriei*

$$A_{l,m},\ A_{l,m+1},\ \ldots\ A_{l,m+n}$$

designetur n^{ta} *differentia per* $A_{l,m,n}$; *seriei*

$$A_{l,m,n},\ A_{l,m,n+1},\ \ldots\ A_{l,m,n+p}$$

designetur p^{ta} *differentia per* $A_{l,m,n,p}$, *et ita porro: quibus positis, in aequatione identica quacunque, inter quantitates*

$$A,\ A-1,\ A-2,\ A-3\ \text{etc.}$$

locum habente atque ut aequatione lineari inter quantitates huiusmodi

$$A^l(A-1)^m(A-2)^n(A-3)^p\ldots$$

exhibita, quantitatibus illis substituere licet terminos

$$A_{l,m,n,p\ldots}$$

Theorema traditum paucis exemplis illustrabo.

Posito

$$y = \log(1+x),$$

fit

$$e^{Ay} = 1 + Ay + A^2\frac{y^2}{2} + A^3\frac{y^3}{2.3} + \text{etc.}$$

$$= 1 + Ax + A(A-1)\frac{x^2}{2} + A(A-1)(A-2)\frac{x^3}{2.3} + \text{etc.}$$

$$= (1+x)\left\{1 + (A-1)x + (A-1)(A-2)\frac{x^2}{2} + (A-1)(A-2)(A-3)\frac{x^3}{2.3} + \text{etc.}\right\}$$

$$= (1+x)^2\left\{1 + (A-2)x + (A-2)(A-3)\frac{x^2}{2} + (A-2)(A-3)(A-4)\frac{x^3}{2.3} + \text{etc.}\right\},$$

et ita porro. Hinc secundum propositionem traditam sequitur, posito $y = \log(1+x)$, fieri

$$1 + A_1 y + A_2\frac{y^2}{2} + A_3\frac{y^3}{2.3} + \text{etc.}$$

$$= 1 + A_1 x + A_{1,1}\frac{x^2}{2} + A_{1,1,1}\frac{x^3}{2.3} + \text{etc.}$$

$$= (1+x)\left\{1 + A_{0,1}x + A_{0,1,1}\frac{x^2}{2} + A_{0,1,1,1}\frac{x^3}{2.3} + \text{etc.}\right\}$$

$$= (1+x)^2\left\{1 + A_{0,0,1}x + A_{0,0,1,1}\frac{x^2}{2} + A_{0,0,1,1,1}\frac{x^3}{2.3} + \text{etc.}\right\},$$

et ita porro.

Cl. *Stirling* olim in *Methodo Differentiali* dedit formulas,

$$\frac{1}{x-A} = \frac{1}{x} + \frac{A}{x^2} + \frac{A^2}{x^3} + \frac{A^3}{x^4} + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{A}{x(x-1)} + \frac{A(A-1)}{x(x-1)(x-2)} + \frac{A(A-1)(A-2)}{x(x-1)(x-2)(x-3)} + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{x-1} + \frac{A-1}{(x-1)(x-2)} + \frac{(A-1)(A-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} + \frac{(A-1)(A-2)(A-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)} + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{x-2} + \frac{A-2}{(x-2)(x-3)} + \frac{(A-2)(A-3)}{(x-2)(x-3)(x-4)} + \frac{(A-2)(A-3)(A-4)}{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)} + \text{etc.}$$

et ita porro. E quibus per propositionem traditam emergunt sequentes:

* 21

$$\frac{1}{x}+\frac{A_1}{x^2}+\frac{A_2}{x^3}+\frac{A_3}{x^4}+\text{etc.}$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{A_1}{x(x-1)}+\frac{A_{1,1}}{x(x-1)(x-2)}+\frac{A_{1,1,1}}{x(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$=\frac{1}{x-1}+\frac{A_{0,1}}{(x-1)(x-2)}+\frac{A_{0,1,1}}{(x-1)(x-2)(x-3)}+\frac{A_{0,1,1,1}}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}+\text{etc.}$$

$$=\frac{1}{x-2}+\frac{A_{0,0,1}}{(x-2)(x-3)}+\frac{A_{0,0,1,1}}{(x-2)(x-3)(x-4)}+\frac{A_{0,0,1,1,1}}{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}+\text{etc.}$$

et ita porro. Generalior formula sic eruitur.

Data functione $f(x)$, formetur series

$$f(x),\quad f(2x),\quad f(3x),\quad f(4x)\ \text{etc.},$$

eiusque differentiarum series prima, secunda, tertia etc. Quarum serierum termini primi si designantur per

$$\nabla^1 f(x),\quad \nabla^2 f(x),\quad \nabla^2 f(x),\quad \text{etc.}$$

habetur nota interpolationis formula,

$$f(Ax)=f(x)+(A-1)\nabla^1 f(x)+\frac{(A-1)(A-2)}{1.2}\nabla^2 f(x)+\text{etc.}$$

Unde theorematis IV. ope fluit hoc

Theorema V.

Detur quaecunque series

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ etc.,$$

sitque

$$a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+etc.=f(x),$$

porro sit

$$A_0a+A_1a_1x+A_2a_2x^2+A_3a_3x^3\ etc.=S;$$

datis valoribus quantitatum

$$f(x),\quad f(2x),\quad f(3x),\quad f(4x),\quad etc.$$

earum quantitatum formentur differentiarum series prima, secunda, tertia etc.; quarum termini primi si vocantur

$$\nabla^1 f(x),\quad \nabla^2 f(x),\quad \nabla^3 f(x),\quad etc.$$

fit

$$S=A_0f(x)+A_{0,1}\nabla^1 f(x)+A_{0,1,1}\frac{\nabla^2 f(x)}{1.2}+A_{0,1,1,1}\frac{\nabla^3 f(x)}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Formula antecedente theoremate proposita analoga est *Eulerianae* supra traditae, quippe *differentialium* functionis $f(x)$ in formula *Euleriana* locum in hac formula tenent primi termini serierum *differentiarum*, quae de serie $f(x)$, $f(2x)$, $f(3x)$ etc. derivantur. Theoremate V. patet, ponendo

$$\Delta^i A_0 = B_i, \quad \Delta^i B_0 = C_i, \quad \Delta^i C_0 = D_i, \text{ etc.}$$

si unquam perveniatur ad seriem sive totam evanescentem sive in quantitates evanescentes desinentem, seriei S obtineri summam finitam.

Berol. 25 Juli 1847.

10.

Über Curven dritter Ordnung und die Kegelschnitte, welche diese Curven in drei verschiedenen Puncten berühren.

(Von Herrn *Otto Hesse*, Prof. der Math. an der Universität zu Königsberg.)

(Fortsetzung der Abhandlungen No. 10. und No. 11. 28ten Bandes.)

1.

Wenn man durch f eine homogene Function dritter Ordnung von den Variabeln x_1, x_2, x_3 bezeichnet, so wird die Determinante φ, gebildet aus den zweiten partiellen Differentialquotienten

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}, \end{array}$$

wieder eine homogene Function der dritten Ordnung, welche ich in meiner Abhandlung „Über die Elimination der Variabeln aus drei algebraischen Gleichungen vom zweiten Grade mit zwei Variabeln (Bd. 28. S. 68)" mit dem Namen *Determinante der Function f* bezeichnet habe. Dieser Bezeichnung werde ich mich auch bei der vorliegenden Untersuchung bedienen, welche als eine geometrische Interpretation und Erweiterung der in der citirten Schrift gewonnenen analytischen Resultate anzusehen ist.

Während nun die Bestimmung der Determinante einer gegebenen homogenen Function 3ten Grades von drei Variabeln nur die einfachsten analytischen Operationen erfordert, führt die umgekehrte Aufgabe: „Diejenige Function F zu bestimmen, deren Determinante eine gegebene homogene Function 3ter Ordnung von 3 Variabeln ist," auf eine Gleichung 3ten Grades. Denn ich habe in der citirten Abhandlung S. 89 bewiesen, dafs die gesuchte Function von der Form

$$F = \mathfrak{d}f + \delta\varphi$$

sein mufs und dafs die Determinante Φ einer Function von dieser Form, wieder

dieselbe Form

$$\Phi = Df + \Delta\varphi$$

hat; wo D und Δ homogene Functionen der Constanten d und δ von der 3ten Ordnung sind. Auch die Bildung dieser Functionen habe ich angegeben *).

Wenn Φ gleich f werden soll, so mufs

$$D = 1, \quad \Delta = 0$$

sein. Dieses sind zwei Gleichungen dritten Grades in Rücksicht auf die zu bestimmenden Gröfsen d und δ, welche 9 Auflösungen zulassen. Da aber sowohl D als Δ homogene Functionen dritten Grades sind, in Rücksicht auf d und δ, so werden $\frac{D}{d^3}$ und $\frac{\Delta}{d^3}$ Functionen 3ten Grades der einen Variablen $\frac{\delta}{d}$ sein. Führt man diese statt δ als Unbekannte ein, so finden sich die beiden Unbekannten d und $\frac{\delta}{d}$ aus den beiden Gleichungen

$$d^3 = \frac{1}{\frac{D}{d^3}} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta}{d^3} = 0.$$

Die zweite dieser Gleichungen giebt drei Werthe der zweiten Unbekannten. Setzt man diese Werthe in den Theil rechts der ersten Gleichung, so erhält man für jeden Werth der zweiten Unbekannten drei Werthe der

---

*) Die Bildung der Functionen D und Δ ist S. 88 durch die Formeln (51.)

$$RD = \Phi\left(\frac{1}{\varrho}\cdot q\right); \quad R\Delta = \Phi(p)$$

angedeutet. Die Gröfse R zu bestimmen, dienen die Gleichungen (32*. S. 83), in welchen die Gröfsen a und b die Coëfficienten der Potenzen und Producte der Variabeln in den Functionen f und φ, also bekannte Gröfsen bedeuten. Löset man diese, in Rücksicht auf die 6 Producte x_1x_1, x_2x_2, x_3x_3, x_2x_3, x_3x_1, x_1x_2 lineären Gleichungen auf, so als ob die 6 Producte die Unbekannten wären: so erhält man, wie ich nachgewiesen habe, Gleichungen von der Form (33*.), in welchen R den gemeinsamen Nenner der Unbekannten bedeutet. Sowohl dieser Nenner, als die Coëfficienten der 6 Gröfsen $f_1, f_2, f_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, welche mit $\frac{1}{\varrho}\cdot q$ und p bezeichnet worden sind, werden durch die Auflösung bekannt. Bildet man endlich die Determinante Φ der Function F und setzt in derselben für alle Producte $x_\varkappa x_\lambda x_\mu$ entweder $\frac{1}{\varrho}\cdot q_{\varkappa,\lambda,\mu}$ oder $p_{\varkappa,\lambda,\mu}$, so erhält man im ersten Falle den mit $\Phi\left(\frac{1}{\varrho}q\right)$ bezeichneten Ausdruck, im zweiten Fall den Ausdruck $\Phi(p)$. Diese Bestimmung der Functionen D und Δ läfst in der That nichts weiter als etwa gröfsere Einfachheiten zu wünschen übrig. Da gleichwohl Herr *Cayley* (*Crelle*'s Journ. Bd. 29. pag. 55) behauptet, dafs ich die Form der Functionen D und Δ nicht angegeben habe, so sehe ich, dafs meine Darstellung einen Zweifel hat aufkommen lassen, den ich jetzt beseitigt zu haben glaube.

ersten, welche sich nur durch einen Factor, gleich der dritten Wurzel der Einheit, von einander unterscheiden. Man findet also 9 Functionen F, deren Determinanten die gegebene Function f sind, wenn man die 9 Werthenpaare der Unbekannten in die Gleichung

$$F = d\left(f + \frac{\delta}{d}\varphi\right)$$

setzt.

Von diesen 9 Functionen F sind aber nur die drei, welche den drei Wurzeln der cubischen Gleichung $\frac{\Delta}{d^3} = 0$ entsprechen, wesentlich von einander verschieden. Denn es ergeben sich aus ihnen die 6 andern durch Multiplication mit den dritten Wurzeln der Einheit. Wenn im Folgenden von den drei verschiedenen Functionen F die Rede sein wird, so sollen darunter nur die drei ersten verstanden werden.

2.

Wenn f eine der drei Functionen bedeutet, deren Determinante gleich einer beliebigen gegebenen homogenen Function φ dritter Ordnung von den drei Variabeln x_1, x_2, x_3 ist und man setzt der Kürze wegen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = u_{1,1}; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = u_{2,2}; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = u_{3,3},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = u_{2,3} = u_{3,2}; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} = u_{3,1} = u_{1,3}; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = u_{1,2} = u_{2,1},$$

so erhält man die Gleichung $\varphi = 0$, wenn man X_1, X_2, X_3 zwischen folgenden drei Gleichungen eliminirt:

$$1. \quad \begin{cases} X_1 u_{1,1} + X_2 u_{1,2} + X_3 u_{1,3} = 0, \\ X_1 u_{2,1} + X_2 u_{2,2} + X_3 u_{2,3} = 0, \\ X_1 u_{3,1} + X_2 u_{3,2} + X_3 u_{3,3} = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichung $\varphi = 0$ ist unter der Voraussetzung, dafs $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$, oder wie ich mich kürzer ausdrücken werde, x_1, x_2, x_3 die Coordinaten eines variabeln Punctes p bezeichnen, der analytische Ausdruck einer beliebigen Curve dritter Ordnung. Diese Curve wird der Gegenstand der folgenden Untersuchung sein. Den Coordinaten x_1, x_2, x_3 jedes Punctes dieser Curve entspricht ein System Werthe X_1, X_2, X_3, welches den Gleichungen (1.) genügt. Betrachtet man diese Werthe, in demselben Coordinatensystem, als die Coordinaten eines zweiten Punctes P, so entspricht unter der Vermittelung der Gleichungen (1.) einem jeden Puncte p der Curve $\varphi = 0$ ein anderer Punct P

derselben Curve; und umgekehrt dem Puncte P der Punct p. Denn man kann in den Gleichungen (1.) x_1, x_2, x_3 mit X_1, X_2, X_3 vertauschen, ohne die Gleichungen selbst zu ändern; weshalb auch das Resultat der Elimination von x_1, x_2, x_3, welches den geometrischen Ort des Punctes P giebt, aus der Gleichung $\varphi=0$ hervorgeht, wenn man X_1, X_2, X_3 statt x_1, x_2, x_3 setzt.

Die Gleichungen (1.) lassen eine leichte geometrische Deutung zu. Sie sind die Bedingungsgleichungen zwischen den Coordinaten der beiden Puncte P und p, welche erfüllt werden müssen, wenn die genannten beiden Puncte harmonische Pole der drei Kegelschnitte

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial x_3}=0$$

sind; oder was dasselbe ist, eines jeden Kegelschnitts aus dem durch die Gleichung

$$\lambda_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\lambda_3\frac{\partial f}{\partial x_3}=0$$

dargestellten Systeme von Kegelschnitten. Die Curve dritter Ordnung $\varphi=0$ ist der geometrische Ort dieser Pole. (Harmonische Pole eines Kegelschnitts nennt man bekanntlich jedes Punctenpaar, von der Eigenschaft, dafs die durch sie gelegte gerade Linie den Kegelschnitt in einem zweiten Punctenpaar schneidet, welches zu dem ersten harmonisch ist.) Construirt man also ein Paar Puncte, welche harmonische Pole sind, zugleich für alle drei Kegelschnitte, oder für das ganze System von Kegelschnitten: so sind dieselben zwei unter der Vermittelung der Gleichungen (1.) einander entsprechende Puncte P und p und liegen beide in der betrachteten Curve dritter Ordnung $\varphi=0$.

Wenn zwei solcher Punctenpaare gegeben sind, so findet man ein drittes Paar durch Anwendung des folgenden Lehrsatzes, dessen Beweis ich in Bd. 20. S. 301 dieses Journals gegeben habe, nämlich: *Wenn die Endpuncte zweier Diagonalen eines vollständigen Vierecks zwei Paare harmonischer Pole eines Kegelschnitts sind, so sind auch die Endpuncte der dritten Diagonale harmonische Pole desselben Kegelschnitts.*

Der analytische Beweis dieses Satzes ergiebt sich aus den Bedingungsgleichungen zwischen den Coordinaten der 6 Puncte, welche die Diagonalen eines vollständigen Vierecks begrenzen. Wenn man nämlich durch x_1, x_2, x_3 und X_1, X_2, X_3 die Coordinaten der Endpuncte p, P der ersten, durch x_1', x_2', x_3' X_1', X_2', X_3' die Endpuncte p', P' der zweiten Diagonale, endlich durch x_1'', x_2'', x_3'' und X_1'', X_2'', X_3'' die Endpuncte p'', P'' der dritten Diagonale

bezeichnet, so sind die erwähnten Bedingungsgleichungen:

$$Ax_1X_1 + A'x_1'X_1' + A''x_1''X_1'' = 0,$$
$$Ax_2X_2 + A'x_2'X_2' + A''x_2''X_2'' = 0,$$
$$Ax_3X_3 + A'x_3'X_3' + A''x_3''X_3'' = 0;$$

$$A(x_2X_3 + x_3X_2) + A'(x_2'X_3' + x_3'X_2') + A''(x_2''X_3'' + x_3''X_2'') = 0,$$
$$A(x_3X_1 + x_1X_3) + A'(x_3'X_1' + x_1'X_3') + A''(x_3''X_1'' + x_1''X_3'') = 0,$$
$$A(x_1X_2 + x_2X_1) + A'(x_1'X_2' + x_2'X_1') + A''(x_1''X_2'' + x_2''X_1'') = 0,$$

in welchen die Gröfsen A, A', A'' unbestimmte Constanten bedeuten. Stellt man nun die Bedingungsgleichungen

$$\alpha_{1,1}x_1X_1 + \alpha_{2,2}x_2X_2 + \alpha_{3,3}x_3X_3 + \alpha_{2,3}(x_2X_3 + x_3X_2) + \alpha_{3,1}(x_3X_1 + x_1X_3) + \alpha_{1,2}(x_1X_2 + x_2X_1) = 0,$$
$$\alpha_{1,1}x_1'X_1' + \alpha_{2,2}x_2'X_2' + \alpha_{3,3}x_3'X_3' + \alpha_{2,3}(x_2'X_3' + x_3'X_2') + \alpha_{3,1}(x_3'X_1' + x_1'X_3') + \alpha_{1,2}(x_1'X_2' + x_2'X_1') = 0,$$
$$\alpha_{1,1}x_1''X_1'' + \alpha_{2,2}x_2''X_2'' + \alpha_{3,3}x_3''X_3'' + \alpha_{2,3}(x_2''X_3'' + x_3''X_2'') + \alpha_{3,1}(x_3''X_1'' + x_1''X_3'') + \alpha_{1,2}(x_1''X_2'' + x_2''X_1'') = 0$$

auf, welche erfüllt werden müssen, wenn die drei Punctenpaare harmonische Pole eines Kegelschnitts

$$\alpha_{1,1}x_1^2 + \alpha_{2,2}x_2^2 + \alpha_{3,3}x_3^2 + 2\alpha_{2,3}x_2x_3 + 2\alpha_{3,1}x_3x_1 + 2\alpha_{1,2}x_1x_2 = 0$$

sein sollen, so wird man wahrnehmen, dafs sich die letzte Bedingungsgleichung mit Hülfe der beiden ersten und der vorhergehenden Systeme von 6 Gleichungen findet, wenn man die Gleichungen der Reihe nach mit $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,2}$, $\alpha_{3,3}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{3,1}$, $\alpha_{1,2}$, multiplicirt und die Producte addirt.

Vermöge des eben bewiesenen Satzes erhält man nun aus zwei Punctenpaaren P, p; P', p', deren Coordinaten den Gleichungen (1.) genügen, ein drittes Paar, wenn man der Curve dritter Ordnung ein Viereck einschreibt, dessen Diagonalen Pp und $P'p'$ sind, dieses Viereck vervollständigt und die Endpuncte der dritten Diagonale nimmt. Dieses läfst sich auch als Lehrsatz wie folgt aussprechen: *Wenn drei Puncte P, P', P'' der Curve dritter Ordnung $p = 0$ auf einer geraden Linie liegen, so bilden die ihnen unter der Vermittelung der Gleichungen (1.) entsprechenden Puncte p, p', p'' die Ecken eines Dreiecks, dessen Seiten $p'p''$, $p''p$, pp' respective durch die Puncte P, P', P'' gehen.*

Es ergiebt sich hieraus zugleich eine leichte Construction des, einem beliebigen Puncte P der Curve entsprechenden Punctes p; wenn *ein* solches Punctenpaar P', p' gegeben ist. Denn verbindet man die Puncte P, P' durch

eine gerade Linie, so schneidet dieselbe die Curve in einem Puncte P''. Verbindet man diesen mit dem Puncte p' durch eine zweite gerade Linie, so schneidet letztere die Curve in dem gesuchten Puncte p. Man erhält aber auch denselben Punct p, wenn man den Schnittpunct p'' der geraden Linie Pp' und der Curve, mit dem Puncte P' durch eine gerade Linie verbindet. Denn diese geht ebenfalls durch den Punct p.

Um zu jedem Puncte P den unter Vermittelung der Gleichungen (1.) entsprechenden Punct p construiren zu können, wenn nichts weiter als die Curve $\varphi = 0$ selbst gegeben ist, bleibt noch übrig, die Construction *eines* Punctenpaares P', p' zu finden. Zu diesem Zwecke stellen wir uns den Punct P dem Puncte P' so nahe gerückt vor, dafs beide zusammenfallen. Die gerade Linie PP' wird in diesem Falle zur Tangente der Curve. Die ihnen entsprechenden Puncte p, p' fallen ebenfalls zusammen. Zieht man nun von dem Schnittpuncte P'' der Tangente PP' und der Curve die gerade Linie $P''p'$, welche, wie wir gesehen haben, durch p geht, so wird, weil p und p' zusammenfallen, die gerade Linie $P''p'$ eine Tangente im Puncte p werden. Demnach kann der, einem beliebigen Puncte P' unter Vermittelung der Gleichungen (1.) entsprechende Punct p' auf folgende Weise construirt werden. Man ziehe die Tangente in dem Puncte P'. Von dem Schnittpuncte P'' derselben mit der Curve ziehe man eine andere Tangente. Der Berührungspunct dieser zweiten Tangente wird der gesuchte Punct p' sein. Nun lassen sich aber von einem Puncte P'' der Curve, wenn man die Tangente in diesem Puncte ausnimmt, 4 Tangenten an die Curve ziehen, von denen die eine die Tangente im Puncte P' ist. Von den Berührungspuncten der drei andern wird demnach jeder dem Puncte P' entsprechen. Und in der That giebt es auch drei, einem gegebenen Puncte P' der Curve unter Vermittelung der Gleichungen (1.) entsprechende Puncte p'. Denn da in die Gleichungen (1.) die Coëfficienten aus der Function f eingehen, aber, wie man gesehen hat, drei verschiedene Functionen f existiren: so vereinigt auch das System Gleichungen (1.) drei verschiedene, den drei Functionen f entsprechende Systeme von Gleichungen, und in jedem derselben entspricht ein- und demselben Puncte P ein anderer Punct p. Die eben angegebene Construction läfst sich in Form eines Lehrsatzes wie folgt ausdrücken: *Wenn man von einem beliebigen Puncte der Curve dritter Ordnung $\varphi = 0$ die 4 Tangenten an die Curve zieht (die Tangente in dem beliebigen Puncte nicht mitgerechnet): so entsprechen einem jeden Tangi-*

rungspuncte die drei übrigen in den drei verschiedenen, durch die Gleichungen (1.) analytisch ausgedrückten Systemen. Um diese drei Systeme sich entsprechender Puncte auch geometrisch zu sondern, ohne dazu der drei in (1.) enthaltenen Systeme von Gleichungen zu bedürfen, dient die vorangeschickte Construction des dem Puncte P entsprechenden Punctes p, wenn ein solches Punctenpaar P', p' gegeben ist. Denn diese Construction giebt, wenn man den Punct P die ganze Curve durchlaufen läfst, alle möglichen Punctenpaare in demselben Systeme, wie das gegebene, während der zuletzt angeführte Satz drei, den drei verschiedenen Systemen zugehörende Punctenpaare construiren lehrt.

Um den zuletzt angeführten Lehrsatz zu vervollständigen, betrachten wir die 4 Tangirungspuncte p, p', p'', p''' der von einem beliebigen Puncte 0 an die Curve dritter Ordnung gezogenen Tangenten. Von diesen 4 Puncten werden, wie wir bemerkt haben, die Punctenpaare p, p'; p, p''; p, p''' den drei verschiedenen Systemen angehören, weil in einem jeden Systeme einem und demselben Puncte nur ein einziger entspricht. Das Punctenpaar p', p'', welches nach dem oben ausgesprochenen Lehrsatze einem von den drei Systemen angehört, kann nicht demjenigen Systeme eigen sein, welchem das erste Punctenpaar p, p' angehört. Denn wäre dieses der Fall, so müfste, wie aus dem Vorhergehenden erhellet, die Tangente im Puncte p' die gerade Linie pp'' in einem Puncte der Curve treffen, und dieser könnte nur der Punct 0 sein; was nicht möglich ist. Eben so wenig können die Punctenpaare p', p'' und p, p'' einem und demselben Systeme angehören. Also müssen es die Punctenpaare p', p'' und p, p''' sein. Einem andern Systeme gehören nur die Punctenpaare p, p' und p'', p''', und dem letzten Systeme gehören die Punctenpaare p, p'' und p', p''' an. Diese Bemerkungen fassen wir in folgenden Satz zusammen: *Wenn man von einem beliebigen Puncte der Curve dritter Ordnung* $\varphi = 0$ *die 4 Tangenten an die Curve zieht, so lassen sich die 4 Tangirungspuncte als die Ecken von 3 verschiedenen Vierecken betrachten. Die gegenüberliegenden Ecken eines beliebigen dieser Vierecke sind zwei, demselben Systeme zugehörige Punctenpaare, und die Systeme, welche auf diese Weise den 3 verschiedenen Vierecken entsprechen, sind verschieden.*

Man hat im Vorhergehenden gesehen, wie zwei Punctenpaare P, p; P', p' desselben Systems ein durch dieselben gegebenes drittes Paar P'', p'' bestimmen, welches eben demselben Systeme angehört. Nunmehr will ich nachweisen, wie zwei Punctenpaare P, p; Q, q, aus zwei verschiedenen Systemen, ein drittes

Punctenpaar R, r des letzten Systems bestimmen. Zu diesem Ende lege ich durch die Curve dritter Ordnung zwei beliebige gerade Linien, von denen die eine die Curve in den Puncten P, Q, R, die andere in den Puncten P', Q', R' treffen möge. Wenn nun die drei geraden Linien PP', QQ', RR' die Curve respective in den Puncten P'', Q'', R'' schneiden, so liegen diese drei Puncte P'', Q'', R'' (was sich in den Elementen der Geometrie bewiesen findet) in einer geraden Linie. Diese läfst sich auch, wenn man drei gerade Linien als eine Curve dritter Ordnung, und zwei gerade Linien als einen Kegelschnitt betrachtet (was bekanntlich erlaubt ist), wie folgt ausdrücken: *Wenn von den 9 Schnittpuncten zweier Curven dritter Ordnung 6 Schnittpuncte auf einem Kegelschnitt liegen, so liegen die drei andern auf einer geraden Linie.* Läfst man die gerade Linie $P'Q'R'$ der geraden Linie PQR so nahe rücken, dafs beide zusammenfallen, so erhält man den, eben wie der vorhergehende, bekannten Lehrsatz: *Die Tangenten der Curve dritter Ordnung an drei Puncten, welche in einer und derselben geraden Linie liegen, schneiden die Curve in drei Puncten, welche wieder in einer geraden Linie liegen.* Man vergleiche „Analyse de transversales par *Poncelet*" im gegenwärtigen Journal Bd. 8. S. 129—136, wo man die beiden letzten und andere aus ihnen gefolgerte, mit der vorliegenden Untersuchung im Zusammenhange stehende Sätze findet.

Wenn nun P, p und Q, q zwei Punctenpaare in verschiedenen Systemen sind, so trifft, wie oben bewiesen worden, das Tangentenpaar der Curve in den Puncten P, p in einem und demselben Puncte P'' der Curve zusammen, und das Tangentenpaar der Curve in den Puncten Q, q schneidet die Curve in einem und demselben Puncte Q''. Läfst man die geraden Linien PQ und pq die Curve respective in den Puncten R und r schneiden, so wird die Tangente in R, nach dem zuletzt genannten Lehrsatze, die Curve in einem Puncte R'' schneiden, welcher mit den beiden Puncten P'' und Q'' in einer und derselben geraden Linie liegt. Aus demselben Grunde mufs aber auch die Tangente in r die Curve in R'' treffen. Es ist mithin R, r ein Punctenpaar aus einem der drei Systeme; und zwar aus dem dritten. Denn wenn dieses System dasselbe wäre, welchem das Punctenpaar P, p und Q, q zugehört, so müfsten die geraden Linien PQ und pq in einem und demselben Puncte der Curve zusammenstofsen; in welchem Falle die Punctenpaare P, Q und p, q einem und demselben Systeme angehören würden; was gegen die Voraussetzung ist. Wir haben also folgenden Lehrsatz bewiesen: *Wenn man*

ein Punctenpaar aus einem der drei Systeme mit einem zweiten Punctenpaar aus einem anderen Systeme durch zwei gerade Linien verbindet, so schneiden diese die Curve dritter Ordnung in einem Punctenpaare, welches dem dritten Systeme angehört.

Die bis hieher gemachten Bemerkungen werde ich nun, geordnet, mit verwandten Sätzen zusammenstellen, deren Beweise sich leicht aus den entwickelten Principien ergeben.

3.

1. *Der geometrische Ort eines, dreien, beliebig gegebenen Kegelschnitten gemeinschaftlichen harmonischen Polenpaares ist eine Curve dritter Ordnung.*

2. *Jede gegebene Curve dritter Ordnung läfst sich als der geometrische Ort eines, einem Systeme Kegelschnitte gemeinschaftlichen harmonischen Polenpaares betrachten.*

3. *Solcher Systeme Kegelschnitte giebt es für jede beliebige Curve dritter Ordnung im Allgemeinen drei; also auch drei verschiedene Systeme Polenpaare auf einer und derselben Curve dritter Ordnung.*

4. *Das Tangentenpaar in einem Polenpaar an die Curve dritter Ordnung schneidet die Curve in einem und demselben Puncte.* Und umgekehrt:

5. *Jedes Tangentenpaar, von einem beliebigen Puncte der Curve dritter Ordnung an die Curve gezogen, berührt die Curve in einem Polenpaare.*

Die Sätze (4. und 5.) sind unmittelbare Folgen aus den beiden folgenden allgemeinen Sätzen:

6. *In jedem der Curve dritter Ordnung einbeschriebenen Viereck, dessen Diagonalen von zwei Polenpaaren desselben Systems begrenzt werden, schneiden die gegenüberliegenden Seiten des Vierecks die Curve in einem und demselben Puncte; und die beiden Puncte, in welchen zwei aufeinanderfolgende Seiten des Vierecks die Curve schneiden, bilden ein Polenpaar desselben Systems.* Und umgekehrt:

7. *Die Diagonalen eines jeden, einer Curve dritter Ordnung einbeschriebenen vollständigen Vierecks werden von Polenpaaren begrenzt, welche einem und demselben Systeme angehören.*

Aus den vorhergehenden Sätzen ergiebt sich eine allgemeine Construction der einer Curve dritter Ordnung einbeschriebenen vollständigen Vierecke, welche in Form eines Lehrsatzes also lautet:

8. Wenn man irgend ein Polenpaar P', p' einer Curve dritter Ordnung durch zwei gerade Linien mit einem beliebigen Puncte P'' der Curve, und die Schnittpuncte P, p dieser beiden geraden Linien und der Curve durch zwei neue gerade Linien mit dem Polenpaare P', p' verbindet, so bilden die beiden Linienpaare ein der Curve einbeschriebenes vollständiges Viereck.

9. Man kann alle, einer Curve dritter Ordnung einbeschriebenen vollständigen Vierecke in drei verschiedene Systeme vertheilen. Ein beliebiges vollständiges, der Curve einbeschriebenes Viereck gehört dem einen oder dem andern Systeme an, je nachdem die, eine beliebige Diagonale desselben begrenzenden Puncte, ein Polenpaar des einen und des andern Systems sind.

10. Alle einer Curve dritter Ordnung einbeschriebenen Dreiecke, deren Seiten die Curve in drei Puncten schneiden, welche in einer geraden Linie liegen, ordnen sich dreien Systemen solcher Dreiecke unter. Ein solches Dreieck gehört dem einen oder dem andern Systeme an, je nachdem eine Ecke und der Schnittpunct der gegenüberliegenden Seite des Dreiecks und der Curve ein Polenpaar aus dem einen oder dem andern Systeme sind.

11. Es lassen sich einer Curve dritter Ordnung nur drei Dreiecke einbeschreiben, deren Seiten durch drei, auf der Curve gegebene, in einer geraden Linie liegende Puncte hindurchgehen; und diese Dreiecke gehören verschiedenen Systemen an.

12. Wenn man von einem beliebigen Puncte einer Curve dritter Ordnung die vier Tangenten an die Curve zieht, so ist ein beliebiger von den 4 Berührungspuncten der Pol zu den drei andern, aus verschiedenen Systemen genommen; und wenn man drei von den Berührungspuncten als die Ecken eines Dreiecks betrachtet, so werden die Seiten dieses Dreiecks von Polenpaaren aus verschiedenen Systemen begrenzt.

13. Wenn von drei Puncten auf einer Curve dritter Ordnung ein Punct der Pol ist zu den beiden andern, in zwei verschiedenen Systemen, so bilden die beiden letzten ein Polenpaar aus dem dritten Systeme.

14. Wenn man ein Polenpaar auf einer Curve dritter Ordnung mit einem zweiten Polenpaare derselben Curve aus einem andern Systeme durch zwei gerade Linien verbindet, so schneiden diese Linien die Curve in einem Polenpaare des dritten Systems.

15. Wenn man von einem beliebigen Puncte p einer Curve dritter Ordnung die eine Tangente an die Curve zieht, so trifft jedes durch die

vier Berührungspuncte gelegte Linienpaar die Curve in einem und demselben Puncte, und von den drei Puncten, in welchen die drei Linienpaare, welche durch die vier Puncte gelegt werden können, die Curve schneiden, bilden je zwei Potenzen, welche verschiedenen Systemen angehören. Diese drei Puncte und der Punct p sind die Berührungspuncte der vier von einem und demselben Puncte der Curve an die Curve gezogenen Tangenten.

16. Wenn man aus den drei Schnittpuncten einer beliebiegen geraden Linie und einer Curve dritter Ordnung die 12 Tangenten an die Curve zieht, so liegen von den 12 Berührungspuncten 16mal drei Puncte in einer geraden Linie.

Um die Combinationen derjenigen Berührungspuncte aufzustellen, welche in einer geraden Linie liegen, bezeichne ich irgend drei von den 12 Berührungspuncten, die in einer geraden Linie liegen, durch α, β, γ; die diesen entsprechenden Pole in dem ersten Systeme durch α_1, β_1, γ_1, in dem zweiten Systeme durch α_2, β_2, γ_2 und in dem letzten Systeme durch α_3, β_3, γ_3. Alsdann giebt es folgende Combinationen der 9 letzten Puncte, welche in einer geraden Linie liegen:

$$\alpha_1\beta_2\gamma_3, \quad \alpha_2\beta_3\gamma_1, \quad \alpha_3\beta_1\gamma_2,$$
$$\alpha_1\beta_3\gamma_2, \quad \alpha_2\beta_1\gamma_3, \quad \alpha_3\beta_2\gamma_1;$$

was durch den Lehrsatz (14.) bewiesen wird. Überdies giebt es noch folgende Combinationen der 12 Berührungspuncte, welche in gerader Linie liegen:

$$\alpha\beta_1\gamma_1, \quad \beta\gamma_1\alpha_1, \quad \gamma\alpha_1\beta_1,$$
$$\alpha\beta_2\gamma_2, \quad \beta\gamma_2\alpha_2, \quad \gamma\alpha_2\beta_2,$$
$$\alpha\beta_3\gamma_3, \quad \beta\gamma_3\alpha_3, \quad \gamma\alpha_3\beta_3,$$
$$\alpha\beta\gamma.$$

Dies folgt aus dem Lehrsatze (6.). Demnach sind die in dem Lehrsatze (11.) erwähnten, der Curve einbeschriebenen Dreiecke, deren Seiten durch die drei in gerader Linie und zugleich auf der Curve gelegene Puncte α, β, γ hindurchgehen, folgende drei:

$$\alpha_1\beta_1\gamma_1, \quad \alpha_2\beta_2\gamma_2, \quad \alpha_3\beta_3\gamma_3.$$

Die aufgestellten Combinationen zeigen, dafs es 8 Systeme von je 4 geraden Linien giebt, welche durch sämmtliche 12 Berührungspuncte hindurchgehen. Die 4 geraden Linien gehen nämlich durch die Puncte:

1.	$\alpha\beta\gamma$,	$\alpha_1\beta_2\gamma_3$,	$\alpha_2\beta_3\gamma_1$,	$\alpha_3\beta_1\gamma_2$,
2.	$\alpha\beta_1\gamma_1$,	$\alpha_2\beta_2\gamma$,	$\alpha_1\beta_3\gamma_2$,	$\alpha_3\beta\gamma_3$,
3.	$\alpha\beta_2\gamma_2$,	$\alpha_3\beta_3\gamma$,	$\alpha_1\beta\gamma_1$,	$\alpha_2\beta_1\gamma_3$,
4.	$\alpha\beta_3\gamma_3$,	$\alpha_1\beta_1\gamma$,	$\alpha_2\beta\gamma_2$,	$\alpha_3\beta_2\gamma_1$,
5.	$\alpha\beta\gamma$,	$\alpha_1\beta_3\gamma_2$,	$\alpha_2\beta_1\gamma_3$,	$\alpha_3\beta_2\gamma_1$,
6.	$\alpha\beta_1\gamma_1$,	$\alpha_1\beta_2\gamma_3$,	$\alpha_2\beta\gamma_2$,	$\alpha_3\beta_3\gamma$,
7.	$\alpha\beta_2\gamma_2$,	$\alpha_1\beta_1\gamma$,	$\alpha_2\beta_3\gamma_1$,	$\alpha_3\beta\gamma_3$,
8.	$\alpha\beta_3\gamma_3$,	$\alpha_1\beta\gamma_1$,	$\alpha_2\beta_2\gamma$,	$\alpha_3\beta_1\gamma_2$.

Hieraus ist ersichtlich, dafs die 12 Berührungspuncte auf einer Curve vierter Ordnung liegen. Wie die Gleichung dieser Curve gebildet werden kann, giebt folgender Lehrsatz an:

17. Wenn v eine gegebene homogene Function dritten Grades der drei Variabeln x_1, x_2, x_3, also

$$\text{I.} \quad v = 0$$

die Gleichung einer gegebenen Curve dritter Ordnung und

$$\text{II.} \quad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

die Gleichung einer gegebenen geraden Linie ist, und man bezeichnet durch w die Determinante der Function v, gebildet aus den zweiten partiellen Differentialquotienten dieser Function, so ist

$$\text{III.} \quad a_1\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial w}{\partial x_3} - \frac{\partial v}{\partial x_3}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right) + a_2\left(\frac{\partial v}{\partial x_3}\frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial x_3}\right) + a_3\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial x_2} - \frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial w}{\partial x_1}\right) = 0$$

die Gleichung der Curve 4ter Ordnung, welche durch die Berührungspuncte der von den Schnittpuncten der gegebenen geraden Linie und der Curve dritter Ordnung an die letztere gezogenen Tangenten hindurchgeht.

Hieraus folgt, wenn man den Theil links der Gleichung (III.) der Kürze wegen durch r, und durch b_1, b_2, b_3 unbestimmte Coëfficienten bezeichnet, dafs:

$$\text{IV.} \quad v(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3) + r = 0$$

der allgemeine Ausdruck für die Curven 4ter Ordnung sein wird, welche durch die erwähnten 12 Berührungspuncte hindurchgehen; man wird die Coëfficienten b_1, b_2, b_3 in dieser Gleichung 8mal so bestimmen können, dafs der Theil links der Gleichung in 4 lineäre Factoren zerfällt.

Ich werde nun zeigen, wie der zuletzt aufgestellte Lehrsatz sich auf Curven $n$ter Ordnung ausdehnen läfst, und in welchem Zusammenhange diese Ausdehnung des Satzes mit dem Problem der *Doppeltangenten* der Curven steht.

Es sei $v=0$ die zwischen den Variabeln x_1, x_2, x_3 homogene Gleichung einer beliebigen gegebenen Curve $n$ter Ordnung; v_1, v_2, v_3 seien die partiellen Differentialquotienten der Function v, nach den Variabeln genommen, und X_1, X_2, X_3 die Coordinaten eines beliebig gegebenen Punctes P aufserhalb der Curve. Die $n(n-1)$ Berührungspuncte der vom Puncte P an die Curve gezogenen Tangenten werden bekanntlich durch den Schnitt der beiden Curven

$$\text{IV. } a. \quad v=0 \quad \text{und} \quad v_1X_1+v_2X_2+v_3X_3=0$$

bestimmt. Rückt der Punct P in die Curve $v=0$, so fallen mit ihm zwei Berührungspuncte zusammen und es lassen sich von diesem Puncte nur noch $n(n-1)-2$ Tangenten an die Curve ziehen, wenn man die Tangenten in dem Puncte P selbst ausschliefst. Um die Curve zu finden, in welcher die Berührungspuncte sämmtlicher $n^2(n-1)$ Tangenten liegen, welche von den Schnittpuncten einer durch die Gleichung:

$$\text{V.} \quad a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$$

gegebenen geraden Linie und der gegebenen Curve $v=0$ an die letztere gezogen werden können, bezeichne ich die Function, in welche v übergeht, wenn man X_1, X_2, X_3 statt x_1, x_2, x_3 setzt, durch V, und durch (V) den Ausdruck, in welchen V durch die Substitution von

$$\text{VI.} \quad X_1=v_2a_3-v_3a_2, \qquad X_2=v_3a_1-v_1a_3, \qquad X_3=v_1a_2-v_2a_1$$

übergeht. Die $n^2(n-1)$ Berührungspuncte stellen sich dann als die Schnittpuncte der beiden Curven

$$\text{VII.} \quad v=0 \quad \text{und} \quad (V)=0$$

dar, von denen die erstere vom $n$ten, die andere vom $n(n-1)$ten Grade ist. Von diesen $n^2(n-1)$ Schnittpuncten fallen aber mit jedem Schnittpuncte der geraden Linie (V.) und der Curve $v=0$ zwei zusammen, so dafs $2n$ Schnittpuncte als auf einer Curve 2ter Ordnung liegend, deren Gleichung $(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2=0$ ist, zu betrachten sind. Nun weifs man, dafs, wenn von den $n(p+q)$ Schnittpuncten zweier Curven vom $n$ten und $p+q$ten Grade nq Puncte auf einer Curve $q$ten Grades liegen, die übrigen np Puncte auf einer Curve $p$ten Grades liegen müssen. In dem vorliegenden Falle werden also die $n^2(n-1)-2n$ Schnittpuncte der Curven (VII.), welche nicht auf der geraden Linie (V.) liegen, auf einer Curve $n(n-1)-2$ter Ordnung liegen; woraus der Schlufs zu ziehen ist, dafs (V) von der Form

$$\text{VIII.} \quad (V)=\frac{P_n.v-Q_n(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2}{1.2\ldots.n}$$

sein wird, wo P_n und Q_n homogene Functionen der Variabeln, respective von

den Graden $n(n-2)$ und $n(n-1)-2$, bedeuten. *Hiernach stellen sich die $n^2(n-1)-2n$ Berührungspuncte, welche nicht in der geraden Linie* (V.) *liegen, als die Schnittpuncte der beiden Curven*

$$\text{IX.} \quad v = 0 \quad \textit{und} \quad Q_n = 0$$

dar.

Die Richtigkeit dieses geometrisch abgeleiteten Resultats werde ich auch auf rein analytischem Wege nachweisen; bei welcher Gelegenheit sich zugleich die Bildungsweise der Functionen P_n und Q_n herausstellen wird. Zu diesem Ende bezeichne ich durch $[v]$ die Function, in welche v übergeht, wenn man $x_1+\lambda X_1$, $x_2+\lambda X_2$, $x_3+\lambda X_3$ statt x_1, x_2, x_3 setzt. Setzt man nun $X_1\partial_{x_1}+X_2\partial_{x_2}+X_3\partial_{x_3}=\partial$, so erhält man

$$\text{X.} \quad [v] = (v)+\lambda(\partial v)+\frac{\lambda^2}{1.2}(\partial^2 v)+\dots\frac{\lambda^{n-1}}{1.2\dots(n-1)}(\partial^{n-1}v)+\frac{\lambda^n}{1.2\dots n}(\partial^n v).$$

In dieser Gleichung betrachte ich X_1, X_2, X_3 als Functionen von x_1, x_2, x_3, welche durch die Gleichungen (VI.) gegeben sind. Unter dieser Annahme sind die Glieder der Reihe rechts von dem Gleichheitszeichen homogene Functionen von den Geraden:

0, 1,	2,	3,	.... n	in Beziehung auf a_1, a_2, a_3,
1, 2,	3,	4,	.... $n+1$	in Beziehung auf die Coëfficienten in v,
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
n, $2n-2$,	$3n-4$,	$4n-6$,	.... $n(n-1)$	in Beziehung auf x_1, x_2, x_3.

Man sieht leicht, dafs das letzte Glied der Reihe gleich ist $\lambda^n(V)$. Es bleibt also, wenn man der Kürze wegen $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=a$ setzt, zu beweisen übrig, dafs das letzte Glied der Reihe von der Form

$$(\partial^n v) = P_n.v-Q_n.a^2$$

sei. Von derselben Form sind aber auch alle übrigen Glieder der Reihe, so dafs

$$\text{XI.} \quad (\partial^\mu v) = P_\mu.v-Q_\mu.a^2$$

ist, wo P_μ und Q_μ homogene Functionen bedeuten, respective von den Graden:

μ	und	$\mu-2$	in Beziehung auf a_1, a_2, a_3,
μ	und	$\mu+1$	in Beziehung auf die Coëfficienten in v,
. . .	. . .	. . .	. . .
$\mu(n-2)$	und	$(\mu+1)(n-2)$	in Beziehung auf x_1, x_2, x_3.

Dafs die beiden ersten Glieder der Reihe diese Form haben, ist einleuchtend. Denn setzt man $(v)=P.v-Q.a^2$ und $(\partial v)=P_1.v-Q_1.a^2$, so erhält man, weil (∂v) identisch $=0$ ist,

$$\text{XII.} \quad P=1, \quad Q=0, \quad P_1=0, \quad Q_1=0.$$

Ich werde nun zeigen, wie sich jedes Glied der Reihe durch die beiden vorhergehenden Glieder ausdrücken läfst. Zu diesem Ende setze ich

$$\text{XIII.}\quad\begin{cases} Y_1 = X_1\dfrac{\partial X_1}{\partial x_1}+X_2\dfrac{\partial X_1}{\partial x_2}+X_3\dfrac{\partial X_1}{\partial x_3}, & Z_1 = Y_1\dfrac{\partial X_1}{\partial x_1}+Y_2\dfrac{\partial X_1}{\partial x_2}+Y_3\dfrac{\partial X_1}{\partial x_3}, \\ Y_2 = X_1\dfrac{\partial X_2}{\partial x_1}+X_2\dfrac{\partial X_2}{\partial x_2}+X_3\dfrac{\partial X_2}{\partial x_3}, & Z_2 = Y_1\dfrac{\partial X_2}{\partial x_1}+Y_2\dfrac{\partial X_2}{\partial x_2}+Y_3\dfrac{\partial X_2}{\partial x_3}, \\ Y_3 = X_1\dfrac{\partial X_3}{\partial x_1}+X_2\dfrac{\partial X_3}{\partial x_2}+X_3\dfrac{\partial X_3}{\partial x_3}, & Z_3 = Y_1\dfrac{\partial X_3}{\partial x_1}+Y_2\dfrac{\partial X_3}{\partial x_2}+Y_3\dfrac{\partial X_3}{\partial x_3}. \end{cases}$$

Ferner gebe ich den aus den zweiten partiellen Differentialquotienten $v_{1,1}$, $v_{2,2}$, $v_{3,3}$, $v_{2,3}$, $v_{3,1}$, $v_{1,2}$ der Function v zusammengesetzten Ausdrücken der Kürze wegen folgende Bezeichnungen:

$$\text{XIV.}\quad\begin{cases} V_{1,1} = v_{2,2}v_{3,3}-v_{2,3}^2, & V_{2,3} = v_{1,2}v_{1,3}-v_{1,1}v_{2,3}, \\ V_{2,2} = v_{3,3}v_{1,1}-v_{3,1}^2, & V_{3,1} = v_{2,3}v_{2,1}-v_{2,2}v_{3,1}, \\ V_{3,3} = v_{1,1}v_{2,2}-v_{1,2}^2, & V_{1,2} = v_{3,1}v_{3,2}-v_{3,3}v_{1,2}, \\ w = v_{1,1}v_{2,2}v_{3,3}+2v_{1,2}v_{1,3}v_{2,3}-v_{1,1}v_{2,3}^2-v_{2,2}v_{3,1}^2-v_{3,3}v_{1,2}^2, \\ \Delta = V_{1,1}a_1^2+V_{2,2}a_2^2+V_{3,3}a_3^2+2V_{2,3}a_2a_3+2V_{3,1}v_3v_1+2V_{1,2}v_1v_2. \end{cases}$$

Alsdann stellen sich die Gröfsen Y, wenn man die Werthe von X_1, X_2, X_3 und $\frac{\partial X_1}{\partial x_1}$, $\frac{\partial X_1}{\partial x_2}$, ... setzt, nach den nöthigen Reductionen wie folgt dar:

$$\text{XV.}\quad\begin{cases} Y_1 = \dfrac{1}{n-1}\left\{\tfrac{1}{2}a\cdot\dfrac{\partial\Delta}{\partial a_1}-x_1\Delta\right\}, \\ Y_2 = \dfrac{1}{n-1}\left\{\tfrac{1}{2}a\cdot\dfrac{\partial\Delta}{\partial a_2}-x_2\Delta\right\}, \\ Y_3 = \dfrac{1}{n-1}\left\{\tfrac{1}{2}a\cdot\dfrac{\partial\Delta}{\partial a_3}-x_3\Delta\right\}, \end{cases}$$

woraus sich, wenn man erwägt, dafs

$$\frac{\partial\Delta}{\partial a_1}\cdot\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\Delta}{\partial a_2}\cdot\frac{\partial X_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\Delta}{\partial a_3}\cdot\frac{\partial X_1}{\partial x_3} = 0.$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial a_1}\cdot\frac{\partial X_2}{\partial x_1}+\frac{\partial\Delta}{\partial a_2}\cdot\frac{\partial X_2}{\partial x_2}+\frac{\partial\Delta}{\partial a_3}\cdot\frac{\partial X_2}{\partial x_3} = 0,$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial a_1}\cdot\frac{\partial X_3}{\partial x_1}+\frac{\partial\Delta}{\partial a_2}\cdot\frac{\partial X_3}{\partial x_2}+\frac{\partial\Delta}{\partial a_3}\cdot\frac{\partial X_3}{\partial x_3} = 0$$

ist, durch Substitution in (XIII.) folgende Werthe der Gröfsen Z ergeben:

$$\text{XVI.}\quad Z_1 = -\Delta X_1,\quad Z_2 = -\Delta X_2,\quad Z_3 = -\Delta X_3.$$

Jedes Glied der Reihe [v] ist eine homogene Function der Variabeln x_1, x_2, x_3, und zugleich eine homogene Function der Gröfsen X_1, X_2, X_3, welche wie-

derum homogene Functionen der Variabeln x_1, x_2, x_3 sind. Ich werde nun die Differentiation nach den Variabeln x_1, x_2, x_3 mit d bezeichnen, wenn sowohl die Gröfsen x, als die Gröfsen X, als variabel betrachtet werden: dagegen mit ∂, wenn nur die eine als variabel, die andere als constant betrachtet wird. Mit dieser Bezeichnung ist:

$$\frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial x_1} = \frac{d(\partial^\mu v)}{d x_1} - \left\{\frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial X_1}\cdot\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial X_2}\cdot\frac{\partial X_2}{\partial x_1} + \frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial X_3}\cdot\frac{\partial X_3}{\partial x_1}\right\},$$

$$\frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial x_2} = \frac{d(\partial^\mu v)}{d x_2} - \left\{\frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial X_1}\cdot\frac{\partial X_1}{\partial x_2} + \frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial X_2}\cdot\frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial X_3}\cdot\frac{\partial X_3}{\partial x_2}\right\},$$

$$\frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial x_3} = \frac{d(\partial^\mu v)}{d x_3} - \left\{\frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial X_1}\cdot\frac{\partial X_1}{\partial x_3} + \frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial X_2}\cdot\frac{\partial X_2}{\partial x_3} + \frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial X_3}{\partial x_3}\right\}.$$

Es ist aber

$$\frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial X_1} = \mu\frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial X_2} = \mu\frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial X_3} = \mu\frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial x_3};$$

mit Hülfe welcher Gleichungen sich das vorige System also darstellt:

$$\frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial x_1} = \frac{d(\partial^\mu v)}{d x_1} - \mu\left\{\frac{\partial(\partial^{\mu-1} v)}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial(\partial^{\mu-1} v)}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial X_2}{\partial x_1} + \frac{\partial(\partial^{\mu-1} v)}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial X_3}{\partial x_1}\right\},$$

$$\frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial x_2} = \frac{d(\partial^\mu v)}{d x_2} - \mu\left\{\frac{\partial(\partial^{\mu-1} v)}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial X_1}{\partial x_2} + \frac{\partial(\partial^{\mu-1} v)}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \frac{\partial(\partial^{\mu-1} v)}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial X_3}{\partial x_2}\right\},$$

$$\frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial x_3} = \frac{d(\partial^\mu v)}{d x_3} - \mu\left\{\frac{\partial(\partial^{\mu-1} v)}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial X_1}{\partial x_3} + \frac{\partial(\partial^{\mu-1} v)}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial X_2}{\partial x_3} + \frac{\partial(\partial^{\mu-1} v)}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial X_3}{\partial x_3}\right\}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit X_1, X_2, X_3, addirt die Producte und erwägt, dafs

$$(\partial^{\mu+1} v) = \frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial x_1}X_1 + \frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial x_2}X_2 + \frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial x_3}X_3$$

ist, so erhält man, mit Rücksicht auf (XIII.),

$$(\partial^{\mu+1} v) = \frac{d(\partial^\mu v)}{d x_1}X_1 + \frac{d(\partial^\mu v)}{d x_2}X_2 + \frac{d(\partial^\mu v)}{d x_3}X_3$$
$$-\mu\left\{\frac{\partial(\partial^{\mu-1} v)}{\partial x_1}Y_1 + \frac{\partial(\partial^{\mu-1} v)}{\partial x_2}Y_2 + \frac{\partial(\partial^{\mu-1} v)}{\partial x_3}Y_3\right\}.$$

Setzt man in diese Gleichung diejenigen Werthe von $\frac{\partial(\partial^{\mu-1} v)}{\partial x_1}$, $\frac{\partial(\partial^{\mu-1} v)}{\partial x_2}$, $\frac{\partial(\partial^{\mu-1} v)}{\partial x_3}$, welche sich aus dem vorhergehenden Systeme von Gleichungen ergeben, wenn man in demselben $\mu-1$ statt μ setzt, so geht dieselbe, mit Rücksicht auf (XIII.) und (XIV.), in

$$(\partial^{\mu+1}v) = \frac{d(\partial^\mu v)}{dx_1}X_1 + \frac{d(\partial^\mu v)}{dx_2}X_2 + \frac{d(\partial^\mu v)}{dx_3}X_3$$
$$-\mu\left\{\frac{d(\partial^{\mu-1}v)}{dx_1}Y_1 + \frac{d(\partial^{\mu-1}v)}{dx_2}Y_2 + \frac{d(\partial^{\mu-1}v)}{dx_3}Y_3\right\}$$
$$-\mu(\mu-1)\frac{\partial(\partial^{\mu-2}v)}{\partial x_1}X_1 + \frac{\partial(\partial^{\mu-2}v)}{\partial x_2} + X_2\frac{\partial(\partial^{\mu-2}v)}{\partial x_3}X_3\}$$

über. Da aber

$$\frac{\partial(\partial^{\mu-1}v)}{\partial X_1} = (\mu-1)\frac{\partial(\partial^{\mu-2}v)}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial(\partial^{\mu-1}v)}{\partial X_2} = (\mu-1)\frac{\partial(\partial^{\mu-2}v)}{\partial x_2},$$
$$\frac{\partial(\partial^{\mu-1}v)}{\partial X_3} = (\mu-1)\frac{\partial(\partial^{\mu-2}v)}{\partial x_3},$$
$$\frac{\partial(\partial^{\mu-1}v)}{\partial X_1}X_1 + \frac{\partial(\partial^{\mu-1}v)}{\partial X_2}X_2 + \frac{\partial(\partial^{\mu-1}v)}{\partial X_3}X_3 = (\mu-1)(\partial^{\mu-1}v)$$

ist, so ergiebt sich

$$(\partial^{\mu+1}v) = \frac{d(\partial^\mu v)}{dx_1}X_1 + \frac{d(\partial^\mu v)}{dx_2}X_2 + \frac{d(\partial^\mu v)}{dx_3}X_3$$
$$-\mu\left\{\frac{d(\partial^{\mu-1}v)}{dx_1}Y_1 + \frac{d(\partial^{\mu-1}v)}{dx_2}Y_2 + \frac{d(\partial^{\mu-1}v)}{dx_3}Y_3\right\}$$
$$-\mu(\mu-1)\Delta(\partial^{\mu-1}v);$$

woraus endlich folgt, wenn man die Werthe von Y substituirt:

$$\text{XVII.} \quad (\partial^{\mu+1}v) = \frac{d(\partial^\mu v)}{dx_1}X_1 + \frac{d(\partial^\mu v)}{dx_2}X_2 + \frac{d(\partial^\mu v)}{dx_3}X_3$$
$$-\frac{\mu}{n-1}\cdot\tfrac{1}{2}a\left\{\frac{d(\partial^{\mu-1}v)}{dx_1}\cdot\frac{\partial\Delta}{\partial a_1} + \frac{d(\partial^{\mu-1}v)}{dx_2}\cdot\frac{\partial\Delta}{\partial a_2} + \frac{d(\partial^{\mu-1}v)}{dx_3}\cdot\frac{\partial\Delta}{\partial a_3}\right\}$$
$$+\frac{\mu}{n-1}(n-\mu+1).\Delta.(\partial^{\mu-1}v).$$

Dieses ist die gesuchte Gleichung, welche jedes Glied der Reihe $[v]$ durch die beiden vorhergehenden ausdrückt. Es läfst sich aus ihr sogleich die Form des Ausdrucks $(\partial^{\mu+1}v)$ erkennen, wenn man berücksichtigt, dafs

$$v_1\cdot\frac{\partial\Delta}{\partial a_1} + v_2\cdot\frac{\partial\Delta}{\partial a_2} + v_3\cdot\frac{\partial\Delta}{\partial a_3} = \frac{2}{n-1}\cdot a\cdot w$$

ist. Wenn nämlich die Ausdrücke $(\partial^\mu v)$ und $(\partial^{\mu-1}v)$ von der Form (XI.) sind, so mufs auch $(\partial^{\mu+1}v)$ diese Form haben. Denn setzt man

$$(\partial^\mu v) = P_\mu - Q_\mu . a^2 \quad \text{und} \quad (\partial^{\mu-1}v) = P_{\mu-1} - Q_{\mu-1}a^2,$$

so erhält man aus (XVII.)

$$\text{XVIII.} \quad (\partial^{\mu+1}v) = P_{\mu+1}.v - Q_{\mu+1}.a^2,$$

wo die Werthe von $P_{\mu+1}$ und $Q_{\mu+1}$ folgende sind:

$$\text{XIX.}\quad\begin{cases} P_{\mu+1} = \left(\frac{dP_\mu}{dx_1}X_1+\frac{dP_\mu}{dx_2}X_2+\frac{dP_\mu}{dx_3}X_3\right) \\ \qquad -\frac{\mu}{n-1}\cdot\frac{1}{2}a\left(\frac{dP_{\mu-1}}{dx_1}\cdot\frac{\partial\varDelta}{\partial a_1}+\frac{dP_{\mu-1}}{dx_2}\cdot\frac{\partial\varDelta}{\partial a_2}+\frac{dP_{\mu-1}}{dx_3}\cdot\frac{\partial\varDelta}{\partial a_3}\right) \\ \qquad +\frac{\mu(n-\mu+1)}{n-1}\cdot\varDelta\cdot P_{\mu-1}, \\ Q_{\mu+1} = \left(\frac{dQ_\mu}{dx_1}X_1+\frac{dQ_\mu}{dx_2}X_2+\frac{dQ_\mu}{dx_3}X_3\right) \\ \qquad -\frac{\mu}{n-1}\cdot\frac{1}{2}a\left(\frac{dQ_{\mu-1}}{dx_1}\cdot\frac{\partial\varDelta}{\partial a_1}+\frac{dQ_{\mu-1}}{dx_2}\cdot\frac{\partial\varDelta}{\partial a_2}+\frac{dQ_{\mu-1}}{dx_3}\cdot\frac{\partial\varDelta}{\partial a_3}\right) \\ \qquad +\frac{\mu}{(n-1)^2}w\cdot P_{\mu-1}+\frac{\mu(n-\mu-1)}{n-1}\cdot\varDelta\cdot Q_{\mu-1}. \end{cases}$$

Setzt man in diesen Gleichungen für μ nach einander die Zahlen 1, 2, 3, so erhält man, mit Berücksichtigung von (XII.),

$$\text{XX.}\quad\begin{cases} P_2 = \frac{n}{n-1}\varDelta, \qquad Q_2 = \frac{1}{(n-1)^2}\cdot w, \\ P_3 = \frac{n}{n-1}\left(\frac{d\varDelta}{dx_1}X_1+\frac{d\varDelta}{dx_2}X_2+\frac{d\varDelta}{dx_3}X_3\right), \\ \qquad\qquad Q_3 = \frac{1}{(n-1)^2}\left(\frac{dw}{dx_1}X_1+\frac{dw}{dx^2}X_2+\frac{dw}{dx^3}X_3\right), \\ P_4 = \frac{n}{n-1}\left(\frac{d^2\varDelta}{dx_1^2}X_1^2+\frac{d^2\varDelta}{dx_2^2}X_2^2+\frac{d^2\varDelta}{dx_3^2}X_3^2\right. \\ \qquad \left.+2\frac{d^2\varDelta}{dx_2dx_3}X_2X_3+2\frac{d^2\varDelta}{dx_3dx_1}X_3X_1+2\frac{d^2\varDelta}{dx_1dx_2}X_1X_2\right) \\ \qquad -\frac{n.a}{(n-1)^2}\left(\frac{d\varDelta}{dx_1}\cdot\frac{\partial\varDelta}{\partial a_1}+\frac{d\varDelta}{dx_2}\cdot\frac{\partial\varDelta}{\partial a_2}+\frac{d\varDelta}{dx_3}\cdot\frac{\partial\varDelta}{\partial a_3}\right), \\ \qquad\qquad Q_4 = \frac{1}{(n-1)^2}\left(\frac{d^2w}{dx_1^2}X_1^2+\frac{d^2w}{dx_2^2}X_2^2+\frac{d^2w}{dx_3^2}X_3^2\right. \\ \qquad \left.+2\frac{d^2w}{dx_2dx_3}X_2X_3+2\frac{d^2w}{dx_3dx_1}X_3X_1+2\frac{d^2w}{dx_1dx_2}X_1X_2\right) \\ \qquad -\frac{a}{(n-1)^3}\left(\frac{dw}{dx_1}\cdot\frac{\partial\varDelta}{\partial a_1}+\frac{dw}{dx_2}\cdot\frac{\partial\varDelta}{\partial a_2}+\frac{dw}{dx_3}\cdot\frac{\partial\varDelta}{\partial a_3}\right)+\frac{3(n-2)}{(n-1)^3}w.\varDelta. \end{cases}$$

Die angegebenen Werthe von P_2 und Q_2 sind wichtig bei der Bestimmung der Wendepuncte einer Curve $n$ter Ordnung. Denn läfst man x_1, x_2, x_3 die Coordinaten eines Wendepuncts der Curve $v=0$ bedeuten, so müssen die drei ersten Glieder der Reihe $[v]$ für alle Werthe von a_1, a_2, a_3 verschwinden. Da aber das zweite Glied von selbst verschwindet, so bleiben zur Bestimmung der Wendepuncte die beiden Gleichungen:

$$(v)=0, \quad (\partial^2 v)=0$$

übrig, welche für alle Werthe von a_1, a_2, a_3 erfüllt werden sollen. Da nun $(\partial^2 v) = P_2 v - Q_2 a^2$ ist, so erhält man zur Bestimmung der Wendepuncte:

$$v = 0, \quad (n-1)^2 Q_2 = w = 0;$$

welche Gleichungen ich in Bd. 28. dieses Journals S. 104 Lehrsatz 9. aufgestellt habe.

Auf der Zurückführung des Ausdrucks $(\partial^3 v)$, in dem Falle $n = 3$, auf die Form $(\partial^3 v) = P_3 v - Q_3 a^2$, wo P_3 und Q_3 die angegebenen Werthe haben, beruht der Beweis des Lehrsatzes (17.). Denn setzt man in den Ausdruck Q_3 die Werthe von X_1, X_2, X_3 aus (VI.), so geht derselbe in den Theil links der Gleichung (III.) über.

Auf eben dieser Zurückführung, in dem Falle $n = 4$, beruht der Beweis des folgenden Lehrsatzes:

Wenn eine Curve 4ter Ordnung $v = 0$ und eine gerade Linie $a = 0$ gegeben sind, so giebt es 32 Tangenten der Curve, welche von der Curve in zwei Puncten geschnitten werden, die harmonisch sind zu dem Berührungspuncte und dem Schnittpuncte der Tangente mit der gegebenen geraden Linie. Die Berührungspuncte der 32 Tangenten werden durch die beiden Gleichungen

$$v = 0 \quad \textit{und} \quad \frac{\partial a}{\partial x_1}\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial w}{\partial x_3} - \frac{\partial v}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial w}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial a}{\partial x_2}\left(\frac{\partial v}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{\partial v}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial w}{\partial x_3}\right)$$
$$+ \frac{\partial a}{\partial x_3}\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial w}{\partial x_2} - \frac{\partial v}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial w}{\partial x_1}\right) = 0$$

bestimmt; wo w die Determinante der Function v bedeutet.

Die Reihe $[v]$ ist eine homogene Function der Gröfsen $x_1 + \lambda X_1$, $x_2 + \lambda X_2$ und $x_3 + \lambda X_3$. Betrachtet man diese drei Gröfsen als die Coordinaten eines Puncts, so wird dieser Punct auf einer und derselben geraden Linie liegen, wie man auch die Gröfse λ sich verändern lasse. Diese gerade Linie wird zur Tangente der Curve $v = 0$ in dem Puncte $x_1 x_2 x_3$, wenn dieser Punct in die Curve selbst hineinrückt, also das erste Glied der Reihe verschwindet. Denn das zweite Glied verschwindet, wie oben bemerkt, von selbst, da X_1, X_2, X_3 die Bedeutung (VI.) haben. Unter dieser Voraussetzung wird nun die Tangente eine Doppeltangente, wenn die Gleichung $[v] = 0$ aufser ihren beiden gleichen Wurzeln $\lambda = 0$ noch zwei andere gleiche Wurzeln hat; und die Bedingungsgleichung, welche zu erfüllen ist, damit dieses zutreffe, wird die Curve darstellen, welche die gegebene Curve $v = 0$ in solchen Fällen schneidet, in welchen die Tangenten zugleich Doppeltangenten der

gegebenen Curve sind. Um diese Bedingungsgleichung aufzustellen, lasse ich aus der Gleichung $[v]=0$ die beiden ersten verschwindenden Glieder weg und dividire mit λ^2. Dies giebt:

$$\frac{(\partial^2 v)}{1.2}+\lambda.\frac{(\partial^3 v)}{1.2.3}+\lambda^2.\frac{(\partial^4 v)}{1.2.3.4}+\ldots.\ \lambda^{n-2}.\frac{(\partial^n v)}{1.2\ldots.n}=0.$$

Da aber $(\partial^\mu v)=P_\mu.v-Q_\mu.a^2$ ist, so nimmt diese Gleichung, wenn man der Kürze wegen

$$\text{XXI.}\quad [[v]]=\frac{Q_2}{1.2}+\lambda.\frac{Q_3}{1.2.3}+\lambda^2.\frac{Q_4}{1.2.3.4}+\ldots.\ \lambda^{n-2}.\frac{Q_n}{1.2\ldots.n}\ldots$$

setzt, wegen $v=0$, die einfachere Gestalt:

$$\text{XXII.}\quad [[v]]=0$$

an. Damit die Gleichung zwei gleiche Wurzeln habe, mufs man durch denselben Werth von λ folgenden beiden Gleichungen genügen können:

$$\text{XXIII.}\begin{cases}\dfrac{(n-2)Q_2}{1.2}+\dfrac{(n-3)Q_3}{1.2.3}.\lambda+\ldots.\dfrac{2.Q_{n-2}}{1.2\ldots.(n-2)}.\lambda^{n-4}+\dfrac{Q_{n-1}}{1.2\ldots.(n-1)}.\lambda^{n-3}=0,\\[2ex] \dfrac{Q_3}{1.2..3}+\dfrac{2.Q_4}{1.2.3.4}.\lambda+\ldots.\dfrac{(n-3)Q_{n-1}}{1.2\ldots.(n-1)}.\lambda^{n-4}+\dfrac{(n-2)Q_n}{1.2\ldots.n}.\lambda^{n-3}=0.\end{cases}$$

Eliminirt man λ aus diesen beiden Gleichungen, so erhält man die gesuchte Bedingungsgleichung

$$\text{XXIV.}\quad R=0,$$

welche, da sie die unbestimmten Gröfsen a_1, a_2, a_3 enthält, ein ganzes System von Curven von der $(n+4)(n-2)(n-3)$ten Ordnung darstellt, welche sämmtlich durch die Berührungspuncte der Doppeltangenten hindurchgehen. Denn man sieht, dafs die Function R homogen ist und:

Vom Grade $(n-2)(n-3)$ in Beziehung auf die Gröfsen a_1, a_2, a_3,

Vom Grade $(n+4)(n-3)$ in Beziehung auf die Coëfficienten v und

Vom Grade $(n+4)(n-2)(n-3)$ in Beziehung auf die Variabeln x_1, x_2, x_3.

Wenn man in (XXIII.) $(\partial^2 v)$, $(\partial^3 v)$, ... statt Q_2, Q_3, ... setzt, so ist das Resultat der Elimination von λ aus den beiden Gleichungen eine homogene Gleichung von den Graden $(n+2)(n-3)$, $(n+4)(n-3)$, $(n^2+2n-4)(n-3)$ in Beziehung auf die Gröfsen a_1, a_2, a_3, die Coëfficienten in v und die Variabeln x_1, x_2, x_3; und diese Gleichung stellt, wie die vorhergehende, eine Curve dar, welche durch die Berührungspuncte der Doppeltangenten hindurchgeht. Es ist dieses dieselbe Gleichung, welche Herr *Cayley* (Bd. 34. dieses Journals S. 37) durch

$$[Y]=0$$

bezeichnet hat. Der Grad derselben läfst sich mit Hülfe der gegebenen Gleichung $v = 0$ der Curve um $4(n-3)$ Einheiten verringern. Denn da, wie aus dem Vorhergehenden ersichtlich,

$$[Y] = T.v - R.a^{4(n-3)}$$

ist, wo T eine homogene Function von den Graden

$$(n+2)(n-3),\quad (n+4)(n-3)-1,\quad (n^2+2n-4)(n-3)-n$$

in Beziehung auf die Gröfsen a_1, a_2, a_3, die Coëfficienten in v und die Variabeln x_1, x_2, x_3 bezeichnet, so reducirt sich die Gleichung, mit Zuziehung der Gleichung $v = 0$, auf die Gleichung (XXIV.).

Es bleibt noch übrig, auf ähnliche Weise den Grad der letztern Gleichung $R = 0$ um $(n-2)(n-3)$ Einheiten zu verringern, um das Problem der Doppeltangenten vollständig zu lösen; was mir aber nicht hat gelingen wollen; selbst nicht in dem einfachsten Falle, wenn die gegebene Curve vom 4ten Grade ist. In diesem Falle nimmt, wenn man in (XX.) $n = 4$ setzt, die Gleichung (XXIV.) die einfache Gestalt

$$\text{XXV.}\qquad 3.Q_2.Q_4 - Q_3.Q_3 = 0$$

an, deren Grad mit Hülfe der gegebenen Gleichung $v = 0$ noch um zwei Einheiten zu verringern bleibt.

Nach diesen Bemerkungen über die Doppeltangenten der Curven, zu welchen der Lehrsatz (17.) Veranlassung gab, kehre ich zu dem Systeme von Gleichungen (1.) zurück, von welchen die vorliegende Untersuchung der Curven 3ter Ordnung ausging.

4.

Aus dem Systeme von Gleichungen (1.) lassen sich andere Gleichungen von analytischem Interesse ableiten. Setzt man zu diesem Ende

$$\begin{aligned}
u_{2,2}u_{3,3} - u_{2,3}^2 &= a_{1,1}, & u_{1,2}u_{1,3} - u_{1,1}u_{2,3} &= a_{2,3} = a_{3,2},\\
u_{3,3}u_{1,1} - u_{3,1}^2 &= a_{2,2}, & u_{2,3}u_{2,1} - u_{2,2}u_{3,1} &= a_{3,1} = a_{1,3},\\
u_{1,1}u_{2,2} - u_{1,2}^2 &= a_{3,3}, & u_{3,1}u_{3,2} - u_{3,3}u_{1,2} &= a_{1,2} = a_{2,1},
\end{aligned}$$

und bestimmt das Verhältnifs der Coordinaten X_1, X_2, X_3 des Puncts P aus je zwei Gleichungen (1.), so erhält man

$$X_1 : X_2 : X_3 = a_{1,1} : a_{1,2} : a_{1,3} = a_{2,1} : a_{2,2} : a_{2,3} = a_{3,1} : a_{3,2} : a_{3,3};$$

woraus sich, wenn man durch ϱ einen unbestimmten Factor bezeichnet, die Gleichungen

$$2.\quad \begin{cases} X_1X_1 = \varrho a_{1,1}, & X_2X_2 = \varrho a_{2,2}, & X_3X_3 = \varrho a_{3,3},\\ X_2X_3 = \varrho a_{2,3}, & X_3X_1 = \varrho a_{3,1}, & X_1X_2 = \varrho a_{1,2} \end{cases}$$

ableiten lassen. Da sich in den Gleichungen (1.) die Coordinaten x_1, x_2, x_3 des

Punctes p mit den Coordinaten X_1, X_2, X_3 des Punctes P vertauschen lassen, so ist dieses auch in den von ihnen abgeleiteten Gleichungen (2.) gestattet. Bezeichnet man nun durch A die Ausdrücke, in welche die homogenen Functionen 2ten Grades a in dem Theile rechts der Gleichungen (2.) übergehen, wenn man X_1, X_2, X_3 statt x_1, x_2, x_3 setzt, und läfst P einen unbestimmten Factor bedeuten, so folgt aus den Gleichungen (2.) durch jene Vertauschung:

$$3. \quad \begin{cases} x_1 x_1 = PA_{1,1}, & x_2 x_2 = PA_{2,2}, & x_3 x_3 = PA_{3,3}, \\ x_2 x_3 = PA_{2,3}, & x_3 x_1 = PA_{3,1}, & x_1 x_2 = PA_{1,2}. \end{cases}$$

Dieses System von Gleichungen steht mit dem Systeme von Gleichungen (2.) in einer merkwürdigen Verbindung. Betrachtet man nemlich die in den Theilen rechts der Gleichungen (2.) lineär vorkommenden 6 Producte $x_1 x_1$, $x_2 x_2$, $x_3 x_3$, $x_2 x_3$, $x_3 x_1$, $x_1 x_2$ als Unbekannte und löset das System von Gleichungen nach diesen Unbekannten auf, so erhält man das System von Gleichungen (3.), mit *denselben* Coëfficienten der Producte $X_1 X_1$, $X_2 X_2$, $X_3 X_3$, $X_2 X_3$, $X_3 X_1$, $X_1 X_2$, mit welchen in (2.) die Producte $x_1 x_1$, $x_2 x_2$, ... $x_1 x_2$ multiplicirt sind, abgesehen von einem gemeinschaftlichen Factor.

Jeden 6 Puncten P der Curve 3ter Ordnung $\varphi = 0$, durch welche sich ein Kegelschnitt legen läfst, entsprechen 6 Puncte p, welche auf der Curve und zugleich auf einem andern Kegelschnitt liegen. Denn wenn die Gleichung des ersten Kegelschnitts

$$4. \quad \alpha_{1,1} X_1 X_1 + \alpha_{2,2} X_2 X_2 + \alpha_{3,3} X_3 X_3 + 2\alpha_{2,3} X_2 X_3 + 2\alpha_{3,1} X_3 X_1 + 2\alpha_{1,2} X_1 X_2 = 0$$

ist, so erhellet aus den Gleichungen (2.), dafs die Gleichung des zweiten Kegelschnitts

$$5. \quad \alpha_{1,1} a_{1,1} + \alpha_{2,2} a_{2,2} + \alpha_{3,3} a_{3,3} + 2\alpha_{2,3} a_{2,3} + 2\alpha_{3,1} a_{3,1} + 2\alpha_{1,2} a_{1,2} = 0$$

sein wird. Geht der erste Kegelschnitt in ein Linienpaar A, B über, dessen Gleichung

$$6. \quad (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3)(\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3) = 0$$

ist, so ist die Gleichung des zweiten Kegelschnitts

$$7. \quad \alpha_1 \beta_1 a_{1,1} + \alpha_2 \beta_2 a_{2,2} + \alpha_3 \beta_3 a_{3,3} + (\alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2) a_{2,3} + (\alpha_3 \beta_1 + \alpha_1 \beta_3) a_{3,1} + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) a_{1,2} = 0.$$

Läfst man die zweite Linie B des Linienpaares sich der ersten A so lange nähern, bis sie mit ihr zusammenfällt, so geht die Gleichung (6.) in

$$8. \quad (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3)^2 = 0$$

über, während die Gleichung des zweiten Kegelschnitts die Form

$$9. \quad \alpha_1 \alpha_1 a_{1,1} + \alpha_2 \alpha_2 a_{2,2} + \alpha_3 \alpha_3 a_{3,3} + 2\alpha_2 \alpha_3 a_{2,3} + 2\alpha_3 \alpha_1 a_{3,1} + 2\alpha_1 \alpha_2 a_{1,2} = 0$$

annimmt. Dieses ist aber die Gleichung eines Kegelschnitts, welcher die Curve

dritter Ordnung in drei verschiedenen Puncten berührt. Denn da die Schnittpuncte P der Curve dritter Ordnung und des Linienpaares (8.) paarweise zusammenfallen, so werden auch die ihnen entsprechenden Schnittpuncte p des Kegelschnitts (9.) und der Curve paarweise zusammenfallen, oder, was dasselbe ist, der Kegelschnitt wird die Curve in drei verschiedenen Puncten berühren.

Betrachtet man in der Gleichung (9.) die Constanten α_1, α_2, α_3 als variabel, so drückt die genannte Gleichung ein ganzes System von Kegelschnitten aus, deren jeden die Curve in drei verschiedenen Puncten berührt. *Es entsprechen also jeden drei Puncten P der Curve dritter Ordnung, welche in einer geraden Linie liegen, drei Puncte p, in welchen ein Kegelschnitt die Curve berührt.* Dieses sind jedoch nicht alle Kegelschnitte von der genannten Eigenschaft. Denn da in die Gleichung (9.) die Coëfficienten aus einer der drei Functionen f eingehen, so wird jeder dieser Functionen ein System solcher Kegelschnitte entsprechen. Die Gleichung (9.) umfafst also drei verschiedene, den drei Functionen f entsprechende Gleichungen; und diese letztern sind die allgemeinen analytischen Ausdrücke für die drei Systeme von Kegelschnitten, welche die Curve in drei verschiedenen Puncten berühren. *Es entsprechen also jeden drei Puncten P der Curve dritter Ordnung, welche in einer geraden Linie liegen, 3 Systeme von 3 Puncten p, welche die Berührungspuncte dreier Kegelschnitte und der Curve sind.* Da die drei Puncte P und die 9 Puncte p als die Berührungspuncte der 12 Tangenten angesehen werden können, welche von 3 leicht zu bestimmenden, auf der Curve und einer geraden Linie gelegenen Puncten an die Curve gezogen werden, so liegen von diesen 12 Puncten 16mal drei Puncte in einer geraden Linie, und von den 9 Puncten p, 6mal drei Puncte in einer geraden Linie.

Dafs die erwähnten drei Systeme vom Kegelschnitte (9.) alle Kegelschnitte umfassen, welche die gegebene Curve in drei verschiedenen Puncten berühren, läfst sich durch folgende Betrachtung nachweisen. Es seien p_1, p_2, p_3 die Berührungspuncte eines Kegelschnitts und der Curve. Die drei Tangenten π_1, π_2, π_3 in diesen Puncten lassen sich als eine Curve 3ter Ordnung betrachten. Da dieselben aber die gegebene Curve in 9 Puncten schneiden, von welchen 6 in einem Kegelschnitte liegen, so müssen die drei andern in einer geraden Linie liegen. Demnach erhält man, wenn die beiden Berührungspuncte p_1 und p_2 auf der Curve beliebig gegeben sind, den dritten p_3, wenn man die Tangenten π_1, π_2 construirt (welche die Curve in den Puncten

q_1 und q_2 schneiden mögen), hierauf die gerade Linie $q_1 q_2$ zieht, welche der Curve in dem Puncte q_3 begegnet und von diesem Puncte q_3 an die Curve eine Tangente zieht. Der Berührungspunct p_3 wird dann der gesuchte Punct sein. Nun lassen sich aber von dem Puncte q_3 der Curve 4 Tangenten an die Curve ziehen, von denen eine die Curve in dem Schnittpuncte der geraden Linie $p_1 p_2$ und der Curve berührt. Dieser Punct muſs aber verworfen werden, weil unter dem Kegelschnitte, welcher die Curve in den Puncten berührt, die in einer geraden Linie liegen, nur ein Linienpaar verstanden werden kann, welches mit der geraden Linie zusammenfällt. Man hat also in der That nur 3 Kegelschnitte, welche die gegebene Curve in 3 verschiedenen Puncten berühren, von denen 2 auf der Curve beliebig gegeben sind. Diese 3 Kegelschnitte finden sich aber auch unter den Kegelschnitten (9.). Denn wenn P_1, P_2 die den Puncten p_1, p_2 entsprechenden Puncte in einem der 3 Systeme sind und man bestimmt den dem Schnittpuncte P_3 der geraden Linie $P_1 P_2$ und der Curve entsprechenden Punct p_3 in demselben Systeme, so hat man den dritten Berührungspunct des Kegelschnitts, welcher die Curve in den Puncten p_1, p_2 berührt. Diese Construction, für die drei Systeme ausgeführt, giebt ebenfalls 3 Kegelschnitte von der genannten Eigenschaft und welche nur jene 3 vorhin erwähnten sein können. Dieses läſst sich kurz wie folgt zusammenfassen.

17. Alle Kegelschnitte, welche eine gegebene Curve dritter Ordnung in drei verschiedenen Puncten berühren, ordnen sich dreien Systemen unter. Ein gegebener Kegelschnitt dieser Art gehört dem einen oder dem andern Systeme an, je nachdem ein Berührungspunct und der Schnittpunct der geraden Linie (welche die beiden andern verbindet) und der Curve, ein Polenpaar aus dem einen oder dem andern Systeme bilden.

Auf dieselbe Weise, wie den 3 Schnittpuncten P', P'', P''' der geraden Linie A und der Curve dritter Ordnung 3 Puncte p', p'', p''' entsprechen, in welchen der Kegelschnitt (9.) die Curve berührt, entsprechen auch den 3 Schnittpuncten $P^{(4)}$, $P^{(5)}$, $P^{(6)}$ der geraden Linie B und der Curve 3 Puncte $p^{(4)}$, $p^{(5)}$, $p^{(6)}$, in welchen der Kegelschnitt

10. $$\beta_1\beta_1 a_{1,1}+\beta_2\beta_2 a_{2,2}+\beta_3\beta_3 a_{3,3}+2\beta_2\beta_3 a_{2,3}+2\beta_3\beta_1 a_{3,1}+2\beta_1\beta_2 a_{1,2}=0$$

die Curve berührt. Da aber das Linienpaar A, B, welches durch die Gleichung (6.) dargestellt ist, die Curve in den 6 Puncten P schneidet, so geht der Kegelschnitt (7.) durch die diesen entsprechenden 6 Puncte p. Dieses läſst sich umgekehrt auch so ausdrücken:

18. *Wenn man durch die drei Tangirungspuncte eines Kegelschnitts und einer Curve dritter Ordnung einen beliebigen Kegelschnitt legt, so schneidet derselbe die Curve in drei neuen Puncten, in welchen ein anderer Kegelschnitt die Curve berührt.*

Dafs dieser berührende Kegelschnitt zu demselben System wie der erste berührende Kegelschnitt gehört, ist einleuchtend. Es ist auch noch zu bemerken, dafs, wenn man den beliebigen Kegelschnitt, welcher durch die drei Berührungspuncte eines Kegelschnitts und der Curve gelegt ist, um die drei Berührungspuncte auf alle mögliche Art variiren läfst, unter den 3 Schnittpuncten desselben mit der Curve auch die 3 Tangirungspuncte eines beliebigen berührenden Kegelschnitts aus demselben Systeme sein werden.

5.

Um auch die speciellen Fälle der Curven dritter Ordnung in unsere Betrachtungen zu ziehen, bemerken wir, dafs, während sich die Gleichung der Curve 3ter Ordnung $\varphi=0$, wie in (Bd. 28. dieses Journals S. 90) gezeigt, im Allgemeinen auf die Form

$$11.\quad \varphi = y_1^3+y_2^3+y_3^3-2\pi y_1 y_2 y_3 = 0$$

zurückführen läfst, wo $y_1=0$, $y_2=0$, $y_3=0$ die Gleichungen dreier geraden Linien bedeuten, welche durch die 9 Wendepuncte der Curve hindurchgehen, in dem besonderen Falle, wenn die Curve einen Doppelpunct hat, aus jener Gleichung eins der drei ersten Glieder wegfällt, so dafs die Gleichung der Curve die Gestalt

$$12.\quad \varphi = y_1^3+y_2^3-2\pi y_1 y_2 y_3 = 0$$

annimmt. Denn es ist leicht zu sehen, dafs die Gleichung der Curve diese Form annehmen mufs, wenn $y_1=0$, $y_2=0$ die Gleichungen der beiden Tangenten in dem Doppelpuncte der Curve sind. Stellt man, um die Wendepuncte der Curve zu finden, welche einen Doppelpunct hat, von der Function φ die Determinante

$$\psi = -24\pi^2\{y_1^3+y_2^3+\tfrac{4}{3}\pi y_1 y_2 y_3\}$$

auf, so erhält man für diese Puncte:

$$\varphi=0,\qquad \psi=0;$$

woraus ersichtlich ist, dafs 6 von den 9 Wendepuncten in den Doppelpunct fallen, während die drei andern in der geraden Linie $y_3=0$ liegen.

Von den 4 Tangenten, welche von einem beliebigen Puncte der Curve an die Curve gezogen werden können, fallen zwei mit derjenigen geraden

Linie zusammen, welche den beliebigen Punct der Curve mit dem Doppelpuncte verbindet. Da diese gerade Linie aber nicht als eine wahre Tangente zu betrachten ist, so bleiben in der That nur 2 Tangenten übrig, und die Tangirungspuncte p und P sind zwei entsprechende Pole in dem einzigen hier Statt findenden Systeme. Die Function f für diesen Fall ist, abgesehen von einem constanten Factor, auf welchen es nicht ankommt:

$$f = y_1^3 + y_2^3 + 6\pi y_1 y_2 y_3.$$

Wenn man durch Y_1, Y_2, Y_3 dieselben linearen Functionen der Variabeln X_1, X_2, X_3 bezeichnet, welche y_1, y_2, y_3 von x_1, x_2, x_3 sind, so ergiebt sich folgendes System von Gleichungen zwischen den Coordinaten x_1, x_2, x_3 und X_1, X_2, X_3 der entsprechenden Pole p und P, welches dann in dem vorliegenden Falle das System von Gleichungen (1.) vertritt:

$$\begin{aligned} Y_1 y_1 + Y_2 \pi y_3 + Y_3 \pi y_2 &= 0, \\ Y_1 \pi y_3 + Y_2 y_2 + Y_3 \pi y_1 &= 0, \\ Y_1 y_2 + Y_2 y_1 + 0 &= 0. \end{aligned}$$

Aus der letzten dieser Gleichungen ist zu sehen, dafs die Verbindungslinien der beiden entsprechenden Pole p und P mit dem Doppelpuncte harmonisch sind zu den beiden Tangenten der Curve in dem Doppelpuncte. *Man erhält also den einem gegebenen Puncte P der Curve entsprechenden Pol p, wenn man P mit dem Doppelpuncte der Curve durch eine gerade Linie verbindet und zu dieser Verbindungslinie und dem Tangentenpaare in dem Doppelpuncte die vierte harmonische Linie construirt. Diese Linie schneidet die Curve in dem Puncte p.*

Wenn drei Puncte P der Curve auf einer geraden Linie A liegen, deren Gleichung

$$13. \quad \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \alpha_3 Y_3 = 0$$

ist, so berührt der Kegelschnitt

$$14. \quad \alpha_1\alpha_1 y_1^2 + \alpha_2\alpha_2 y_2^2 + \alpha_3\alpha_3 y_3^2 - 2\alpha_2\alpha_3 y_2 y_3 - 2\alpha_3\alpha_1 y_3 y_1 - 2\alpha_1\alpha_2 y_1 y_2$$
$$- \frac{\alpha_3}{\pi^2}\{\alpha_3 y_1 y_2 - 2\alpha_2 \pi y_1^2 - \alpha_1 \pi y_2^2\} = 0$$

die Curve in den drei den Puncten P entsprechenden Polen p, welche dem Vorhergehenden zufolge von dem Doppelpuncte aus leicht sich construiren lassen. Und diese Gleichung, welche analog der Gleichung (10.) gebildet ist, stellt, wenn man α_1, α_2, α_3 beliebig variiren läfst, das ganze System der Kegelschnitte dar, welche die Curve dritter Ordnung, mit einem Doppelpuncte, in drei verschiedenen Puncten berühren.

Wenn, zweitens, die betrachtete Curve zwei Doppelpuncte hat, so fallen in der Gleichung (11.) zwei von den drei ersten Gliedern weg und die Curve

$$15. \quad \varphi = y_1^3 - 2\pi y_1 y_2 y_3 = 0$$

zerfällt in einen Kegelschnitt $y_1^2 - 2\pi y_2 y_3 = 0$ und in eine gerade Linie $y_1 = 0$. Letztere schneidet den Kegelschnitt in den beiden Doppelpuncten der Curve. Die Tangenten des Kegelschnitts in diesen beiden Puncten werden durch die Gleichungen $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ ausgedrückt. Jedem Puncte P der Curve entspricht nun ein Pol p, dessen Coordinaten folgenden Relationen unterworfen sind:

$$\begin{aligned} Y y_1 + Y_2 \pi y_3 + Y_3 \pi y_2 &= 0, \\ Y_1 y_3 + 0 \qquad + Y_3 y_1 &= 0, \\ Y_1 y_2 + Y_2 y_1 \quad + 0 \qquad &= 0. \end{aligned}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen sieht man, *dafs das Linienpaar, welches zwei entsprechende Pole P und p mit einem der Doppelpuncte verbindet, zu der Tangente in dem Doppelpuncte und der Verbindungslinie der beiden Doppelpuncte harmonisch ist.* Hiernach läfst sich, wenn ein Punct P des Kegelschnitts gegeben ist, der entsprechende Pol p der Curve dritter Ordnung construiren; welcher ebenfalls auf dem Kegelschnitte liegen wird. Aus den beiden genannten Gleichungen entnimmt man ferner, *dafs wenn der Punct P auf der Verbindungslinie der beiden Doppelpuncte liegt, der entsprechende Pol p ebenfalls auf dieser geraden Linie liegen wird;* und aus der ersten Gleichung, *dafs in diesem Falle das Polenpaar P, p harmonisch ist zu den beiden Doppelpuncten.* Durchschneidet man die Curve mit einer geraden Linie A:

$$16. \quad \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \alpha_3 Y_3 = 0,$$

in drei Puncten P, so lassen sich nach den obigen Bemerkungen die entsprechenden Pole p leicht construiren. In diesen Polen p berührt nun der Kegelschnitt, dessen Gleichung

$$17. \quad \alpha_1\alpha_1 y_1^2 + \alpha_2\alpha_2 y_2^2 + \alpha_3\alpha_3 y_3^2 - 2\alpha_2\alpha_3 y_2 y_3 - 2\alpha_3\alpha_1 y_3 y_1 - 2\alpha_1\alpha_2 y_1 y_2 + \frac{2\alpha_2\alpha_3 y_1^2}{\pi} = 0$$

ist, den Kegelschnitt zweimal und die gerade Linie, aus welchen die Curve besteht. Es ist hier noch zu bemerken, dafs die Gleichung (17.), wenn man darin α_1, α_2, α_3 variiren läfst, alle Kegelschnitte umfafst, welche den Kegelschnitt und die gerade Linie, ans welchen die Curve 3ter Ordnung besteht, erstere in zwei verschiedenen Puncten, letztere in einem Puncte berühren.

Hieran knüpft sich nun die Lösung der nachstehenden Aufgabe. „Wenn „ein Kegelschnitt und eine gerade Linie gegeben sind: die Berührungspuncte „desjenigen Kegelschnitts zu construiren, welcher den gegebenen Kegelschnitt „in zwei Puncten und die gegebene gerade Linie in einem Puncte berührt; sei „es, dafs die beiden Berührungspuncte auf dem gegebenen Kegelschnitt, oder „ein Berührungspunct auf dem Kegelschnitt, der andere auf der geraden Linie, „gegeben sind."

Wenn endlich die betrachtete Curve drei Doppelpuncte hat, so fallen die drei ersten Glieder der Gleichung (11.) weg und die Curve zerfällt in drei gerade Linien, deren Gleichungen $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ sind. Es seien diese drei geraden Linien dieselben, welche im vorhergehenden Falle mit diesen Symbolen bezeichnet wurden. Es entspricht jedem Puncte P ein Pol p unter Vermittelung der Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 + Y_2 y_3 + Y_3 y_2 &= 0, \\ Y_1 y_3 + 0 \quad + Y_3 y_1 &= 0, \\ Y_1 y_2 + Y_2 y_1 + 0 \quad &= 0; \end{aligned}$$

woraus sich zeigt, dafs jedem Puncte P auf einer Seite des durch die drei geraden Linien gebildeten Dreiecks der Pol p entspricht, der harmonisch ist zu ihm und dem Punctenpaare, welches die in Rede stehende Seite des Dreiecks begrenzt. Durchschneidet man das Dreieck mit der geraden Linie A in drei Puncten P, so wird der Kegelschnitt

18. $\alpha_1\alpha_1 y_1^2 + \alpha_2\alpha_2 y_2^2 + \alpha_3\alpha_3 y_3^2 - 2\alpha_2\alpha_3 y_2 y_3 - 2\alpha_3\alpha_1 y_3 y_1 - 2\alpha_1\alpha_2 y_1 y_2 = 0$

das Dreieck in den drei entsprechenden Polen berühren. Und diese Gleichung stellt, unter der Voraussetzung, dafs α_1, α_2, α_3 beliebig variiren, alle Kegelschnitte dar, welche die Seiten des Dreiecks berühren. Zieht man die Gleichung (18.) von der (17.) ab, so erhält man $-\frac{2\alpha_2\alpha_3 y_1^2}{n} = 0$; welches beweiset, dafs die Kegelschnitte (17. und 18.) in dem Berührungspuncte der geraden Linie $y_1 = 0$ eine 4punctige Berührung haben. Dieses läfst sich wie folgt zusammenfassen. *Wenn man einen gegebenen Kegelschnitt und ein gegebenes Tangentenpaar desselben mit einer geraden Linie L durchschneidet, so lassen sich zwei Kegelschnitte construiren, von welchen der eine den gegebenen Kegelschnitt in den beiden Schnittpuncten der geraden Linie L und zugleich die Verbindungslinie M der Tangirungspuncte des gegebenen Tangentenpaares, der andere das Tangentenpaar in den Schnittpuncten der geraden Linie L und zugleich die gerade Linie M*

berührt. Diese beiden Kegelschnitte berühren sich vierpunctig in demjenigen Puncte der geraden Linie M, welcher harmonisch ist zu dem Schnittpuncte der Linien L und M und den Endpuncten der geraden Linie M.

6.

Den drei Systemen von Kegelschnitten (9.), welche die gegebene Curve dritter Ordnung $\varphi = 0$ in drei verschiedenen Puncten berühren, ordnen sich auch alle diejenigen Kegelschnitte unter, welche die Curve einmal vierpunctig und das anderemal zweipunctig berühren. Diese Art von Kegelschnitten (9.) entsprechen denjenigen unter den durch (8.) dargestellten geraden Linien A, welche die Curve berühren. Um die Berührungspuncte eines beliebigen dieser Kegelschnitte zu finden, nehme man ein Polenpaar P, p an und schneide die Curve durch die gerade Linie Pp in q. Alsdann giebt es zwei Kegelschnitte, welche die Curve in q zweipunctig berühren und von welchen der eine die Curve in P, der andere in p vierpunctig berührt; und diese beiden Kegelschnitte gehören einem und demselben Systeme an. Es erhellet hieraus:

18. Dafs alle Kegelschnitte, welche eine Curve dritter Ordnung, einmal vierpunctig, das anderemal zweipunctig berühren, in drei Systeme zerfallen. Ein gegebener Kegelschnitt dieser Art gehört dem einen oder dem andern Systeme an, je nachdem der vierpunctige Berührungspunct und der Schnittpunct der Verbindungslinie der beiden Berührungspuncte und der Curve ein Polenpaar des einen oder des anderen Systems sind.

Ist der vierpunctige Berührungspunct gegeben und der zweipunctige zu suchen, so verbinde man den vierpunctigen Berührungspunct mit den drei ihm in den drei Systemen entsprechenden Polen durch drei gerade Linien. Diese drei geraden Linien schneiden die Curve in den gesuchten Puncten. Die Aufgabe läfst also drei Auflösungen zu. Ist dagegen der zweipunctige Berührungspunct gegeben und der vierpunctige Berührungspunct zu suchen, so ergeben sich 12 Auflösungen der Aufgabe. Man erhält dieselben, wenn man zu dem gegebenen zweipunctigen Berührungspunct die drei Pole in den drei Systemen construirt und von den letzteren die 12 Tangenten an die Curve zieht. Die Berührungspuncte sind dann die gesuchten Puncte.

Um analytisch die Kegelschnitte (9.) zu bestimmen, welche die gegebene Curve dritter Ordnung, einmal vierpunctig, das anderemal zweipunctig berühren, bleibt noch übrig, die Relation zwischen den drei Gröfsen α_1, α_2, α_3 aufzustellen, welche Statt finden mufs, damit die gerade Linie, deren Gleichung

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$ ist, eine Tangente der Curve dritter Ordnung $p = 0$ sei; oder mit andern Worten: ***Wenn die Gleichung einer beliebigen Curve dritter Ordnung in Punctcoordinaten gegeben ist, dieselbe durch Liniencoordinaten auszudrücken.***

Diese Aufgabe läfst sich auf folgende Weise symmetrisch lösen. Man bilde die Determinante Δ aus folgenden Gröfsen:

$$\begin{matrix} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}, & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_2}, & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_3}, & \alpha_1, \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2 \partial x_1}, & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}, & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2 \partial x_3}, & \alpha_2, \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3 \partial x_1}, & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3 \partial x_2}, & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2}, & \alpha_3, \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & 0. \end{matrix}$$

Sie wird sowohl in Beziehung auf x_1, x_2, x_3, als in Beziehung auf die Gröfsen α_1, α_1, α_3 homogen und vom zweiten Grade sein. Man betrachte ferner die 6 Producte $x_1 x_1$, $x_2 x_2$, ... $x_1 x_2$ in den 6 Gleichungen

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \alpha_1 = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \alpha_2 = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} + \alpha_3 = 0,$$

$$x_1(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) = 0,$$
$$x_2(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) = 0,$$
$$x_3(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) = 0,$$

als die Unbekannten und löse diese lineären Gleichungen auf. Setzt man alsdann die Werthe der genannten 6 Producte in die Gleichung $\Delta = 0$, in welcher dieselben lineär vorkommen, so hat man die gesuchte homogene Gleichung vom 6ten Grade in Beziehung auf die Liniencoordinaten α_1, α_2, α_3. Dafs das System von 6 Gleichungen Statt findet, wenn $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$ die Gleichung der Tangente der Curve $\varphi = 0$ in dem Puncte ist, dessen Coordinaten x_1, x_2, x_3 sind, ist einleuchtend. Es bleibt also noch nachzuweisen, dafs auch die Determinante Δ unter diesen Bedingungen verschwindet. Zu diesem Ende bemerke ich, dafs von den 4 Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} x_1 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_2} x_2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_3} x_3 + 2\alpha_1 t &= A_1, \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2 \partial x_1} x_1 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} x_2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2 \partial x_3} x_3 + 2\alpha_2 t &= A_2, \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3 \partial x_1} x_1 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3 \partial x_2} x_2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} x_3 + 2\alpha_3 t &= A_3, \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 &= A_4 \end{aligned}$$

die drei ersten in die drei ersten mit dem Factor 2 multiplicirten Gleichungen des obigen Systems und die letzte in die Gleichung der Tangente übergehen, wenn man $t=1$ und $A_1=A_2=A_3=A_4=0$ setzt. Betrachtet man aber die in diesen Gleichungen explicite und lineär vorkommenden Gröfsen x_1, x_2, x_3, t als Unbekannten und löset sie nach diesen Unbekannten, z. B. nach x_1, auf, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$x_1 \varDelta = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + a_4 A_4.$$

Setzt man nun $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0$, so verschwindet $\varDelta$; was zu beweisen war.

7.

Unter den drei Systemen von Kegelschnitten (9.), welche die gegebene Curve dritter Ordnung in drei verschiedenen Puncten berühren, finden sich auch solche Kegelschnitte, welche mit der Curve eine 6punctige Berührung haben. Denn wenn man die gerade Linie A in die Lage einer Wendetangente bringt, welche, wie bekannt, der Curve in 3 Puncten P begegnet, die in einen zusammenfallen, so werden die diesen entsprechenden Puncte p, welche die Berührungspuncte der Kegelschnitte (9.) sind, ebenfalls in einen zusammenfallen; woraus eben eine 6punctige Berührung entsteht. Da aber jeder von den 9 Wendepuncten drei ihm entsprechende Pole hat, *so hat eine Curve dritter Ordnung im Allgemeinen 27 Puncte π, in welchen sie von Kegelschnitten 6punctig berührt werden kann.* Wenn man von einem der Wendepuncte δ die drei Tangenten an die Curve zieht, so werden die Tangirungspuncte α, β, γ die dem Wendepuncte δ entsprechenden Pole in den drei Systemen sein; was aus der in (§. 2.) angegebenen Construction des einem gegebenen Puncte der Curve entsprechenden Poles erhellet. Diese drei Puncte α, β, γ liegen in einer und derselben geraden Linie. Denn bekanntlich liegen die 6 Berührungspuncte der Tangenten, welche von einem beliebigen Puncte an die Curve dritter Ordnung gezogen werden können, in einem Kegelschnitte. Rückt nun der beliebige Punct in einen Wendepunct, so fallen 3 von den Berührungspuncten in einen Punct der Wendetangente; weshalb die drei übrigen ebenfalls in einer geraden Linie liegen müssen.

19. *Die Berührungspuncte der 27 Tangenten, welche von den Wendepuncten einer Curve dritter Ordnung an die Curve gezogen werden können, sind diejenigen Puncte π, in welchen Kegelschnitte die Curve 6punctig berühren können. Die 27 Kegelschnitte, welche die Curve 6punctig*

berühren, so wie die 27 Berührungspuncte π, zerfallen in drei Systeme von je 9 Kegelschnitten oder 9 Puncten. Ein beliebiger von diesen Kegelschnitten und sein Berührungspunct gehören dem einen oder dem andern Systeme an, je nachdem der Berührungspunct und der Schnittpunct der Tangente in dem Berührungspuncte und der Curve, welcher ein Wendepunct ist, ein Polenpaar des einen oder des andern Systems bilden.

Um die Lage der 27 Puncte α, β, γ zu einander zu erforschen, mufs man die Lage der 9 Wendepuncte δ ins Auge fassen. Letztere läfst sich aus dem Satze von *Poncelet:* „dafs jede, durch zwei Wendepuncte der Curve dritter „Ordnung gelegte gerade Linie auch einen dritten Wendepunct der Curve trifft," auf folgende Art erkennen. Wenn δ_1, δ_4, δ_7 drei, nicht in einer geraden Linie liegende Wendepuncte sind, so schneiden die geraden Linien $\delta_4\delta_7$, $\delta_7\delta_1$, $\delta_1\delta_4$ die Curve respective in drei neuen Wendepuncten δ_2, δ_5, δ_8. Man überzeugt sich leicht, dafs diese letzteren ebenfalls nicht in einer geraden Linie liegen. Denn lägen sie in einer geraden Linie, so hätte man folgende 4 Combinationen der 6 Wendepuncte, welche in einer geraden Linie liegen:

$$\delta_4\delta_7\delta_2, \quad \delta_7\delta_1\delta_5, \quad \delta_1\delta_4\delta_8, \quad \delta_2\delta_5\delta_8.$$

Verbindet man diese 6 Wendepuncte mit irgend einem der drei andern durch 6 gerade Linien, so müfste jede von diesen Linien die Curve in einem neuen Wendepuncte schneiden. Man erhielte also auf diese Weise statt der 9 Wendepuncte 13. Da nun die Wendepuncte δ_2, δ_5, δ_8 nicht in einer geraden Linie liegen, so werden die geraden Linien $\delta_5\delta_8$, $\delta_8\delta_2$, $\delta_2\delta_5$ die Curve in den drei noch übrigen Wendepuncten δ_3, δ_6, δ_9 schneiden. Erwägt man endlich, dafs die geraden Linien $\delta_1\delta_2$, $\delta_4\delta_5$, $\delta_7\delta_8$ die Curve nur in den Puncten δ_3, δ_6, δ_9 schneiden können, so erhält man folgende Combinationen der Wendepuncte, welche auf einer geraden Linie liegen:

$$\begin{array}{lll}
\delta_1\delta_2\delta_3 \;\ldots\ldots & \delta_4\delta_5\delta_6 \;\ldots\ldots & \delta_7\delta_8\delta_9, \\
\delta_2\delta_4\delta_7 \;\ldots\ldots & \delta_3\delta_5\delta_8 \;\ldots\ldots & \delta_1\delta_6\delta_9, \\
\delta_5\delta_7\delta_1 \;\ldots\ldots & \delta_6\delta_8\delta_2 \;\ldots\ldots & \delta_4\delta_9\delta_3, \\
\delta_8\delta_1\delta_4 \;\ldots\ldots & \delta_9\delta_2\delta_5 \;\ldots\ldots & \delta_7\delta_3\delta_6.
\end{array}$$

Ich werde die den Wendepuncten δ_1, δ_2, ... δ_9 entsprechenden Pole π

In dem ersten Systeme durch α_1, α_2, ... α_9,

In dem zweiten Systeme durch β_1, β_2, ... β_9,

In dem dritten Systeme durch γ_1, γ_2, ... γ_9

bezeichnen. Wenn nun $\delta_\varkappa\delta_\lambda\delta_\mu$ irgend eine der angegebenen 12 Combinationen der Wendepuncte ist, welche in einer geraden Linie liegen, so sind

$$\alpha_\varkappa \alpha_\lambda \delta_\mu, \quad \beta_\varkappa \beta_\lambda \delta_\mu, \quad \gamma_\varkappa \gamma_\lambda \delta_\mu$$

drei Coordinaten von Puncten, welche ebenfalls in einer geraden Linie liegen. Denn wenn man ein Polenpaar $\alpha_\varkappa \delta_\varkappa$ mit einem zweiten Polenpaar $\alpha_\lambda \delta_\lambda$ desselben Systems durch zwei gerade Linien $\alpha_\varkappa \alpha_\lambda$ und $\delta_\varkappa \delta_\lambda$ verbindet, so schneiden sich die Verbindungslinien nach (N. 6.) in einem und demselben Puncte der Curve. Es schneidet aber die gerade Linie $\delta_\varkappa \delta_\lambda$ die Curve in δ_μ: folglich liegen die Puncte $\alpha_\varkappa$, α_λ, δ_μ in einer und derselben Linie; was sich kurz so ausdrücken läfst:

20. *Jede gerade Linie, welche zwei Puncte π aus demselben Systeme verbindet, schneidet die Curve dritter Ordnung in einem Wendepuncte;* woraus folgt, *dafs 108mal zwei Puncte π und ein Wendepunct in einer geraden Linie liegen.*

Wenn, wie oben, $\delta_\varkappa \delta_\lambda \delta_\mu$ irgend eine Combination der Wendepuncte ist, welche auf einer und derselben geraden Linie liegen, so ist $\alpha_\varkappa \beta_\lambda \gamma_\mu$ eine Combination von drei Puncten π, welche ebenfalls auf einer geraden Linie liegen. Denn wenn man ein Polenpaar $\alpha_\varkappa \delta_\varkappa$ mit einem Polenpaare $\beta_\lambda \delta_\lambda$ eines anderen Systems durch zwei gerade Linien $\delta_\varkappa \delta_\lambda$ und $\alpha_\varkappa \beta_\lambda$ verbindet, so schneiden dieselben nach (N. 14.) die Curve in einem Polenpaare $\delta_\mu \gamma_\mu$ des dritten Systems. Dieses, mit der obigen Bemerkung, dafs auch $\alpha_\varkappa$, $\beta_\varkappa$, $\gamma_\varkappa$ in einer geraden Linie liegen, verbunden, giebt folgenden Lehrsatz:

21. *Jede gerade Linie, welche zwei Puncte π verbindet, die verschiedenen Systemen angehören, schneidet die Curve dritter Ordnung in einem Puncte π des dritten Systems. Es liegen also 81mal drei Puncte π auf einer geraden Linie* *).

Da die 9 Puncte π aus einem und demselben Systeme die den 9 Wendepuncten der Curve 3ter Ordnung in diesem Systeme entsprechenden Pole sind, so werden von den ersteren so oft 6 Puncte auf einem Kegelschnitt liegen, als von den letzteren 6 auf einem Linienpaare liegen. Hieraus folgt mit Rücksicht auf die angegebene Lage der Wendepuncte, der Lehrsatz:

22. *Von den 9 Puncten π eines und desselben Systems liegen 66mal 6 Puncte auf einem Kegelschnitt.*

---

*) Herr Professor *Steiner* giebt in dem Auszuge aus seiner am 27ten Nov. 1845 in der Akademie der Wissenschaften zu Berlin gehaltenen Vorlesung (in diesem Journal Bd. 32. S. 182) die Zahl der geraden Linien, von denen jede durch drei Puncte π hindurchgeht, auf 108 an. Nach meiner Auseinandersetzung müssen einige von den 108 geraden Linien, welche dieser berühmte Geometer im Auge gehabt hat, zusammenfallen, so dafs nur 81 wirklich von einander verschiedene Linien übrig bleiben.

Hieraus erhellet, dafs diese 9 Puncte nicht die Durchschnittspuncte zweier Curven dritter Ordnung sein können.

Wenn man in dem Lehrsatze (18.) für den ersten Kegelschnitt denjenigen auswählt, welcher in einem Puncte π die Curve 6punctig berührt, so ergiebt sich folgende Eigenschaft dieser Puncte:

23. ***Alle Kegelschnitte, welche eine Curve dritter Ordnung in einem Puncte π 3punctig berühren, schneiden die Curve in drei Puncten, in welchen ein anderer Kegelschnitt die Curve berührt;*** und umgekehrt:

24. ***Es giebt 9 Kegelschnitte, welche durch die drei Ecken eines der Curve dritter Ordnung einbeschriebenen Dreiecks hindurchgehen, dessen Seiten die Curve in drei in gerader Linie liegenden Puncten schneiden und in einem andern Puncte die Curve dreipunctig berühren. Der Ort dieser Berührungspuncte sind die 9 Puncte π, welche demselben Systeme angehören, dem das Dreieck angehört.***

Königsberg, im Juli 1847.

11.

Über die Erzeugung der Curven dritter Ordnung durch gerade Linien, und über geometrische Definitionen dieser Curven.

(Von Herrn *H. Grafsmann*, Oberlehrer an der Friedrich-Wilhelm-Schule zu Stettin.)

In einem Aufsatze über Curven dritter Ordnung, im 34ten Bande dieses Journals, behauptet Herr Professor *Plücker*, es gebe noch keine allgemeine geometrische Definition einer Curve dritter Ordnung, und schliefst daraus, dafs eine rein geometrische Behandlung dieser Curven, und also um so mehr der höheren Curven, gegenwärtig noch unmöglich sei. Nun habe ich im 31ten Bande dieses Journals die Grundzüge einer rein geometrischen Behandlung der höheren Curven zu geben versucht, und habe dort, namentlich für die Curven dritter Ordnung, eine geometrische Definition aufgestellt, deren Allgemeinheit ich dort nachgewiesen habe (S. 15 bis 17); ich könnte daher den Gegenstand als abgemacht ansehen, und mich damit beruhigen, dafs Herrn *Plücker* jener Band des Journals nicht zu Gesichte gekommen sei, wenn ich nicht befürchten müfste, dafs durch die so entschieden ausgesprochene Behauptung mancher Leser irre geführt werden möchte. Ich werde daher den Gegenstand hier noch einmal, und zwar von einem umfassenderen Gesichtspuncte aus aufnehmen.

Die einfachsten geometrischen Definitionen der Curven dritter Ordnung, deren jede diese Curven in ihrer ganzen Allgemeinheit darstellt, würden folgende drei sein; zwischen denen man, um eine methodische Behandlung darauf zu gründen, wählen kann:

No. 1. Der geometrische Ort der gemeinschaftlichen Spitze zweier Dreiecke, deren Winkel an der Spitze einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, während von den beiden nicht gemeinschaftlichen Schenkeln derselben jeder durch einen gegebenen Punct geht und von den 4 Endpuncten der Grundseiten jeder in einer gegebenen geraden Linie liegt, ist eine Curve dritter Ordnung.

No. 2. Wenn die Seiten eines veränderlichen Vierecks und eine Diagonale desselben um feste Puncte sich drehen, und die von der Diagonale nicht getroffenen Ecken in festen Geraden liegen, so ist der geometrische

Ort jeder von der Diagonale getroffenen Ecke des Vierecks eine Curve dritter Ordnung.

No. 3. Der geometrische Ort eines Punctes, dessen Verbindungslinien mit 3 gegebenen Puncten 3 gegebene Gerade so schneiden, dafs die 3 Durchschnittspuncte in gerader Linie liegen, ist eine Curve dritter Ordnung *).

Von diesen 3 Definitionen habe ich die erste in dem oben angeführten Aufsatze als eine alle Curven dritter Ordnung umfassende nachgewiesen, und ich habe dem Beweise nichts weiter hinzuzufügen. Dafs der geometrische Ort, welcher in der zweiten und dritten Definition genannt ist, gleichfalls eine Curve dritter Ordnung sei, ist dort ebenfalls bewiesen. Es bleibt nur übrig, zu zeigen, dafs auch jede dieser beiden letzten Definitionen alle Curven dritter Ordnung umfafst. Für die zweite Definition will ich hier den Nachweis vollständig liefern, während ich für die dritte nur den Gang des Beweises angeben werde.

Es sei $xuyu_1$ (Taf. I. Fig. 1.) das veränderliche Viereck, dessen Seiten xu, uy, yu_1, u_1x und dessen Diagonale xy sich beziehlich um die festen Puncte a, b, a_1, b_1 und d drehen und dessen Ecken u und u_1 sich beziehlich in den festen Geraden C und C_1 bewegen. Der Kürze wegen bezeichne ich, wie im ersten Aufsatze, die Verbindungslinie zweier verschiedener Puncte a und b durch ab, und den Durchschnitt zweier verschiedener Geraden A und B durch AB; wenn mehrere solche Ausdrücke ohne Klammern nebeneinander geschrieben sind, so soll die Construction in der Ordnung fortschreiten, wie diese Ausdrücke von links nach rechts hin folgen. Dann läfst sich nachweisen, dafs die von dem Puncte x construirte Curve dritter Ordnung die 9 Puncte

$$a,\ a_1,\ d,\ CC_1,\ (ab)(a_1b_1),\ dbC,\ db_1C_1,\ abC_1,\ a_1b_1C$$

enthält, die ich nach der Reihe beziehlich mit

$$a,\ a_1,\ d,\ e,\ f,\ g,\ g_1,\ h,\ h_1$$

bezeichnen will. In der That: liegt x in einem der Puncte a, a_1, oder d, so kann die Verbindungslinie zwischen x und diesem Puncte jede Richtung

---

*) Ich verstehe hier unter Curve dritter Ordnung (algebraisch gefafst) die Gesammtheit der Puncte, deren Coordinaten einer algebraischen Gleichung genügen, welche in Bezug auf diese Coordinaten vom 3ten Grade ist; und zwar auch dann noch, wenn beliebig viele der Constanten Null werden. Ich würde hiefür den Ausdruck *Punctgebilde 3ten Grades* vorziehen, wenn ich nicht befürchtete, dadurch undeutlicher zu werden.

annehmen, und es läfst sich daher dann leicht ein Viereck von der verlangten Art zeichnen. Liegt z. B. x in a, so giebt xa_1C_1 den Punct u_1, $(u_1b_1)(xd)$ den Punct y, ybC den Punct u; und verbindet man nun noch u mit a, so hat das so construirte Viereck xu_1yu die verlangte Eigenschaft, d. h. a ist ein Punct der von x construirten Curve. Liegt x nicht in einem dieser 3 Puncte, so haben die 3 von x ausgehenden Geraden xa, xd, xa_1 bestimmte Richtungen, und es werden alle diejenigen Puncte x-Puncte der Curve sein, für welche die 3 Geraden

$$xaCb,\quad xa_1C_1b_1,\quad xd$$

durch denselben Punct (y) gehen. Liegt nun x in C oder in ab, so wird die erste jener 3 Geraden gleich xb; liegt x in C_1 oder in a_1b_1, so wird die zweite jener Geraden gleich xb_1. Liegt also x in dem Durchschnitt von C und C_1, oder von ab und a_1b_1, oder von C und a_1b_1, oder von C_1 und ab, so gehen jene 3 Geraden durch denselben Punct x; d. h. es sind diese Durchschnitte Puncte der von x construirten Curve, d. h. es liegen e, f, h, h_1 in dieser Curve. Endlich: liegt x im Durchschnitt von db und C, so wird die erste jener 3 Geraden gleich xb und die dritte gleich xd; was mit xb zusammenfällt: also gehen dann wieder die 3 Geraden durch denselben Punct; d. h. g ist ein Punct der Curve, und aus demselben Grunde auch g_1. Es sind daher alle 9 oben genannten Puncte als Puncte der durch die Ecke x beschriebenen Curve dritter Ordnung nachgewiesen.

Nach diesen Vorbereitungen hat es nun keine Schwierigkeit mehr, die in No. 2. angegebene Erzeugung als eine allgemeine, d. h. als eine solche nachzuweisen, durch welche jede beliebige Curve dritter Ordnung erzeugt werden kann. In der That: ist irgend eine Curve dritter Ordnung gegeben, so schreibe man ihr irgend ein Viereck $fheh_1$ ein, dessen Seiten fh, he, eh_1, h_1f die Curve zum dritten Male, beziehlich in den Puncten a, g_1, g, a_1 treffen mögen und ziehe von irgend einem andern Puncte d der Curve, der aber nicht in dem Durchschnitt der beiden Linien ag und a_1g_1 liegt, nach zwei auf einander folgenden der letztgenannten Puncte, z. B. nach g_1 und g, die Geraden, welche die gegenüberstehenden Seiten des Vierecks beziehlich in b_1 und b schneiden mögen; dann sind die 9 so gewonnenen Puncte der Curve zufolge der vorher gegebenen Entwickelung zugleich Puncte derjenigen Curve dritter Ordnung, welche durch eine Ecke x eines Vierecks $xuyu_1$ beschrieben wird, dessen Ecken u und u_1 sich beziehlich in den Geraden eh_1 und eh bewegen, während die Seiten xu, uy, yu_1, u_1x und die Diagonale xy be-

ziehlich um die Puncte a, b, b_1, a_1, d sich drehen. Diese so erzeugte Curve hat mit der gegebenen 9 Puncte gemein; und zwar, da d nicht in dem durch die übrigen 8 Puncte schon bedingten Puncte (nämlich in dem Durchschnittspuncte der Geraden ag und a_1g_1) liegt, 9 solche Puncte, durch welche eine Curve dritter Ordnung bestimmt ist. Somit fällt die durch die Ecke x erzeugte Curve mit der gegebenen zusammen, und die Definition No. 2. ist als allgemein nachgewiesen. Hiermit ist zugleich gelegentlich der nachstehende Satz bewiesen:

> Wenn man einer Curve dritter Ordnung ein Viereck ($fheh_1$) einschreibt, dessen 4 Seiten (fh, he, eh_1, h_1f) die Curve beziehlich in 4 neuen Puncten (a, g_1, g, a_1) treffen, und man zieht von zweien dieser letztgenannten 4 Puncte, die in gegenüberliegenden Seiten jenes Vierecks liegen (z. B. von g und a, oder von g_1 und a_1), die Geraden beziehlich nach einem 9ten und einem 10ten Puncte der Curve (d und x), was auf 4 Arten möglich ist: so geht jedesmal die Verbindungslinie derjenigen Puncte (b und u, oder b_1 und u_1), worin diese Geraden beziehlich die gegenüberliegenden Seiten des Vierecks treffen, durch einen und denselben Punct (y) der Verbindungslinie des 9ten und 10ten Puncts; welche jener 4 möglichen Arten der Verbindung man auch wählen mag.

Den Beweis davon, dafs auch die *dritte* Definition allgemein sei, will ich hier nur mehr andeuten, als ausführen. Es sei x (Fig. 2.) der veränderliche Punct, dessen Verbindungslinien mit den festen Puncten a, b, c beziehlich die festen Geraden A, B, C so schneiden, dafs die drei Durchschnittspuncte u, v, w in gerader Linie liegen. In dem angeführten Aufsatze (S. 17) habe ich gezeigt, dafs dann der geometrische Ort von x eine Curve dritter Ordnung ist, welche durch folgende 9 Puncte geht:

$$a,\ b,\ c,\ BC,\ CA,\ AB,\ bcA,\ caB,\ abC,$$

die ich beziehlich mit

$$a,\ b,\ c,\ a_1,\ b_1,\ c_1,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma$$

bezeichnen will. Nun läfst sich leicht zeigen, dafs man jeder Curve dritter Ordnung Dreiecke einschreiben kann, deren entsprechende Seiten sich auf der Curve schneiden. Es seien abc und $a_1b_1c_1$ zwei solche, einer gegebenen Curve dritter Ordnung eingeschriebene Dreiecke, deren entsprechende Seiten sich beziehlich in den Curvenpuncten γ, α, β schneiden. Dann sind diese 9 Puncte zugleich Puncte der Curve dritter Ordnung, welche durch einen Punct x beschrieben wird, dessen Verbindungslinien mit a, b, c die Geraden

b_1c_1, c_1a_1, a_1b_1 beziehlich in dreien in gerader Linie liegenden Puncten schneiden; und zwar sind es 9 solche Puncte, durch welche die Curve dritter Ordnung bestimmt ist; folglich fällt die durch x erzeugte Curve mit der gegebenen zusammen, und die Definition No. 2. ist als allgemein nachgewiesen.

Um den Gegenstand endlich noch von einem allgemeineren Gesichtspuncte aus zu betrachten, werde ich den allgemeinen Satz über die Art, wie Curven dritter Ordnung und Curven dritter Classe durch Bewegung von geraden Linien erzeugt werden können, aufstellen, aus welchem man dann beliebig viele rein geometrische Definitionen der Curven dritten Grades ableiten kann.

Um diesen Satz in leicht fafslicher Form aussprechen zu können, will ich mich des Begriffs der offenen (nicht geschlossenen) Figur bedienen. Die offene Figur besteht aus einer Reihe von Puncten und geraden Linien, in der Art, dafs auf jeden Punct eine durch ihn gehende Gerade, und auf jede Gerade ein in ihr liegender Punct folgt, bis endlich die Reihe entweder mit einem Puncte oder einer Geraden schliefst; wie sie denn auch entweder mit einem Puncte oder mit einer Geraden beginnt. Punct und Gerade will ich zusammen *Elemente* nennen; das Element, mit welchem jene Reihe beginnt, will ich Anfangs-Element; das, womit sie schliefst, End-Element, beide zusammen Grenz-Elemente der offenen Figur nennen; alle Puncte der Reihe, die nicht Grenz-Elemente sind, nenne ich Ecken, alle Geraden der Reihe, die nicht Grenz-Elemente sind, Seitenlinien, oder kurzweg Seiten der offenen Figur. Es sind hiernach also 3 Fälle möglich: entweder beide Grenz-Elemente sind Puncte; dann hat die Figur eine Seite mehr als sie Ecken hat; oder beide Grenz-Elemente sind Gerade; dann hat sie eine Ecke mehr, als sie Seiten hat; oder endlich: Ein Grenz-Element ist ein Punct, das andere eine Gerade; dann hat sie eben so viele Ecken als Seiten und verwandelt sich, wenn der Grenzpunct in der Grenzlinie liegt, in eine geschlossene Figur. Wenn die offene Figur sich stetig verändert, so können bei dieser Veränderung in besonderen Übergangsfällen 2 aufeinander folgende Gerade der Reihe, oder 2 aufeinander folgende Puncte derselben zusammenfallen; alsdann kann man *dort* jeden Punct der zusammenfallenden Geraden als zwischenliegende Ecke, *hier* jede durch die zusammenfallenden Puncte gelegte Gerade als zwischenliegende Seitenlinie der offenen Figur auffassen. Der Satz von Erzeugung der Curven dritten Grades wird sich nun in folgender Gestalt darstellen lassen:

Wenn in einem Verein dreier offener Figuren, deren Anfangs-Elemente und deren End-Elemente zusammenfallen, alle Seiten derselben um

feste Puncte und alle Ecken derselben in festen Geraden sich bewegen, so beschreibt jedes Grenz-Element ein Gebilde dritten Grades*); und aufser dieser giebt es keine durch blofse gerade Linien bedingte Erzeugung der Gebilde dritten Grades.

Der Beweis des ersten Theils dieses Satzes ist in dem oben angeführten Aufsatze gegeben, in welchem der Satz für höhere Curven aufgestellt ist. Dafs es aufserdem keine andere lineale Erzeugungsweise der Gebilde dritten Grades giebt, folgt leicht aus demselben allgemeinen Satze für höhere Curven, indem sich leicht zeigen läfst, dafs alle andern Erzeugungs-Arten entweder höhere oder niederere Gebilde liefern. Der Satz, den ich hier aufgestellt habe, bietet 3 wesentlich verschiedene Fälle dar, nämlich: erstens, wenn die 3 offenen Figuren Puncte zu Grenz-Elementen haben, so beschreiben beide Puncte, jeder eine Curve dritter Ordnung; oder zweitens, wenn die Grenz-Elemente gerade Linien sind, dann umhüllen diese Geraden jede eine Curve dritter Classe; oder endlich, wenn von den Grenz-Elementen eins ein Punct, das andere eine Gerade ist, so wird von jenem eine Curve dritter Ordnung beschrieben, von dieser eine Curve dritter Classe umhüllt. Ich will hierbei noch bemerken, dafs von den 3 oben zu einer Definition aufgestellten Erzeugungs-Arten No. 2. zu dem ersten dieser 3 Fälle, und No. 1. und No. 3. zu dem letzten derselben gehören.

Stettin, den 28ten November 1847.

---

*) Ich sage, ein Punct beschreibe ein Gebilde $n$ten Grades, wenn er eine Curve $n$ter Ordnung (ein Punctgebilde $n$ten Grades) durchläuft, und eine Gerade beschreibe ein Gebilde $n$ten Grades, wenn sie eine Curve $n$ter Classe (ein Liniengebilde $n$ten Grades) umhüllt.

11 a.

Notiz über eine fruchtbare Integrationsmethode, und Benutzung derselben zu einer einfachen Darstellung des Werths von $\int\frac{dx}{(x^2+a)^n}$.

(Von Herrn Prof. Dr. *Radicke* zu Bonn.)

Das Differentiiren und Integriren unter dem Integralzeichen ist mehrfach benutzt worden, um aus einem bekannten (besonderen) Werthe des Integrals einer Function $\varphi(x)$ das Integral derjenigen Functionen abzuleiten, die aus $\varphi(x)$ durch Differentiiren und Integriren nach einer in derselben enthaltenen Constanten entstehen.

Desselben Mittels kann man sich auch bedienen, um Integrale *gegebener* Functionen statt der Functionen, die erst durch Differentiiren und Integriren gewonnen werden und deren Form also mehr oder weniger dem Zufall überlassen ist, aufzusuchen, indem man eine der beiden Formeln

$$1.\quad \int f(x)dx = D_a\int dx\int f(x)da,$$

$$2.\quad \int f(x)dx = \int da\int D_a f dx + \varphi(x)$$

zum Grunde legt, in welchen irgend für eine in $f(x)$ vorkommende Constante, D_a (nach *Cauchy*) die auf a sich beziehenden Differentialcoëfficienten bezeichnet, $\varphi(x)$ diejenige Function von x ist, welche, wenn der für $\int da\int D_a f dx$ gefundene Werth durch $\psi(x)$ ausgedrückt wird, aus

$$\varphi(x) = \int(f(x)-\psi(x))\,dx$$

sich ergiebt, und wo endlich die Integrationen zur Rechten ohne Rücksicht auf irgend einen besondern Anfangswerth ausgeführt angenommen werden mögen.

In der ersten Formel ist jeder besondere Werth von $D_a\int dx\int f(x)da$ zugleich ein besonderer Werth von $\int f(x)dx$, indem, wenn man unter den Integralen $\int da\int f(x)da$ und $\int dx\int f(x)da$ irgend einen ihrer besondern Werthe sich vorstellt, X eine bestimmte, von a unabhängige Function von x und A eine von x unabhängige Fnnction von a bezeichnet, stets

$$\int da \int f(x)\,dx = \int dx \int f(x)\,da + X + A$$

und folglich das mit $\int f(x)\,dx$ identische

$$D_a \int da \int f(x)\,da \quad \text{gleich} \quad D_a \int dx \int f(x)\,da + D_a A \text{ ist.}$$

In der zweiten Gleichung ist *nicht* jeder Werth von $\int da \int D_a f\,dx$ zugleich ein Werth von $\int f(x)\,dx$, indem allgemein

$$\int f(x)\,dx = D_a \int da \int f\,dx = \int da\,D_a \int f\,dx + \varphi(x)$$

(unter $\varphi(x)$ eine besondere von a unabhängige Function von x verstanden) und $D_a \int f\,dx = \int D_a f\,dx + A$ ist (A als eine von x unabhängige Function von a betrachtet), also die in (2.) angegebene Ergänzung durch Hinzufügung einer bestimmten, von der Besonderheit der benutzten, auf a und x sich beziehenden Integralwerthe abhängigen Function von x, im allgemeinen Fall nothwendig wird.

Durch Anwendung der Gleichung (1.) auf das Integral $\int \frac{dx}{(x^2+a)^n}$ erhält man nach und nach:

$$\int \frac{dx}{(x^2+a)^n} = -\frac{1}{n-1} D_a \int \frac{dx}{(x^2+a)^{n-1}},$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a)^{n-1}} = -\frac{1}{n-2} D_a \int \frac{dx}{(x^2+a)^{n-2}},$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a)^{n-2}} = -\frac{1}{n-3} D_a \int \frac{dx}{(x^2+a)^{n-3}}, \quad \text{etc.}$$

mithin

$$\int \frac{dx}{(x^2+a)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{1.2.3\ldots.(n-1)} D_a^{n-1} \int \frac{dx}{x^2+a} = \frac{(-1)^{n-1}}{1.2.3\ldots.(n-1)\sqrt{a}} D_a^{n-1} \operatorname{arctang} \frac{x}{\sqrt{a}}.$$

Bonn, im April 1847.

relle, Journal d. Math. Bd. 36. Heft 2.

Fac-simile eine

Perillustris a

[illegible]

Vale: [illegible]

[illegible]

re

Nr. 6.)

abe ich
ndtheile
es ver-
e Kraft
aft sei,
n unser
erleidet.
pecielle
dformel
aren in
zeigen,
ispiels-
führung
lbe der
ehen in
behielt
liegen-

ese so-
doch ist
n jener
nur die
speciell
gefun-

ispiels-
äufsert

und [illegible]

zugle

(unte
und
von
einer
ziehe
noth

hält

mithi
$\int$

12.
Über die Intensität des durch die Atmosphäre reflectirten Sonnenlichts.

(Fortsetzung des Aufsatzes „Über die Lichtzerstreuung in der Atmosphäre." Bd. 34. Nr. 6.)

(Von dem Herrn Candidaten *R. Clausius* zu Berlin.)

In dem Aufsatze „Über die Lichtzerstreuung in der Atmosphäre" habe ich gezeigt, dafs es, welche Hypothese man auch über diejenigen Bestandtheile der Atmosphäre annehmen mag welche die Reflexion des Sonnenlichtes verursachen und dadurch der Atmosphäre selbst eine gewisse leuchtende Kraft mittheilen, für die Berechnung dieser Wirkungen jedenfalls vortheilhaft sei, *den* Antheil des Lichts, welcher erst nach *mehrmaliger* Reflexion in unser Auge gelangt, von *demjenigen* zu sondern, der nur *eine* Reflexion erleidet. Diese Sonderung liefs sich allgemein ausführen; so dafs sie für jede specielle Hypothese anwendbar bleibt. Nur die Berechnung einer in der Endformel vorkommenden Constante und noch eine andere nöthige Bestimmung waren in solcher Allgemeinheit nicht möglich; und diese wurden, um wenigstens zu zeigen, in welcher Art sie bei besonderen Annahmen geschehen könnten, beispielsweise für eine bestimmte Hypothese durchgeführt. Die weitere Ausführung der Rechnungen dagegen, um die Helle, mit welcher das Himmelsgewölbe der Erd-Oberfläche leuchtet, zu bestimmen, erfordert ein näheres Eingehen in die Natur der lichtzerstreuenden Körperchen in der Atmosphäre. Ich behielt mir diese Entwickelungen vor, und sie sind der Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

Es wird zweckmäfsig sein, die zu dem Ende gewählte Hypothese sogleich voraufzuschicken, um dadurch die Anschauung zu erleichtern; jedoch ist zu bemerken, dafs der Gang der Entwickelungen im Allgemeinen von jener Hypothese unabhängig ist und dafs man bei einer andern Hypothese nur die Form der Function $F(\varphi)$ und diejenigen Rechnungen, welche sich speciell auf dieselbe beziehen, ändern dürfe; wodurch dann freilich auch die gefundenen Zahlenwerthe anders ausfallen.

Es werde also im Folgenden angenommen (wie schon früher beispielsweise geschah), dafs die Lichtzerstreuung in der Atmosphäre *durch äufserst*

feine, selbst bei klarem Wetter in der Luft schwebende Dunstbläschen bewirkt werde.

Diese Ansicht findet sich z. B. bei *Newton* (Optics, Book II, Part III, Prop. V. u. VII.) (jedoch scheint es, als habe *Newton* unter *Vapour* nicht sowohl Wasser*bläschen*, als vielmehr solide Wasserkügelchen verstanden) und bei *Herschel* (Vom Lichte §. 1143.). Sie ist, wie schon erwähnt, dadurch sehr bequem, dafs sich nach ihr die blaue Farbe des Himmels und die Morgen- und Abendröthe auf eine leichte Weise erklären lassen. Freilich sind von vielen Gelehrten auch andere Ansichten aufgestellt und vertheidigt worden: doch ist hier nicht der Ort, den Grad der Wahrscheinlichkeit derselben zu untersuchen. Jedenfalls wird es nützlich sein, *eine* Hypothese näher ins Auge zu fassen und ihre Folgen zu entwickeln; denn, indem sich die Ergebnisse dann mit der Wirklichkeit vergleichen lassen, hat man einen Prüfstein für die Hypothese selbst.

Die nächste Aufgabe mufs demnach sein, specieller, als es in dem vorigen Aufsatze geschehen konnte, zu betrachten, was aus dem Lichte wird, welches, von der Sonne kommend, auf ein Dampfbläschen fällt.

Wir wollen vorläufig die Sonnenstrahlen als parallel betrachten; d. h. von dem Raume, welchen die Sonnenscheibe am Himmel einnimmt, absehen, und annehmen, die ganze leuchtende Kraft der Sonne gehe von einem und demselben Puncte des Himmels aus.

Setzt man nun diese leuchtende Kraft oder die Intensität des Sonnenlichts $=1$, so wird die Lichtmenge, welche auf eine, den Sonnenstrahlen normal entgegengehaltene Ebene fällt, durch die Gröfse dieser Ebene ausgedrückt, und die Lichtmenge, welche auf irgend einen Körper fällt, durch die senkrechte Projection seiner ganzen der Sonne zugekehrten Fläche auf eine gegen die Strahlen normale Ebene. Bei einer Kugel ist diese Projection ein gröfster Kreis. Betrachtet man also ein Dampfbläschen, dessen Radius $=\varrho$, also dessen gröfster Kreis $=\varrho^2\pi$ ist, so drückt die Formel

$$(1.) \quad \varrho^2\pi$$

die ganze, auf das Bläschen fallende Lichtmenge aus; und davon wird ein Theil durchgelassen, ein anderer durch Reflexion nach allen Richtungen hin zerstreut.

Um in Bezug auf diese verschiedenen Richtungen die Anschauung und Bezeichnung zu erleichtern, stelle man sich um das Bläschen eine gegen dasselbe sehr grofse concentrische Kugelfläche beschrieben vor: dann bezeichnet

jeder Punct dieser äufsern Kugelfläche die Richtung eines von dem Bläschen ausgehenden Strahls, und jeder Flächenraum auf derselben einen körperlichen Winkel, in welchem eine gewisse Menge solcher Strahlen divergirt. Es werde nun untersucht, wie grofs die Helle sei, mit welcher diese äufsere Kugelfläche durch das von dem Bläschen kommende Licht erleuchtet wird.

Die Helle ist für jeden Raum der Kugelfläche proportional der auf diesen Raum fallenden Lichtmenge, dividirt durch die Gröfse des Raumes. Um für das Maafs dieser Helle eine bestimmte Einheit zu gewinnen, nehme man die ganze auf das Bläschen auffallende Lichtmenge, also $\varrho^2\pi$, als Einheit der Lichtmenge, und die ganze äufsere Kugelfläche, also 4π, als Einheit der auf derselben betrachteten Räume an. Würde nun *alles* auf das Bläschen fallende Licht reflectirt und gleichmäfsig ringsumher zerstreut, so wäre die Lichtmenge 1 über den Raum 1 gleichmäfsig vertheilt: also würde die entstehende Helle desselben ebenfalls in allen Puncten $=1$ sein. In der Wirklichkeit aber verhält es sich anders. Es sei *SNTM* (Fig. 1.) die äufsere Kugelfläche, in deren Mittelpuncte *C* sich das Bläschen befindet; der Punct *S* bezeichne die Richtung, in welcher die Sonne gesehen wird, also der gegenüberliegende Punct *T* die Richtung, nach welcher die directen Sonnenstrahlen gehen. Stellt man sich nun die ganze Kugelfläche in unendlich viele schmale Zonen um die Pole *S* und *T* getheilt vor, so ist leicht zu sehen, dafs jede dieser Zonen in ihren verschiedenen Puncten gleiche Helle haben wird, die verschiedenen Zonen aber verschiedene Helle; und es kommt darauf an, die Helle einer solchen Zone, z. B. *MN*, zu bestimmen, wenn deren Bogenradius $TM=\varphi$ gegeben ist, d. h. wenn bekannt ist, um welchen Winkel die von dem Bläschen aus auf die Zone fallenden Strahlen von der Richtung der directen Sonnenstrahlen abgelenkt sein müssen.

Man betrachte zu dem Ende die Reflexionen an dem Bläschen selbst näher. Es sei *sate* (Fig. 2.) ein in der Richtung der directen Sonnenstrahlen *st* durch den Mittelpunct *C* des Bläschens gelegter Querschnitt desselben, und *Sa* irgend ein auffallender Sonnenstrahl: so wird dieser Strahl schon bei seinem Durchgange durch das Wasserhäutchen bei *a* mehrfache Reflexionen erfahren, indem ein Theil an der Vorderfläche des Häutchens reflectirt wird, von dem eindringenden Theile noch ein Theil an der Hinterfläche, von diesem wieder ein Theil an der Vorderfläche u. s. w. Diese Vorgänge werden an einer besonderen Figur anschaulicher werden. Es sei *ABCD* (Fig. 3.) eine Tafel irgend eines brechenden Mediums mit parallelen Grenzflächen, auf

welche ein Strahl in der Richtung Sa auffällt: so wird ein Theil desselben in der Richtung aL reflectirt, während der übrige Theil eindringt. Von diesem wird bei α ein Theil durchgelassen, während ein anderer nach a_1 reflectirt wird. Bei a_1 wird wiederum ein Theil durchgelassen, ein anderer nach α_1 reflectirt u. s. w. Bei allen diesen Reflexionen finden *dieselben* Einfalls- und Brechungswinkel Statt: also wird überall derselbe aliquote Theil des auffallenden Lichtes reflectirt. Bezeichnet man diesen durch r und setzt die Intensität des auffallenden Strahles $Sa = 1$, so lassen sich leicht der Reihe nach die Intensitäten der verschiedenen andern Strahlen finden. Sie sind:

$$aL = r;\quad a\alpha = 1 - r;\quad \alpha K = (1-r)^2;\quad \alpha a_1 = (1-r)r;$$
$$a_1 L_1 = (1-r)^2 r;\quad a_1 \alpha_1 = (1-r) r^2 \text{ u. s. f.}$$

Die sämmtlichen in der Figur mit aL, $a_1 L_1$, $a_2 L_2$ etc. bezeichneten Strahlen bilden zusammen das ganze von der Tafel reflectirte Licht, dessen Intensität durch R bezeichnet werden soll; und eben so bilden die Strahlen αK, $\alpha_1 K_1$, $\alpha_2 K_2$ etc. zusammen das ganze durchgelassene Licht, dessen Intensität D heifsen mag. Es ist demnach

$$(2.)\quad \begin{cases} R = r + (1-r)^2 r + (1-r)^2 r^3 + (1-r)^2 r^5 + \ldots\ldots = \dfrac{2r}{1+r}, \\ D = (1-r)^2 + (1-r)^2 r^2 + (1-r)^2 r^4 + \ldots\ldots\ldots = \dfrac{1-r}{1+r} = 1 - R; \end{cases}$$

so dafs sich also die Gesammt-Intensitäten mittels einfacher Ausdrücke durch die Intensität r bei blofs einmaliger Reflexion bestimmen lassen. Man kann daher fortan von diesen einzelnen Reflexionen an der vordern und der hintern Fläche ganz absehen und die Gesammt-Intensitäten R und D als bekannte Functionen des Einfallswinkels betrachten, oder als Functionen des weiter unten näher zu bezeichnenden Ablenkungswinkels ψ.

Wir kehren nun zu Fig. 2. zurück. Von dem auffallenden Strahle Sa wird, wie so eben gezeigt, der Theil R in der Richtung aL reflectirt, und der Theil $1-R$ dringt in das Innere des Bläschens. Nachdem er es durchstrahlt hat, trifft er bei b wieder auf ein Wasserhäutchen, und dort geht Ähnliches vor sich. Ein Theil bK dringt hindurch, und dieser gehört, da er überhaupt keine Reflexion erlitten hat, nicht mit zu dem Lichte, welches in Betracht kommt; ein anderer Theil wird nach c reflectirt. Dort dringt wieder ein Theil cM hindurch, und ein anderer wird nach d reflectirt u. s. w. Diese verschiedenen reflectirten Strahlen nehmen der Reihe nach an Intensität ab, und man kann daher, je nach dem Grade der Genauigkeit, welchen man er-

reichen will, die Betrachtung auf eine gröfsere oder kleinere Anzahl derselben beschränken; mit der Gewifsheit, dafs der durch alle folgenden entstehende Fehler eine bestimmte Grenze nicht überschreiten werde.

Die einzelnen Intensitäten der Strahlen lassen sich leicht finden. Es ergiebt sich nämlich aus der einfachen Betrachtung der Figur, dafs alle vorkommenden Einfallswinkel gleich dem ersten $SaP = i$ sind; folglich hat R bei allen diesen Reflexionen denselben Werth und man erhält für die Strahlen aL, cM, dN, eO etc. der Reihe nach die Intensitäten

$$(3.) \quad R, \quad (1-R)^2 R, \quad (1-R^2)R^2, \quad (1-R)^2 R^3 \text{ etc.}$$

Aufser der Intensität ist aber auch noch die Gröfse der Ablenkung, welche jeder Strahl erfährt, zu beachten. Der Strahl aL wird um den Winkel KaL aus seiner ursprünglichen Richtung SK abgelenkt, und der Strahl cM um den gleichen Winkel KbM; der Strahl dN dagegen um den doppelten Winkel; eO um den dreifachen Winkel u. s. w., indem jede neue Reflexion die Ablenkung um denselben Winkel vergröfsert; und dieser Winkel ist der weiter oben durch ψ bezeichnete Ablenkungswinkel, als dessen Functionen die Intensitäten R und D betrachtet werden sollten. Es ist also

$$(4.) \quad \psi = 180 - 2i$$

und die Ablenkung der Strahlen aL, cM, dN, eO etc. ist der Reihe nach

$$(5.) \quad \psi, \ \psi, \ 2\psi, \ 3\psi \text{ etc.}$$

Bis jetzt beschränkten wir uns auf die Betrachtung eines einzelnen einfallenden Strahls Sa; es lassen sich aber die gefundenen Resultate sogleich auf eine Menge solcher Strahlen ausdehnen. Stellt man sich nämlich auf dem Dampfbläschen um den Punct s, als Pol, mit dem Bogenradius i eine unendlich schmale Zone beschrieben vor, so haben alle auf diese Zone fallenden Strahlen denselben Einfallswinkel i; so dafs also die Reflexion bei ihnen dieselbe Wirkung hervorbringen mufs. Man kann sie daher alle in eine Betrachtung zusammenfassen und festsetzen, die gerade Linie Sa solle nicht mehr blofs einen einzelnen Strahl bedeuten, sondern die ganze auf die Zone fallende Lichtmenge. Nennt man nun die Breite der Zone di, so ist die Gröfse derselben $= 2\varrho^2\pi \sin i\, di$ und ihre senkrechte Projection auf eine gegen st normale Ebene ist $= 2\varrho^2\pi \sin i \cos i\, di$. Die auf die Zone fallende Lichtmenge ist also, da die Lichtmenge $\varrho^2\pi$ zur Einheit angenommen wurde, $= 2 \sin i \cos i\, di$ $= \sin 2i\, di$, und dieses geht zufolge der Gleichung (4.) in

$$(6.) \quad \tfrac{1}{2} \sin\psi\, d\psi$$

über, indem die Umkehrung des Vorzeichens hier, wo es sich nur um absolute Werthe handelt, nicht in Betracht kommt.

Mit dieser Lichtmenge geht also, wie gesagt, Dasselbe vor, wie bei einem einzelnen Strahle, und die Geraden *aL*, *cM*, *dN*, *eO* etc. repräsentiren die in verschiedenen Stadien reflectirten Theile derselben.

Es ist nun weiter zu suchen, in welcher Art diese Theile zur Erleuchtung der äufsern Kugelfläche beitragen. Es ist leicht zu sehen, dafs jeder Theil sich auf sie über eine bestimmte Zone verbreiten wird, die man um *F* (Fig. 1.) als Pol beschreiben kann. Diese Zonen sind aber für die verschiedenen Theile, je nach ihren Ablenkungen ψ, 2ψ, 3ψ etc., sowohl in der Lage, als auch an Gröfse verschieden. Um zu finden, wieviel jeder Theil zur Erleuchtung seiner Zone beiträgt, mufs man nach dem obigen Principe die Lichtmenge des Theils durch den Flächenraum der Zone dividiren, indem bei der Bestimmung des Flächenraums die ganze Kugelfläche als Einheit angenommen wird.

Demnach wird es leicht sein, die Resultate wie folgt übersichtlich zusammenzustellen.

Theil *aL*.

Lichtmenge $= \frac{1}{2}\sin\psi\, d\psi . R$, Ablenkung $= \psi$. Der Theil verbreitet sich über eine Zone von dem Bogenradius ψ und der Breite $d\psi$: also ist die Gröfse der Zone $= \frac{2\pi \sin\psi\, d\psi}{4\pi} = \frac{1}{2}\sin\psi\, d\psi$ und

(I.) Die hervorgebrachte Helle $= \frac{\frac{1}{2}\sin\psi\, d\psi . R}{\frac{1}{2}\sin\psi\, d\psi} = \frac{\sin\psi}{\sin\psi} R = R.$

Theil *cM*.

Lichtmenge $= \frac{1}{2}\sin\psi\, d\psi (1-R)^2 R$, Ablenkung $= \psi$. Der Theil verbreitet sich über dieselbe Zone: also ist die Gröfse der Zone $= \frac{1}{2}\sin\psi\, d\psi$ und

(I. *a*.) Der hervorgebrachte Zuwachs an Helle $= \frac{\frac{1}{2}\sin\psi\, d\psi (1-R)^2 R}{\frac{1}{2}\sin\psi\, d\psi}$

$$= \frac{\sin\psi}{\sin\psi}(1-R)^2 R = (1-R)^2 R.$$

Theil *dN*.

Lichtmenge $= \frac{1}{2}\sin\psi\, d\psi (1-R)^2 R^2$, Ableitung $= 2\psi$. Der Theil verbreitet sich über eine Zone von dem Bogenradius 2ψ und der Breite $d(2\psi)$: also ist die Gröfse der Zone $= \frac{1}{2}\sin 2\psi\, d(2\psi)$ und

(II.) Die hervorgebrachte Helle $= \frac{\frac{1}{2}\sin\psi\, d\psi (1-R)^2 R^2}{\frac{1}{2}\sin 2\psi\, d(2\psi)} = \frac{1}{2}\frac{\sin\psi}{\sin 2\psi}(1-R)^2 R^2.$

Theil eO.

Lichtmenge $= \frac{1}{2} \sin\psi\, d\psi (1-R)^2 R^2$, Ablenkung $= 3\psi$. Der Theil verbreitet sich über eine Zone von dem Bogenradius 3ψ und der Breite $d(3\psi)$: also ist die Gröfse der Zone $= \frac{1}{2} \sin 3\psi\, d(3\psi)$ und

$$\text{(III.)}\quad \text{Die hervorgebrachte Helle} = \frac{\frac{1}{2}\sin\psi\, d\psi (1-R)^2 R^2}{\frac{1}{2}\sin 3\psi\, d(3\psi)} = \frac{1}{3}\frac{\sin\psi}{\sin 3\psi}(1-R)^2 R^2.$$

An den Formeln (I. *a.*), (II.) und (III.) zeigt sich das Fortschreitungsgesetz. Im Nenner des Bruchs befindet sich jedesmal der Sinus *des* Winkels, um welchen das Licht im Ganzen abgelenkt ist, im Zähler der Sinus *desjenigen*, um welchen es bei jeder einzelnen Reflexion abgelenkt wurde, und diesem letztern entspricht der Werth der in dem danebenstehenden Factor vorkommenden Function R.

Nachdem diese Resultate so weit festgestellt sind, mufs man den Gang der Betrachtung umkehren. Vorhin gingen wir von der auf eine bestimmte Zone des Bläschens auffallenden Lichtmenge aus und verfolgten dieselbe durch die verschiedenen Stadien der Reflexion. Jetzt wollen wir eine bestimmte Zone auf der äufsern Kugelfläche annehmen und die verschiedenen zu derselben gelangenden Lichtmengen betrachten; woraus sich dann die in ihr entstehende Gesammthelle ergeben wird.

Die Zone sei die schon oben bezeichnete MN (Fig. 1.), welche mit dem Bogenradius φ und der Breite $d\varphi$ um den Punct T als Pol beschrieben ist. Damit das Licht in diese Zone gelange, mufs es um einen der Winkel φ, $2\pi-\varphi$, $2\pi+\varphi$, $4\pi-\varphi$, $4\pi+\varphi$, u. s. f. aus seiner ursprünglichen Richtung CT abgelenkt sein.

Für dasjenige Licht, welches nur eine einmalige Reflexion erfährt, sei es äufserlich, wie bei aL, oder im Innern, wie bei cM, ist nur einer jener Winkel möglich, nämlich φ; denn um den Winkel $2\pi-\varphi$ kann das Licht durch eine einmalige Reflexion nicht abgelenkt werden, indem $\varphi < \pi$ und folglich $2\pi-\varphi > \pi$ ist. Es sind also, den obigen Formeln entsprechend, die beiden Helligkeiten

$$\text{(I.)}\quad \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi} R \quad \text{und} \quad \text{(I. } a.\text{)}\quad \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi}(1-R)^2 R.$$

Für das Licht, welches nach zweimaliger Reflexion in der Zone anlangen soll, sind die zwei Fälle möglich, dafs es durch jede Reflexion entweder um den Winkel $\frac{1}{2}\varphi$, oder um $\frac{1}{2}(2\pi-\varphi)$ abgelenkt wird. Der Winkel

$\frac{1}{2}(2\pi+\varphi)$ würde schon zu grofs sein. Es findet sich also für die beiden Helligkeiten:

$$\text{(II.)}\quad \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{1}{2}\varphi}{\sin\varphi}(1-R)^2R^2 \quad\text{und}\quad \frac{\sin\frac{1}{2}(2\pi-\varphi)}{\sin\varphi}(1-R)^2R^2$$

Für das dreimal reflectirte Licht sind drei Fälle möglich, nämlich die einzelnen Ablenkungswinkel $\frac{1}{3}\varphi$, $\frac{1}{3}(2\pi-\varphi)$, $\frac{1}{3}(2\pi+\varphi)$; folglich ergeben sich die drei Helligkeiten

$$\text{(III.)}\quad \frac{1}{3}\frac{\sin\frac{1}{3}\varphi}{\sin\varphi}(1-R)^2R^3,\quad \frac{1}{3}\frac{\sin\frac{1}{3}(2\pi-\varphi)}{\sin\varphi}(1-R)^2R^3 \quad\text{und}$$
$$\frac{1}{3}\frac{\sin\frac{1}{3}(2\pi+\varphi)}{\sin\varphi}(1-R)^2R^3;$$

und so nach einem leicht ersichtlichen Fortschreitungsgesetze weiter.

Addirt man alle diese Werthe, so erhält man die gesuchte Gesammthelle der Zone *MN*, welche ich in meinem vorigen Aufsatze durch J bezeichnet habe, nämlich:

$$\text{(7.)}\quad J = \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi}R + \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi}(1-R)^2R$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{1}{2}\varphi}{\sin\varphi}(1-R)^2R^2 + \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{1}{2}(2\pi-\varphi)}{\sin\varphi}(1-R)^2R^2$$
$$+\frac{1}{3}\frac{\sin\frac{1}{3}\varphi}{\sin\varphi}(1-R)^2R^3 + \frac{1}{3}\frac{\sin\frac{1}{3}(2\pi-\varphi)}{\sin\varphi}(1-R)^2R^3 + \frac{1}{3}\frac{\sin\frac{1}{3}(2\pi+\varphi)}{\sin\varphi}(1-R)^2R^3$$
$$+\text{ etc.}$$

Hierbei ist aber zu bemerken, dafs die Function R in den verschiedenen Gliedern verschiedene Werthe hat. Da nämlich R eine Function des *einfachen* Ablenkungswinkels ist, so entspricht sie jedesmal demjenigen Winkel, dessen Sinus im Zähler vorkommt. Daher ist auch in den beiden ersten Gliedern der Bruch, welcher $=1$ ist, ungehoben stehen geblieben, weil man den Zähler kennen mufs.

Demnach kann man nun J für jeden Werth des Winkels φ berechnen; doch ist dabei noch folgender besondere Umstand zu berücksichtigen. Die sämmtlichen Glieder des obigen Ausdrucks haben nemlich $\sin\varphi$ zum Nenner, so dafs für die Grenzwerthe $\varphi=0$ und $\varphi=180^0$ alle Nenner $=0$ werden. Auf die beiden ersten Glieder hat dies keinen wesentlichen Einflufs, weil zugleich $\sin\varphi$ im Zähler vorkommt und die Glieder also dennoch endlich bleiben. Unter den übrigen Gliedern dagegen kommen zwar auch einzelne vor, deren

Zähler für $\varphi = 0$ und $\varphi = 180^0$ verschwinden, bei den meisten aber bleiben sie angebbar und es läfst sich daher der obige Ausdruck so zusammenfassen:

$$(7.\,a.)\qquad J = \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi}\cdot R + \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi}\cdot(1-R)^2 R + \frac{1}{\sin\varphi}\cdot P;$$

wo P eine Function von φ ist, welche für $\varphi = 0$ und $\varphi = 180^0$ nicht verschwindet. Es giebt demnach die Formel für diese beiden Grenzwerthe die Intensität des von dem Bläschen reflectirten Lichtes unendlich grofs an. Der Grund davon liegt darin, dafs bisher angenommen wurde, die ganze leuchtende Kraft der Sonne gehe von einem und demselben Puncte des Himmels aus; was voraussetzt, dafs die Helle dieses einen Puncts unendlich grofs sei. In der Wirklichkeit ist aber die Lichtstärke der Sonne über eine Kreisfläche mit einem Radius von etwa 16 Minuten vertheilt, und es mufs also untersucht werden, welchen Einflufs diese Gröfse auf die Formel (7. *a.*) habe.

Soll die Formel auf die Betrachtung des Himmels angewendet werden, so bedeutet φ den Bogen von dem beobachteten Puncte des Himmels bis zur Sonne; denn dieser Bogen bestimmt die Ablenkung, welche die directen Sonnenstrahlen erfahren haben müssen, um in jener andern Richtung zu erscheinen. Dieser Bogen wurde hier oben immer bis zum *Mittelpuncte* der Sonne gemessen; es wurden daher für die übrigen Theile derselben Fehler gemacht, die jedoch die Gröfse von 16 Minuten nicht überschritten. Dieser Kleinheit wegen, und da aufserdem für die dem beobachteten Puncte des Himmels zugekehrte und für die abgekehrte Hälfte der Sonnenscheibe die Fehler entgegengesetzter Art sind, also zum Theil sich aufheben müssen, kann man sie vernachläfsigen, so lange φ von den Grenzen 0 und 180^0 noch bis etwa um 1 Grad entfernt bleibt. Ich habe dieserhalb bei den weiter unten erwähnten numerischen Berechnungen die Formel (7. *a.*) von $\varphi = 1^0$ bis $\varphi = 179^0$ unverändert angewendet und nur für die Werthe $\varphi = 0$ und $\varphi = 180^0$ selbst, die Gröfse der Sonnenscheibe berücksichtigt; auch habe ich dabei R und P schlechtweg so angenommen, wie sie den Ablenkungswinkeln 0 und 180^0 entsprechen; so dafs also die beiden ersten Glieder der Formel keine Änderung erlitten haben und nur das Glied $\frac{P}{\sin\varphi}$ seines Nenners wegen modificirt worden ist; und zwar auf folgende Weise.

Man stelle sich die Sonnenscheibe in unendlich viele concentrische Ringe getheilt vor, jeden von der Breite dx, und betrachte einen solchen Ring, dessen Radius $= x$ ist, während der Radius der ganzen Sonnenscheibe durch σ bezeichnet wird. Der Flächenraum des Ringes ist $= 2\pi x dx$ und daher

die von ihm ausgehende Lichtstärke, wenn man die Lichtstärke der ganzen Sonne zur Einheit annimmt,

$$=\frac{2\pi x dx}{\pi\sigma^2}=\frac{2x dx}{\sigma^2}.$$

Dieses Licht soll nun durch die Reflexion eine Ablenkung um den Winkel x oder 180^0-x erfahren: man erhält also, dem Ausdrucke $\frac{P}{\sin\varphi}$ entsprechend, die Ausdrücke

$$\frac{2x dx}{\sigma^2}\cdot\frac{P}{\sin x} \text{ und } \frac{2x dx}{\sigma^2}\cdot\frac{P}{\sin(180^0-x)}.$$

Für die beiden hier vorkommenden Sinus kann man, ihrer Kleinheit wegen, den Winkel x setzen; was in beiden Fällen

$$\frac{2dx}{\sigma^2}\cdot P$$

giebt; und diese Gröfse mufs, um sie auf das Licht der ganzen Sonne auszudehnen, von $x=0$ bis $x=\sigma$ integrirt werden. Dies giebt

$$(8.)\quad \frac{2P}{\sigma} \text{ oder } \frac{P}{8\,\text{Min.}};$$

welcher Ausdruck an die Stelle von $\frac{P}{\sin\varphi}$ in die Formel (7. *a.*) einzurücken ist, damit dieselbe die gesuchten Werthe von J für $\varphi=0$ und $\varphi=180^0$ gebe.

Ich habe nach dieser Formel die Berechnung von J für eine Reihe bestimmter Werthe von φ ausgeführt, indem ich nach *Becquerel* und *Cahours* das mittlere Brechungsverhältnifs des Wassers zu 1,333 angenommen und dann zur Bestimmung der mit r bezeichneten Stärke der einzelnen Reflexionen der *Fresnel*'schen Formeln mich bedient habe. Die Resultate sind in der zweiten Spalte der nachfolgenden Tafel zusammengestellt, während die erste Spalte die entsprechenden Werthe von φ enthält. Die Zahlen der dritten und vierten Spalte beziehen sich auf eine weiter unten folgende Formel *).

*) In meinem frühern Aufsatze habe ich schon eine vorläufige Übersicht der Werthe von J gegeben, aber dabei, wie ich nachher bemerkte, einen Rechnungsfehler gemacht, durch welchen alle jene Werthe unrichtig geworden sind. Die Abweichungen sind jedoch nicht von der Art, dafs die dortigen Schlüsse dadurch ungültig würden; denn diese beruhen nur auf dem allgemeinen Gange der Function J; und dieser ist bei den dortigen Werthen der nemliche, wie hier. Es brauchen also nur die in den darauf folgenden Formeln vorkommenden Constanten, welche mit Hülfe jener Werthe bestimmt sind, geändert zu werden. Die dortige Formel (33.) geht in folgende über:

$$(33.)\quad \begin{cases}\text{Von } \varphi=0 \text{ bis } \varphi=90^0, & J=0{,}1568+0{,}8\cos^5\varphi;\\ \text{Von } \varphi=90^0 \text{ bis } \varphi=180^0. & J=0{,}09515.\end{cases}$$

(I.)

φ	J	J nach der Formel (9.)	Differenzen.
0	1,0198	0,9283	−0,0915
1°	0,9764	0,9147	−0,0617
2°	0,9500	0,9009	−0,0491
5°	0,8826	0,8593	−0,0233
10°	0,7931	0,7892	−0,0039
20°	0,6502	0,6499	−0,0003
30°	0,5184	0,5188	+0,0004
40°	0,3968	0,4017	+0,0049
50°	0,2977	0,3034	+0,0057
60°	0,2234	0,2259	+0,0025
70°	0,1736	0,1692	−0,0044
80°	0,1398	0,1313	−0,0085
90°	0,1182	0,1087	−0,0095
100°	0,1042	0,0973	−0,0069
110°	0,0958	0,0928	−0,0030
120°	0,0906	0,0918	+0,0012
130°	0,0880	0,0917	+0,0037
140°	0,0870	0,0918	+0,0048
150°	0,0876	0,0928	+0,0052
160°	0,0907	0,0973	+0,0066
170°	0,1021	0,1087	+0,0066
175°	0,1261	0,1183	−0,0078
178°	0,2000	0,1256	−0,0744
179°	0,3232	0,1284	−0,1948
180°	1,9267	0,1313	−1,7954

Die ganze Menge des von dem Bläschen reflectirten Lichts bleibt dieselbe, wie dort, nämlich 0,19265. Daraus ergeben sich die übrigen Veränderungen von selbst, und man erhält zur Schlufsformel

$$(39.)\quad \frac{N}{M} = 0{,}5222 - 0{,}08405\,\frac{e^{-c\alpha}}{M}.$$

Diese Formel ist von der dortigen so wenig verschieden, dafs der Fehler in den Werthen von $\frac{N}{M}$ nirgends eine ganze Einheit der dritten Decimalstelle beträgt, und dafs also die dort folgende Tafel III. gültig bleibt.

Die Werthe von J in der zweiten Spalte nehmen auf der ganzen ersten Halbkugel, von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 90^0$, schnell ab. Dieses Abnehmen geht auch über den gröfseren Theil der zweiten Halbkugel fort; aber langsamer; bis die Werthe bei $\varphi = 140^0$ ihr Minimum erreichen und dann langsam wieder wachsen. Ganz in der Nähe von $\varphi = 180^0$ erhebt sich aber J so schnell, dafs es bei $\varphi = 180^0$ sogar gröfser ist als bei $\varphi = 0$. Indessen, so auffallend dieses plötzliche Anwachsen der Lichtstärke an sich ist, so hat es doch bei der obigen Betrachtung der Atmosphäre wenig Bedeutung; denn das stärkere Licht könnte nur im Gegenpuncte der Sonne wahrgenommen werden. Dieser aber ist höchstens beim Sonnen-Auf- oder Untergange sichtbar, und dann ist das directe Sonnenlicht, ehe es zu den in jener Richtung befindlichen Dampfbläschen gelangt, auf dem weiten Wege durch die Atmosphäre so geschwächt worden, dafs die Theilchen viel mehr Licht von der übrigen Atmosphäre als von der Sonne selbst erhalten. Es wird also demnach eine ziemlich gleichmäfsige Helle dort entstehen. Aufserdem ist schon oben ein anderer Grund angeführt, weshalb diejenigen Veränderungen, die mit J in der Nähe von $\varphi = 0$ und $\varphi = 180^0$ vorgehen, von geringerer Bedeutung sind, als bei andern Winkeln φ. Da nämlich die Menge der Strahlen, welche einem bestimmten Winkel φ entsprechen, dem Sinus dieses Winkels proportional ist, so mufs diese Menge in der Nähe jener Grenzen sehr klein sein; so dafs eine vermehrte Intensität der Strahlen doch nur einen unbedeutenden Zuwachs der Lichtmenge hervorbringen kann.

Wir haben nun allerdings einen Ausdruck (7.) gefunden, mittelst dessen sich eine Reihe von Werthen für J berechnen liefs, indessen ist derselbe zur Einführung in andere Formeln wegen seiner Ausdehnung und sonstigen Unbequemlichkeit nicht brauchbar. Es ist nöthig, eine *einfachere* Function von φ zu suchen, welche den Werthen in der Tafel so genau als möglich entspricht. Wir haben schon früher eine Formel der Art aufgestellt, jedoch mit der Bemerkung, dafs sie nur für die dort nöthigen Integrationen gelten sollte, bei denen es nicht auf grofse Genauigkeit ankam. Indem wir dieselbe daher jetzt fallen lassen, wollen wir statt ihrer folgende annehmen:

$$(9.)\qquad J = 0{,}0917 + 1{,}24 \sin^4 \tfrac{1}{2}(130^0 - \varphi),$$

welche sich, obgleich sehr einfach, doch den Werthen der Tafel hinlänglich genau anschliefst. Zur Vergleichung sind die dieser Formel entsprechenden Werthe in der dritten Spalte der Tafel neben die wahren Werthe gesetzt, und in der vierten Spalte sind die Differenzen zwischen beiden angegeben. Wie

man sieht, sind die Differenzen sehr klein, aufser in der Nähe von $\varphi = 0$ und $\varphi = 180^0$, wo sie aber für die Aufgabe selbst wenig Bedeutung haben; aufserdem wechseln sie viermal das Vorzeichen.

Wendet man nun diese Formel zunächst dazu an, die ganze von dem Bläschen reflectirte Lichtmenge zu bestimmen, so findet sich für dieselbe

$$0{,}19265.$$

Dabei ist die gesammte, auf das Bläschen *gefallene* Lichtmenge als Einheit angenommen. Für die weitere Rechnung ist es aber bequemer, die Formel so einzurichten, dafs die so eben gefundene Menge des von dem ganzen Bläschen *reflectirten* Lichts als Einheit gilt. Dazu braucht man nur die Constanten der Gleichung (9.) durch diese Gröfse zu dividiren, welches

$$(9.\,a.)\quad J = 0{,}4760 + 6{,}4366 \sin^4 \tfrac{1}{2}(130^0 - \varphi) \text{ oder } = C + A \sin^4 \tfrac{1}{2}(k - \varphi)$$

giebt, wenn man

$$(10.)\quad C = 0{,}4760, \quad A = 6{,}4366, \quad k = 130^0$$

setzt. Diese Formel werde nun fortan als die in dem früheren Aufsatze oft erwähnte Function $F(\varphi)$ betrachtet, welche angiebt, in welcher Weise das durch einmalige Reflexion in die Luft zerstreute Licht nach allen Richtungen ringsumher vertheilt wird.

Ehe wir indessen zur Anwendung der Formel schreiten, ist noch eine andere Bemerkung nöthig. Es ist nämlich, wie früher erwähnt, möglich, dafs die Atmosphäre nicht alles Licht, welches sie einer Lichtmenge bei deren Durchgange entzogen hat, wieder reflectirt, sondern dafs nur ein Theil desselben *reflectirt*, der andere dagegen *absorbirt* werde. Da man indessen über die Absorption nichts Bestimmtes weifs, so liefsen wir sie in den bisherigen Rechnungen ganz unberücksichtigt und sagten nur, dafs ein durch sie bedingter Lichtverlust leicht nachträglich in Abzug zu bringen sei *). Bei den folgenden Entwickelungen wird es indessen zweckmäfsig sein, die Wirkung der Absorption in die allgemeinen Formeln als unbekannten Factor mit einzu-

*) *Bouguer* (Optice) schliefst aus einer Beobachtung, welche er in Amerika gemacht hat, dafs nur $\frac{1}{3}$ des aufgefangenen Lichts reflectirt werde. Doch beruhen seine Schlüsse auf Annahmen, welche durchaus nicht verbürgt sind. Aus denselben Zahlen, von denen er ausgeht, würde nach andern Principien, welche mir naturgemäfser scheinen, der Werth $\frac{1}{2}$ folgen; und wenn man jene Zahlen, die zum Theil sehr unsicher sind, nur innerhalb der Grenzen dieser wahrscheinlichen Unsicherheit verändert, so kann man selbst zu dem Werth 1 gelangen, d. h., dafs *alles* aufgefangene Licht reflectirt werde, also gar keine Absorption Statt finde. Jedenfalls folgt hieraus, dafs jene Beobachtung zu einem *zuverläfsigen* Resultat noch nicht hinreicht.

führen, um bequem übersehen zu können, welchen Einflufs diese oder jene Annahme der Absorption auf die Resultate haben werde. Die Einführung der Absorption in die Rechnung ist leicht, und erschwert auch die weiteren Entwickelungen nur wenig. Wenn nämlich wirklich die Menge Licht, die irgend ein unvollkommen durchsichtiges Medium von einem hindurchgehenden Lichte auffängt, also dem directen Lichte entzieht, in zwei Theile zerfällt, deren einer durch Reflexion zerstreut, der andere absorbirt wird: so liegt es nahe, anzunehmen, dafs für ein- und dasselbe Medium die beiden Theile stets *in gleichem Verhältnisse* zu einander stehen, also, dafs das reflectirte Licht stets derselbe aliquote Theil des gesammten aufgefangenen Lichtes sei, und dafs ferner der reflectirte Theil bei seiner Vertheilung ringsumher den gewöhnlichen Reflexionsgesetzen folge, welche uns für die Luft, bei der speciellen Annahme zu der Function $F(\varphi)$ (9. *a.*) geführt haben.

Es werde demnach die Menge des durch Reflexion zerstreuten Lichts, als Bruchtheil des ganzen aufgefangenen Lichtes, durch ϱ bezeichnet. Ist daher M der Verlust an directem Lichte, so ist die Lichtmenge ϱM in die Atmosphäre zerstreut und $(1-\varrho)M$ ist absorbirt worden, also für die Wahrnehmung überhaupt verschwunden. Daraus folgt, dafs, während ohne Absorption die Formel $MF(\varphi)$ die Intensität des zerstreuten Lichts nach den verschiedenen Richtungen geben würde, diese jetzt durch $\varrho MF(\varphi)$ ausgedrückt wird. Will man bei der Anwendung der so gebildeten Formeln, weil der Werth von ϱ unbekannt ist, von der Absorption absehen, so braucht man nur $\varrho = 1$ zu setzen.

Nachdem auf diese Weise die Gesetze, welche auf den besondern Eigenschaften der Atmosphäre beruhen, so weit sie im Nachfolgenden nöthig sein werden, festgestellt worden sind, läfst sich nun zur weitern Behandlung der Aufgabe schreiten; und zwar wollen wir dieselbe in zwei Theile zerlegen, nemlich zuerst die vom *ganzen* Himmel zur Erde gelangende Lichtmenge, und dann die Helle des Himmels an seinen verschiedenen *Stellen* suchen.

Es soll zunächst untersucht werden, wieviel Licht von dem *ganzen* Himmel auf die Flächen-Einheit der Erd-Oberfläche falle; wobei diejenige Lichtmenge zur Einheit angenommen wird, welche die Flächen-Einheit von der Sonne empfangen würde, wenn dieselbe im Zenith stände und keine Atmosphäre ihre Strahlen schwächte.

Zufolge der Entwickelung der Gleichung (9.) im frühern Aufsatze kennt man die Lichtmenge, welche die Atmosphäre dem directen Sonnenlichte entzieht; sie ist

$$M = \frac{1 - e^{-ca}}{c}.$$

Die durch eine erste Reflexion in der Atmosphäre zerstreute Lichtmenge ist also, mit Berücksichtigung der Absorption,

$$(11.) \qquad = \varrho M.$$

Ferner ist der durch die zweite Reflexion entstehende Verlust an Licht durch die Gleichung (39.) bestimmt worden (S. die Anmerkung S. 194). Derselbe ist

$$\frac{\varrho N}{\varrho M} = 0{,}5222 - 0{,}08405 \frac{e^{-ca}}{M},$$

also ist

$$\varrho N = \varrho(0{,}5222\, M - 0{,}08405\, e^{-ca}),$$

und die durch zweite Reflexion in die Atmosphäre zerstreute Lichtmenge, wenn die Absorption zum zweitenmal berücksichtigt wird, ist

$$(12.) \qquad = \varrho^2 N = \varrho^2(0{,}5222\, M - 0{,}08405\, e^{-ca}).$$

Da dieses letztere Licht eine andere Betrachtung gestattet, als das erste (11.), so soll es vorläufig unberücksichtigt bleiben und erst die Frage sein: Wieviel empfangen wir vom Himmel Licht, welches nur *einmal* reflectirt worden ist.

Um zu finden, wieviel dergleichen Licht nach unten *gelangt*, mufs man wissen, wieviel davon nach unten *gesendet* wird. Da die Zerstreuung dieses Lichts nicht gleichförmig ist, so geht nicht gerade die Hälfte des zerstreuten Lichts nach unten, sondern ein Bruchtheil, der von dem jedesmaligen Stande der Sonne abhängt. Dieser mufs mit Hülfe der Function $F(\varphi)$ (9. a.) bestimmt werden.

Zu dem Ende stelle man sich vor, dafs durch die um das Dampfbläschen beschriebene äufsere Kugelfläche eine durch den Mittelpunct gehende, mit der Erd-Oberfläche parallele Ebene gelegt sei, welche die Kugelfläche halbirt, und suche nun für einen beliebigen Stand der Sonne den *Theil* des von dem Bläschen ausgesandten Lichts, welcher auf eine der beiden Halbkugeln fällt.

Es sei (Fig. 4) die äufsere Kugelfläche, und zwar so, dafs $ABCD$ der erwähnte Kreisschnitt ist und die Figur die der Erde zugewendete Halbkugel vorstellt. Der Punct E wird dann die senkrecht nach der Erde zu

gehende Richtung bezeichnen, und den Punct T nehmen wir als die Richtung der directen Sonnenstrahlen an, so dafs der Bogen ET der Zenith-Abstand der Sonne $(=\gamma)$ ist. Nun stelle man sich durch T zwei gröfste Kreise CD und cd einander unendlich nahe gelegt vor, welche mit dem gröfsten Kreise TE resp. die Winkel ω und $\omega + d\omega$ einschliefsen. Auf diesen beiden gröfsten Kreisen seien von T aus die Bogen $TM = Tm = \varphi$ und $TN = Tn = \varphi + d\varphi$ abgemessen, so ist dadurch ein Elementarstück der Kugelfläche bestimmt, dessen Gröfse, wenn man die ganze Kugelfläche zur Einheit nimmt, $MNnm = \frac{1}{4\pi}\sin\varphi\, d\varphi\, d\omega$ ist; die darauf fallende Lichtmenge ist folglich

$$= \frac{1}{4\pi} F(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi\, d\omega = \frac{1}{4\pi}[C + A\sin^4\tfrac{1}{2}(k-\varphi)]\sin\varphi\, d\varphi\, d\omega.$$

Wenn man diesen Ausdruck nach φ integrirt, die Grenzen erst zwischen $\varphi = 0$ und $\varphi = TC = \varphi_1$, sodann zwischen $\varphi = 0$ und $\varphi = TD = \pi - \varphi_1$ nimmt, und dann beide bestimmte Integrale addirt, so erhält man für die auf den Raum $CcTDd$ fallende Lichtmenge

$$\frac{1}{4\pi}\{2C + \tfrac{1}{2}A(\tfrac{1}{3}(4+\sin^2 k) - \tfrac{1}{2}\pi\sin k - \cos k\sin^2\varphi_1 + \tfrac{2}{3}\sin k\cos k\sin^3\varphi_1)\}\, d\omega.$$

Die hierin vorkommende Gröfse $\varphi_1 = TC$ ist von ω vermöge der Gleichung

$$\sin^2\varphi_1 = \frac{\cos^2\gamma}{1-\sin^2\gamma\sin^2\omega}$$

abhängig. Eliminirt man demnach φ_1, so geht der vorige Ausdruck in

$$\frac{1}{4\pi}\Big\{2C + \tfrac{1}{2}A\Big(\tfrac{1}{3}(4+\sin^2 k) - \tfrac{1}{2}\pi\sin k - \cos k\frac{\cos^2\gamma}{1-\sin^2\gamma\sin^2\omega}$$
$$+ \tfrac{2}{3}\sin k\cos k\frac{\cos^3\gamma}{(1-\sin^2\gamma\sin^2\omega)}\Big)\Big\}\, d\omega$$

über. Dieser Ausdruck mufs von $\omega = 0$ bis $\omega = \pi$ integrirt, oder, was dasselbe ist, von $\omega = 0$ bis $\omega = \frac{1}{2}\pi$ integrirt und dann verdoppelt werden. Führt man die Integration aus, so weit es möglich ist, und macht die nöthigen Zusammenziehungen und Vereinfachungen, so erhält man für die auf die Halbkugel fallende Lichtmenge, welche durch p bezeichnet werden mag, den Ausdruck

$$(13.)\quad p = \tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{4}A\Big(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{8}\pi\sin k + \tfrac{1}{12}\sin^2 k - \tfrac{1}{4}\cos k\cos\gamma$$
$$+ \tfrac{1}{3}\pi\sin k\cos k\cos\gamma\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{(1-\sin^2\gamma\sin^2\omega\, d\omega)}\Big).$$

Das hierin noch vorkommende Integral ist eine elliptische Function, und man hat also einen Ausdruck, nach welchem p für jeden Werth von γ berechnet werden kann. Derselbe giebt z. B. folgende Zahlenreihe

(II.)

γ	p	γ	p
0	0,7530	60°	0,6568
10°	0,7512	65°	0,6359
20°	0,7452	70°	0,6126
30°	0,7342	75°	0,5870
40°	0,7167	80°	0,5594
50°	0,6913	90°	0,5

Diese für ein einzelnes Dampfbläschen entwickelten Verhältnisse gelten natürlich sogleich für die ganze Atmosphäre, und es läfst sich also aus der Menge des überhaupt durch eine erste Reflexion zerstreuten Lichts der davon *nach unten* gehende Theil finden, welcher

$$(14.)\quad p.\varrho.M$$

ist. Daraus folgt für den *nach oben* gehenden Theil

$$(14.a.)\quad (1-p)\varrho.M.$$

Kennt man so das abwärts *gesendete* Licht, so erhält man den davon wirklich unten *ankommenden* Theil, wenn man von jenem den Verlust, den es unterwegs erleidet, abzieht; wie dieser Verlust zu bestimmen sei, ist früher auseinandergesetzt. Die Aufgabe ist also für das nur *einmal* reflectirte Licht als gelöset zu betrachten.

Wir wenden uns nun zur Betrachtung desjenigen Lichts, welches durch eine zweite Reflexion abermals in der Atmosphäre zerstreut wird. Die Menge desselben $\varrho^2 N$ ist durch die Gleichung (12.) gegeben. Von diesem Lichte wurde angenommen, dafs es gleichmäfsig nach allen Richtungen hin zerstreut werde, und es läfst sich auch als in allen Luftschichten gleich stark betrachten. Wenn daher keine *Absorption* Statt fände, so würde von demselben (welche neue Reflexionen es auch noch zu erleiden hätte) endlich die Hälfte zur Erd-Oberfläche gelangen; die andere Hälfte würde in den Weltenraum verloren gehen. Da aber die Absorption berücksichtigt werden soll, so müssen wir die hier noch vorgehenden Processe specieller verfolgen.

Stellt man sich, wie früher, eine senkrecht durch die Atmosphäre gehende Luftsäule mit dem Querschnitte 1 vor, so ist die Menge Licht, welche die Säule von der hier betrachteten Art versendet, $=\varrho^2 N$. Nimmt man also in der Höhe y eine Elementarschicht von der Dicke dy an, so wird die von derselben versendete Lichtmenge $=\varrho^2 N\cdot\frac{dy}{h}$ sein; und um zu erfahren, wie-

viel davon zur Erd-Oberfläche gelange, kann man auf die schon gewonnenen Resultate zurückgehen. Man braucht dazu nur in der Gleichung (6. im früheren Aufsatze) an die Stelle von μ den Werth $\varrho^2 N \cdot \frac{dy}{h}$ zu setzen, welches für diese Lichtmenge

$$\tfrac{1}{2}\varrho^2 N \cdot \frac{dy}{h}\delta . y \int_{z=\delta . y}^{z=\infty} \frac{e^{-z}}{z^2} dz$$

giebt. Um diesen Ausdruck auf die ganze Säule auszudehnen, mufs er von $y = 0$ bis $y = h$ integrirt werden. Setzt man dabei wieder zur Vereinfachung

$$\delta . y = x \quad \text{und} \quad \delta . h = a,$$

so erhält man

$$\tfrac{1}{2}\frac{\varrho^2 N}{a}\int_0^a \left[x \int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x^2} dx\right] dx.$$

Dieses Integral läfst sich durch partielle Integrationen vereinfachen und es ergiebt sich dann für die von der ganzen Säule zur Erde gelangende Lichtmenge:

$$\tfrac{1}{2}\varrho^2 N . \left(\frac{1-e^{-a}}{2a} + \tfrac{1}{2}e^{-a} - \tfrac{1}{2}a\int_a^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx\right) = \tfrac{1}{2}\varrho^2 N . v,$$

wenn man zur Abkürzung

$$(15.) \qquad v = \frac{1-e^{-a}}{2a} + \tfrac{1}{2}e^{-a} - \tfrac{1}{2}a\int_a^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx$$

setzt. Die Gröfse v ist eine Constante, welche sich berechnen läfst, sobald man a kennt. Für den früher in der Gleichung (27.) angenommenen Werth von a ergiebt sich z. B.

$$(15. a.) \qquad v = 0{,}67474.$$

Eben so viel Licht, wie zur Erde gelangt, gelangt natürlich auch an die obere Grenze der Atmosphäre; und wenn man die Summe beider von der ganzen Menge $\varrho^2 N$ abzieht, so erhält man für den durch die dritte Reflexion verursachten Lichtverlust, $\varrho^2 N(1-v)$. Hieraus folgt, nachdem man wiederum die Absorption berücksichtigt hat, für die durch dritte Reflexion in die Atmosphäre zerstruete Lichtmenge $\varrho^3 N(1-v)$. Dieses Licht steht nun unter denselben Gesetzen, wie das durch die zweite Reflexion zerstreute Licht; so dafs leicht zu sehen ist, wie die eben beschriebenen Vorgänge weiter sich erstrecken.

Die Resultate lassen sich folgendermaafsen zusammenstellen. Von der Lichtmenge



(16.)
$$\left\{\begin{array}{ll} \text{Wird durch die zweite Reflexion zerstreut } \rho^2 N, & \\ \quad \text{Davon gelangt zur Erde} \ldots\ldots & \rho^2 N \tfrac{1}{2} v, \\ \text{Durch die dritte Reflexion wird zerstreut } \rho^3 N(1-v), & \\ \quad \text{Davon gelangt zur Erde} \ldots\ldots & \rho^3 N(1-v).\tfrac{1}{2} v, \\ \text{Durch die vierte Reflexion wird zerstreut } \rho^4 N(1-v)^2, & \\ \quad \text{Davon gelangt zur Erde} \ldots\ldots & \rho^4 N(1-v)^2.\tfrac{1}{2} v, \\ \quad \text{u. s. w.} & \end{array}\right.$$

Es ist also die Summe der zur Erde gelangenden Lichtmengen

$$= \rho^2 N.\tfrac{1}{2} v[1+\rho(1-v)+\rho^2(1-v)^2+\rho^3(1-v)^3+\ldots.]$$

(17.) $$= \tfrac{1}{2}\rho^2 N \frac{v}{1-\rho(1-v)}.$$

Dieses ist der gesuchte Theil des dem directen Sonnenlichte entzogenen Lichtes, welchen die Erde nach mehrfacher Reflexion noch empfängt. Wie man sieht geht derselbe, wenn $\rho = 1$ gesetzt wird, in $\tfrac{1}{2}N$ über.

So ist nun zwar nach und nach alles Licht, welches das directe Sonnenlicht auf seinem Wege durch die Atmosphäre verloren hatte, in Rechnung gebracht; indessen ist die vom Himmel zur Erde gelangende Lichtmenge noch nicht ganz in Betracht gezogen, sondern sie erhält noch einen, wenn auch nicht bedeutenden Zuwachs durch dasjenige Licht, welches, von der Erde selbst ausgehend, durch die Atmosphäre zum Theil wieder zurückgeschickt wird.

Jeder Körper strahlt einen Theil des Lichts, welches er empfängt wieder aus, verbreitet es, wenn seine Oberfläche, wie hier angenommen wird, nicht spiegelt, nach allen Seiten, und wird dadurch nach allen Seiten *sichtbar*. Die Menge dieses wieder ausgestrahlten Lichts, im Vergleich zu der des auffallenden, ist bei verschiedenen Körpern sehr verschieden und hangt von der Farbe und der sonstigen Natur der Oberfläche ab. *Lambert* (Photom.) drückt diese Zurückstrahlung, als eine besondere Eigenschaft der Körper, mit dem Worte *Albedo* aus, und wir wollen den Buchstaben A zur Bezeichnung derselben beibehalten. Für einige Körper hat *Lambert* den Werth von A durch Versuche bestimmt. Z. B. für weifses Papier und Kremser Weifs hat er $A = \tfrac{2}{5}$ gefunden; doch sagt er (S. 438), dafs man für die Erd-Oberfläche, wenn sie nicht mit Schnee bedeckt sei, durchschnittlich kaum $A = \tfrac{1}{12}$ annehmen könne. Jedenfalls ist der Werth von A je nach der Beschaffenheit des Bodens sehr ungleich, und es können für besondere Fälle auch besondere Annahmen gemacht werden. Auf eine genaue Bestimmung des Werths von A kommt es

indessen nicht an, da die Lichtmengen, um welche es sich hier handelt, überhaupt wenig bedeutend sind.

Es fragt sich nun, was aus diesem von der Erde ausgestrahlten Lichte werde. Der gröfsere Theil davon geht unmittelbar in den Weltenraum verloren; aber ein anderer Theil wird, ehe er die obere Grenze der Atmosphäre erreichen kann, von der Luft aufgefangen; und dieser Theil ist zuerst zu suchen.

Man nehme dazu irgend eine Flächen-Einheit der Erd-Oberfläche an, welche bei a (Fig. 5.) liegen möge. Die ganze Lichtmenge, welche sie von der Sonne, theils direct, theils nach den Reflexionen in der Atmosphäre erhalten hat, sei $= L$, und es werde angenommen, dafs die Fläche selbst in Folge davon mit der Helle τ leuchte. Es sei nun um a eine sehr grofse Halbkugel cbd beschrieben: so ist die Lichtmenge, welche nach einem Flächen-Elemente derselben ds, bei b, dem Puncte a normal gegenüber, hingesendet wird, $= \tau ds$. Liegt aber das Element um den Bogen β von b entfernt, so kommt dort die Flächen-Einheit bei a nur noch mit dem Factor $\cos\beta$ vor; also ist die dort hingesendete Lichtmenge $= \tau ds \cos\beta$. Stellt man sich nun um b, als Pol, mit dem Bogenradius $br = \beta$ und der Breite $rt = d\beta$ eine Zone beschrieben vor, so ist deren Flächenraum $= 2\pi \sin\beta d\beta$, also die nach ihr hingesendete Lichtmenge

$$= 2\pi\tau \sin\beta \cos\beta d\beta.$$

Hieraus läfst sich zunächst die nach der ganzen Halbkugel hingesendete Lichtmenge finden und mittels des sich ergebenden Werthes die Gröfse τ durch A ausdrücken. Durch Integration von $\beta = 0$ bis $\beta = \frac{1}{2}\pi$ erhält man nämlich den Werth $\pi\tau$, während zufolge der obigen Bezeichnung die von der Flächen-Einheit im Ganzen ausgesendete Lichtmenge LA sein würde. Man kann also $\pi\tau = L.A$ setzen, wodurch dann der für die Zone rt gefundene Ausdruck in

$$= LA.2\sin\beta \cos\beta d\beta$$

übergeht. Dieses Licht mufs aber, ehe es an die obere Grenze der Atmosphäre gelangt, den Weg $aR = h\sec\beta$ durchlaufen, und es kommt also nur der Theil

$$LA.2\sin\beta \cos\beta d\beta . e^{-\delta.h\sec\beta}$$

oben an, welche Gröfse von $\beta = 0$ bis $\beta = \frac{1}{2}\pi$ zu integriren ist, um die ganze von der Flächen-Einheit nach oben gelangende Lichtmenge zu finden. Dieses giebt, wenn man zur Abkürzung

$$\delta.h\sec\beta = a\sec\beta = z$$

setzt, den Ausdruck

$$LA.2a^2\int_a^\infty \frac{e^{-z}}{z^3}dz$$

und durch einige leichte Verwandlungen für die gesuchte Lichtmenge:

$$LA.\left(e^{-a}-ae^{-a}+a^2\int_a^\infty \frac{e^{-z}}{z}dz\right) = LA.u,$$

wenn der Kürze wegen

$$(18.)\qquad u = e^{-a}-ae^{-a}+a^2\int_a^\infty \frac{e^{-z}}{z}dz$$

gesetzt wird. Dieser mit u bezeichnete Ausdruck ist eine ähnliche Constante, wie oben v. Wenn man ihn unter derselben Annahme in Bezug auf a berechnet, so ergiebt sich

$$(18.\ a.)\qquad u = 0{,}61178.$$

Der Verlust, den das von der Flächen-Einheit ausgehende Licht erleidet, ist also $= LA(1-u)$ und folglich die dadurch in die Atmosphäre zerstreute Lichtmenge

$$= LA.\varrho(1-u).$$

Es ist nun zu untersuchen, wieviel von diesem Lichte zur Erde zurückgelange; und da fragt es sich zunächst: wieviel wird durch die erste Reflexion *der Erde zugesendet,* und wieviel *nach oben?* Diese Bestimmung erfordert eigentlich, da das Licht nach der ersten Reflexion noch nicht als vollkommen gleichförmig zerstreut angesehen werden darf, eine mit Berücksichtigung der Function $F(\varphi)$ anzustellende Rechnung. Erwägt man indessen, wie ungenau der Factor A schon ist, so sieht man leicht, dafs die Berechnung nur eine unnütze Mühe sein würde und dafs statt ihrer eine *Schätzung* vollkommen ausreicht. Aus der Betrachtung der Function $F(\varphi)$ ist klar, dafs nach *oben* mehr von diesem Lichte gelangen wird, als nach *unten;* und eine Vergleichung der dabei in Betracht kommenden Zahlen ergiebt, dafs man beide Mengen ziemlich richtig erhalten wird, wenn man von der ganzen zerstreuten Lichtmenge von vorne herein *ein Fünftel* für die Erde verloren giebt, die übrigen *vier Fünftel* aber dafür als gleichförmig zerstreut betrachtet. Wir haben es also nur mit der Lichtmenge

$$(19.)\qquad LA.\tfrac{4}{5}\varrho(1-u)$$

zu thun; und mit dieser läfst sich genau so verfahren, wie oben mit der Menge $\varrho^2 N;$ wodurch man dann gemäfs der Formel (17.), mit Beibehaltung

derselben Bezeichnung, für die zur Erde gelangende Lichtmenge

$$LA.\tfrac{1}{2}.\tfrac{4}{3}\varrho(1-u)\frac{v}{1-\varrho(1-v)} = LA.\omega$$

erhält, wenn man der Kürze wegen

$$(20.)\qquad \omega = \tfrac{2}{3}\varrho(1-u)\frac{v}{1-\varrho(1-v)} \text{ setzt.}$$

Diese Lichtmenge trägt nun aber von Neuem etwas zu mehrerer Erhellung des Bodens bei, worauf dieser auch von ihr wieder einen Theil ausstrahlt und durch Reflexion desselben in der Atmosphäre von Neuem eine geringe Lichtmenge empfängt. Da abermals von dieser wieder Dasselbe gilt, so findet sich eine unendliche Reihe von Werthen, deren jeder aus dem vorhergehenden eben so hervorgeht, wie $LA.\omega$ aus L. Fafst man daher alle diese Werthe zusammen, so ergiebt sich endlich für die gesammte Lichtmenge, welche die Erde ihrer eigenen Ausstrahlung verdankt:

$$LA\omega + L(A\omega)^2 + L(A\omega)^3 + \ldots .$$

$$(21.)\qquad = L.\frac{A\omega}{1-A\omega}.$$

Jetzt sind alle Theile, in welche man sich die überhaupt zur Erde gelangende Lichtmenge zerlegt vorstellte, der Reihe nach betrachtet worden, und wir wollen nun die gefundenen Schlufsformeln zur Übersicht noch einmal kurz zusammenstellen, ohne jedoch hier auf die Bedeutung der darin vorkommenden Buchstaben specieller einzugehen.

Die Lichtmenge, welche die Erde empfangen würde, wenn die Sonne im Zenith stände und die Erde keine Atmosphäre hätte, wird zur Einheit angenommen.

Für andere Stellungen der Sonne würden wir von ihr, ohne Atmosphäre, die Lichtmenge

$$\cos\gamma = \frac{1}{c}$$

empfangen.

Die wirklich ankommenden Lichtmengen dagegen sind:

An directem Sonnenlicht $\frac{e^{-ac}}{c}$.

Das einmal reflectirte Sonnenlicht ist aus $p\varrho M$ (14.) zu bestimmen, mit Berücksichtigung des Verlustes, welchen es noch erleidet.

Das mehrfach reflectirte Sonnenlicht ist $= \varrho^2 N\frac{v}{1-\varrho(1-v)}$ (17.).

Das Licht, welches, von der Erde selbst ausgehend, ihr wieder zurückgeschickt wird, ist $= L \cdot \frac{A\omega}{1-A\omega}$ (21.).

Um von diesen Resultaten eine Anschauung zu geben, habe ich nach den vorstehenden Formeln für mehrere Stellungen der Sonne eine numerische Rechnung ausgeführt. Die speciellen Annahmen dabei sind meistens schon im Verlaufe des Obigen angegeben; sie mögen jedoch zur Übersicht ebenfalls hier noch einmal zusammengestellt werden.

1. $F(\varphi)$ ist gemäfs der Hypothese über das Dampfbläschen bestimmt worden.

2. Es ist keine Absorption berücksichtigt, also $\varrho = 1$ gesetzt worden.

3. Es ist $a = 0{,}2876819\ldots.$ (wie in (27.) des frühern Aufsatzes).

4. Es ist $A = \frac{1}{12}$.

Die gefundenen Zahlenwerthe zeigt die folgende Tafel, in welcher sich die Bedeutung der einzelnen Zahlen aus den Überschriften der Spalten ergiebt.

(III.)

Zenith-Abstand der Sonne.	Menge des directen Sonnenlichts, wenn es nicht durch die Atmosphäre geschwächt würde.	Menge des directen Sonnenlichts nach der Schwächung durch die Atmosphäre.	Menge des Einmal reflectirten Sonnenlichts.	Menge des Mehrfach reflectirten Sonnenlichts.	Menge des von der Erde ausgehenden und wieder zurückgeschickten Lichts.	Ganze Lichtmenge, welche die Erde vom Himmel empfängt.	Ganze Lichtmenge, welche die Erde überhaupt empfängt.
0	1	0,75	0,14013	0,03375	0,01211	0,18599	0,93599
10	0,98481	0,73533	0,13932	0,03376	0,01190	0,18498	0,92031
20°	0,93969	0,69188	0,13691	0,03376	0,01132	0,18199	0,87387
30°	0,86603	0,62124	0,13249	0,03377	0,01033	0,17659	0,79783
40°	0,76604	0,52620	0,12547	0,03376	0,00899	0,16822	0,69442
50°	0,64279	0,41087	0,11496	0,03369	0,00734	0,15599	0,56686
60°	0,5	0,28125	0,09943	0,03347	0,00542	0,13832	0,41957
65°	0,42262	0,21395	0,08893	0,03321	0,00440	0,12654	0,34049
70°	0,34202	0,14749	0,07581	0,03267	0,00336	0,11184	0,25933
75°	0,25882	0,08517	0,05909	0,03151	0,00231	0,09291	0,17808
80°	0,17365	0,03313	0,03739	0,02867	0,00130	0,06736	0,10049

Wir wenden uns jetzt zu der zweiten Aufgabe: ***die Helle des Himmels in seinen verschiedenen Puncten zu finden.***

Dazu ist es nöthig, erst Einiges über die Principien zu sagen, nach welchen diese Helle zu bestimmen sein werde.

Im Allgemeinen ist es klar, dafs die Helle, mit welcher irgend eine Fläche sich uns zeigt, proportional ist der Lichtmenge, welche die Fläche in die Pupille des Auges sendet, dividirt durch die scheinbare Gröfse der Fläche; wobei die Gröfse der Augenpupille als unveränderlich angenommen wird. Daraus folgt sogleich der Satz, dafs die Entfernung der Fläche keinen Einflufs auf die Helle hat, mit der sie uns erscheint. Aus gröfserer Entfernung nämlich sendet zwar ein bestimmtes Stück der Fläche weniger Licht in die Pupille des Auges, aber in demselben Verhältnisse wird auch die scheinbare Gröfse des Flächenstücks geringer. Um nun ein *Maafs* zu haben, wollen wir die Helle der Sonne, mit der sie einem Beobachter aufserhalb der Atmosphäre erscheinen würde, zur Einheit annehmen. Dann fragt sich also für jede andere beobachtete Fläche: wieviel Licht sendet ein Stück derselben, von der scheinbaren Gröfse der Sonne, in die Pupille, im Vergleiche zu der Lichtmenge, welche die Pupille von der Sonne selbst empfängt?

Indem wir zur Betrachtung der Luft übergehen, stellen wir uns zuerst der Einfachheit wegen nur eine ebene, unendlich dünne Luftschicht von der Dicke dy vor, welche erleuchtet wird, und daher selbst wieder Licht aussendet. Bei der Vergleichung der Helle dieser Schicht mit der der Sonne findet sich aber eine eigenthümliche Schwierigkeit. Die Lichtmenge nämlich, welche die Sonne in die Pupille des Auges sendet, läfst sich allerdings sehr einfach bestimmen. Denn da die Lichtmenge, welche die Sonne auf eine ihren Strahlen senkrecht entgegengehaltene Flächen-Einheit wirft, zur Einheit angenommen wird, so braucht man nur die Gröfse der Pupille zu kennen, welche $= f$ sein mag; dann wird die auf die Pupille fallende Lichtmenge ebenfalls durch f ausgedrückt. Anders ist es dagegen mit einem Stücke der Luftschicht. Die Lichtmenge nämlich, welche ein solches Stück überhaupt aussendet, läfst sich zwar den früheren Betrachtungen gemäfs leicht bestimmen; dieses Licht wird aber nach allen Seiten zerstreut, und es fragt sich, wieviel davon auf die Augenpupille eines Beobachters falle. Die Lichtmenge λ, welche eine Flächen-Einheit der Schicht versendet, setzen wir also als bekannt voraus und wollen zunächst annehmen, dafs sie nach allen Richtungen gleichförmig zerstreut werde. Nun stellen wir uns aus dieser Schicht, deren senkrechte Entfernung vom Auge $= R$ sein mag, ein Stück herausgeschnitten vor, welches dem Auge normal gegenüber liegt und dessen scheinbare Gröfse gleich

der der Sonnenscheibe ist. Der Radius der letztern wird wie oben durch σ bezeichnet; dann mufs die Gröfse jenes Stücks $= R^2 \tang^2 \sigma . \pi$ sein, oder, da man wegen der Kleinheit von σ den Bogen statt der Tangente annehmen kann, $= R^2 \sigma^2 . \pi$. Daraus folgt für die von dem Stücke ausgesendete Lichtmenge:

$$\lambda . R^2 \sigma^2 \pi.$$

Dieses Licht breitet sich nach allen Richtungen aus. Stellt man sich demnach um jenes Stück mit dem Radius R eine Kugelfläche beschrieben vor, so empfängt dieselbe die ganze Lichtmenge; und zwar in allen ihren Puncten gleich viel davon. Der Theil also, welcher auf einen Flächenraum von der Gröfse der Pupille des Auges fällt, verhält sich zur ganzen Lichtmenge, wie die Gröfse f der Pupille zur ganzen Kugelfläche $4 R^2 \pi$, so dafs derselbe

$$= \frac{f}{4 R^2 \pi} . \lambda . R^2 \sigma^2 \pi = f . \tfrac{1}{4} \sigma^2 \lambda$$

ist. Bei der Sonne wurde statt dessen der Werth f gefunden: also ist die Helle der Luftschicht im Vergleich zu der der Sonne

$$(22.) \qquad = \tfrac{1}{4} \sigma^2 \lambda.$$

Diese Formel bedarf indessen noch einiger Erweiterungen. Erstlich ist sie für den besondern Fall der *senkrechten* Betrachtung entwickelt. Die Luftschicht erscheint aber nicht in allen Richtungen gleich hell. Stellt man sich nämlich vor, ein Stück der Schicht werde dem Auge in einer gewissen Entfernung zuerst normal entgegengehalten, und dann in eine schiefe Richtung gewendet, so wird nun doch noch eben so viel Licht in die Pupille des Auges fallen, als vorher, weil jedes Lufttheilchen sein Licht nach allen Richtungen gleichförmig zerstreut. Die scheinbare Gröfse des Stücks ist aber geringer geworden; und zwar im Verhältnifs des Cosinus desjenigen Winkels, welchen die Richtung nach unserem Auge mit der Normale einschliefst: die Helle, mit der die Schicht uns erscheint, hat also im Verhältnifs der Secante jenes Winkels zugenommen. Nennt man daher diesen Winkel β, so mufs man den Ausdruck (22.) noch mit $\sec \beta$ multipliciren. Ferner wurde eine gleichförmige Zerstreuung der Lichtmenge λ angenommen. Wird dieselbe dagegen gemäfs der Function $F(\varphi)$ zerstreut, so mufs der Ausdruck noch mit dieser Function multiplicirt werden. Die vollständigen Formeln für die Helle der Luftschicht sind daher, je nach den beiden verschiedenen Annahmen über die Zerstreuung des Lichts:

$$(23.) \qquad \tfrac{1}{4} \sigma^2 \sec \beta . \lambda,$$

$$(23. a.) \qquad \tfrac{1}{4} \sigma^2 F(\varphi) \sec \beta . \lambda.$$

Nachdem dies festgestellt ist, haben die weitern Untersuchungen keine Schwierigkeit. Es soll die Helle des Himmels in der Richtung *OH* (Fig. 6.), welche mit dem Loth den Winkel β einschliefst, gesucht werden. Dazu sind zwei einzelne Rechnungen nöthig. Zuerst ist die Helle zu suchen, insofern sie nur von dem *einmal* reflectirten Lichte herstammt; und dann kann man alles andere Licht unter der Kategorie von gleichförmig zerstreutem Lichte zusammenfassen und wiederum die Helle suchen. Die Summe beider giebt den Gesammtwerth.

Indem wir uns also zunächst an das *einmal* reflectirte Licht halten, stellen wir uns die Atmosphäre in unendlich viele horizontale Schichten von der Dicke dy getheilt vor und fragen nach der Helle, mit welcher uns eine derselben in der Höhe $AP = y$ erscheint, wenn wir sie von *O* aus in der Richtung *OP* betrachten. Dazu müssen wir uns der Formel (23. *a.*) bedienen. Die darin vorkommende Gröfse λ ist schon in dem früheren Aufsatze (3. *a.*) bestimmt; sie ist

$$\lambda = dy.\delta.e^{-\delta.(h-y)\sec\gamma},$$

wo γ den Zenith-Abstand der Sonne bedeutet. Aufserdem ist aber noch zu berücksichtigen, dafs das Licht, ehe es von *P* nach *O* gelangt, im Verhältnisse von 1 zu $e^{-\delta.y\sec\beta}$ geschwächt wird. Es ergiebt sich also für die einzelne Elementarschicht der Ausdruck

$$\tfrac{1}{4}\sigma^2 F(\varphi)\sec\beta\, dy\,\delta.e^{-\delta.(h-y)\sec\gamma}.e^{-\delta.y\sec\beta}.$$

Da nun die Helle, mit der der ganze Himmel in der Richtung *OPH* sich zeigt, die Summe der Helligkeiten aller einzelnen Schichten ist, so braucht man nur den eben gefundenen Ausdruck von $y = 0$ bis $y = h$ zu integriren, und erhält dadurch die Helle des Himmels für das *einmal* reflectirte Licht: nämlich

$$(24.) \quad = \tfrac{1}{4}\sigma^2 F(\varphi)\sec\beta.\frac{e^{-\delta.h\sec\beta} - e^{-\delta.h\sec\gamma}}{\sec\gamma - \sec\beta}.$$

In dem besondern Falle $\beta = \gamma$ nimmt dieser Ausdruck die Form $\frac{0}{0}$ an. Es läfst sich dann durch Differentiation von Zähler und Nenner sein Werth finden. Setzt man nämlich $\delta.h\sec\gamma = z$, differentiirt nach z und setzt darauf $z = \delta.h\sec\beta$, so erhält man

$$(24.\,a.) \quad \tfrac{1}{4}\sigma^2 F(\varphi)\delta.h\sec\beta\, e^{-\delta.h\sec\beta}.$$

Auf entsprechende Weise mufs nun auch diejenige Helle des Himmels, welche von dem gleichförmig zerstreuten Lichte herstammt, berechnet werden. Dieses gleichförmig zerstreute Licht umfafst zwei früher gesondert betrachtete

Mengen: das mehrfach reflectirte Sonnenlicht, und das Licht, welches durch Reflexion des von der Erde kommenden Lichtes in die Atmosphäre zerstreut ist. Die Gröfse der ersten Menge, die kurz durch $\varrho^2 N$ bezeichnet wurde, ist durch die Gleichung (12.) näher gegeben. Die der letzten ergiebt sich aus der Formel (19.). Dabei kann man die einzelne Betrachtung der Seite (209) erwähnten wiederholten Ausstrahlungen ersparen, wenn man in (19.) sogleich statt L die ganze Lichtmenge setzt, welche die Erd-Oberfläche überhaupt empfängt, also $L+L\cdot\frac{A\omega}{1-A\omega}=L\cdot\frac{1}{1-A\omega}$. Dies giebt für die gesuchte zweite Menge:

$$(25.)\qquad LA.\tfrac{1}{8}\varrho(1-u)\frac{1}{1-A\omega}.$$

Die Summe dieser beiden Mengen möge der Kürze wegen durch S bezeichnet werden. Dann ist

$$(26.)\qquad S=\varrho^2 N+LA.\tfrac{1}{8}\varrho(1-u)\frac{1}{1-A\omega}.$$

Von diesem ganzen Werthe kommt nun auf jede Elementarschicht von der Dicke dy der Theil $\frac{\partial y}{h}.S$, und um zu finden, wie hell die durch P (Fig. 6.) gehende Schicht vermöge dieses Lichts in der Richtung OP wird, mufs man sich der Formel (23.) bedienen, indem man $\frac{dy}{h}\cdot S$ statt λ setzt und auch hier den Verlust des Lichts auf dem Wege von P nach O dadurch in Abzug bringt, dafs man die Formel mit $e^{-\delta.y\sec\beta}$ multiplicirt. Dies giebt $\frac{1}{4}\sigma^2\sec\beta\frac{dy}{h}S.e^{-\delta.y\sec\beta}$, und daraus ergiebt sich durch Integration von $y=0$ bis $y=h$, für den ganzen Himmel, in der Richtung OH, der Ausdruck

$$(27.)\qquad \tfrac{1}{4}\sigma^2 S\cdot\frac{1-e^{-a\sec\beta}}{a}.$$

Damit, dafs man bei der Bildung dieser Formel den Verlust an Licht auf dem Wege von P nach O schlechtweg in Abzug brachte, ist noch nicht gesagt, dafs dieses Licht überhaupt nicht mehr zu berücksichtigen sei; denn es kann allerdings nach der Reflexion noch in das Auge gelangen und also zur Erhellung des Himmels beitragen. Die obige Formel (27.) drückt vielmehr nur die *unmittelbare* Wirkung der Lichtmenge S aus; die Wirkung derjenigen Menge S' dagegen, welche durch Reflexion von Neuem in die Atmosphäre zerstreut wird, mufs noch besonders betrachtet werden. Diese Lichtmenge steht aber genau unter denselben Gesetzen, wie S; denn sie ist

ebenfalls gleichförmig zerstreut. Ihre Berücksichtigung würde folglich auf einen Ausdruck von derselben Form wie (27.) führen, und es würde wiederum eine Lichtmenge S'' durch nochmalige Reflexion zerstreut bleiben, mit der man wieder eben so verfahren müfste u. s. w. Man braucht also nur die Mengen S', S'', etc. ihrer Gröfse nach zu suchen, und kann dann die Formel (27.) auf sie alle anwenden. Die Gröfsen sind aber schon berechnet; denn sie ergeben sich unmittelbar aus den Gleichungen (16.), wenn man darin S statt $\varrho^2 N$ setzt; sie sind

$$S' = S\varrho(1-v), \qquad S'' = S\varrho^2(1-v)^2 \text{ etc.}$$

Hierauf läfst sich also die Formel (27.) anwenden und sogleich die Summe der Helligkeiten finden, welche aus dieser Reihe von Werthen entsteht. Sie ist

$$\tfrac{1}{4}\sigma^2 \cdot \frac{1-e^{-a\sec\beta}}{a}(S+S'+S''+\ldots.)$$

$$= \tfrac{1}{4}\sigma^2 \cdot \frac{1-e^{-a\sec\beta}}{a} S(1+\varrho(1-v)+\varrho^2(1-v)^2+\ldots.),$$

$$(28.) \qquad = \tfrac{1}{4}\sigma^2 \cdot \frac{1-e^{-a\sec\beta}}{a} S \cdot \frac{1}{1-\varrho(1-v)};$$

welche Formel die ganze Helle ausdrückt, die durch gleichförmig zerstreutes Licht hervorgebracht wird.

So sind also die beiden, durch verschiedene Lichtmengen hervorgebrachten Helligkeiten einzeln gefunden worden (24. und 28.), und es ist klar, dafs man das Endresultat, die ganze Helle, mit der uns der Himmel in der Richtung *OH* überhaupt leuchtet, erhält, wenn man jene beiden Formeln addirt. Es ist hier jedoch noch eines Umstandes zu erwähnen, durch welchen gerade die *getrennte* Bestimmung der beiden Helligkeiten ein besonderes Interesse gewinnt. Es ist nämlich das vom Himmel zu uns kommende Licht *polarisirt:* ein Umstand, der zunächst schon den Beweis giebt, dafs wir es hier wirklich mit reflectirtem Lichte zu thun haben, und der auch zu weitern interessanten Aufschlüssen über die Natur der reflectirenden Bestandtheile führen kann. Die Polarisations-Ebene dieses Lichts hat zwar gröfstentheils diejenige Lage, welche man nach den gewöhnlichen Reflexionsgesetzen erwarten mufs; indessen giebt es dabei Ausnahmefälle. Es giebt Puncte am Himmel, wo man noch eine Polarisation erwarten sollte, und doch keine Spur davon wahrnimmt; und andere, wo die Polarisations-Ebene eine aufsergewöhnliche Lage hat

Die Erklärung dieser Erscheinungen im Allgemeinen ist nicht schwer, und es ist wohl ohne Zweifel die, welche Herr *Babinet* (Compt. rend. XXIII. pag. 233) ausgesprochen hat, als richtig anzunehmen. Die Lufttheilchen empfangen nämlich nicht blofs direct von der Sonne Licht, sondern auch von der übrigen Atmosphäre; und beides reflectiren sie. Diejenige Polarisation, welche durch die Reflexion des directen Sonnenlichtes entsteht, ist es, welche vorhin als den gewöhnlichen Reflexionsgesetzen entsprechend bezeichnet wurde. Diese wird aber offenbar durch das beigemischte andere Licht geschwächt, und im Fall sich in dem letzteren eine bestimmte eigene Polarisation stark geltend macht, kann dadurch die regelmäfsige Polarisation ganz aufgehoben werden, ja sogar jene andere überwiegend werden. Um jedoch über diese Polarisations-Erscheinungen genauere Untersuchungen anzustellen, ist es nöthig, für jeden bestimmten Punct des Himmels das Verhältnifs der Stärke des nur einmal reflectirten Lichts zu der des übrigen zu kennen; und diese Lichtstärken werden durch die Formeln (24. und 28.) einzeln bestimmt.

Ich habe, um eine Anschauung von den durch die Formeln (24. und 28.) ausgedrückten Gesetzen zu geben, die numerische Berechnung für einige specielle Fälle ausgeführt. Erwägt man aber, wie viele Puncte einzeln untersucht werden müfsten, um ein deutliches Bild von dem ganzen Himmel zu erlangen, und dafs dieses Bild aufserdem für jeden Stand der Sonne ein anderes sein würde, so sieht man leicht, dafs eine solche Vollständigkeit hier zu weit geführt haben würde und es nur darauf ankommen konnte, einige Combinationen beispielsweise herauszuheben. Doch werden die angeführten Fälle genügen, um wenigstens zu zeigen, in welchem Verhältnisse die Gröfsen, um die es sich handelt, zu einander stehen.

Es sind sechs verschiedene Stellungen der Sonne gewählt worden, und für jede derselben ist folgende Reihe von Werthen berechnet:

Erstlich die Helle der Sonne selbst, wie sie bei dieser Stellung nach der Schwächung durch die Atmosphäre erscheint.

Zweitens die Helle des Himmels in unmittelbarer Nähe der Sonne.

Drittens die Helle des Himmels im Zenith.

Viertens und *Fünftens* die Helle des Himmels in einem Horizontalkreise von 60^0 Zenith-Abstand, und im Horizonte selbst.

In jedem der beiden zuletzt genannten Kreise sind vier Puncte gewählt, welche ihn in vier Quadranten theilen; nämlich der der Sonne zunächst liegende Punct, der gegenüberliegende und die beiden in der Mitte

dazwischen befindlichen. Die beiden erstern sind mit den Überschriften „Horizontal-Abstand = 0 und = 180°" bezeichnet. Die beiden letztern, welche gleiche Helle haben, sind in eine und dieselbe Rubrik mit der Überschrift „Horizontal-Abstand = 90°" zusammengefafst. Neben jeder Zahl, welche die Helle des Himmels ausdrückt, stehen links noch zwei andere, mit kleinern Ziffern gedruckte. Von diesen bedeutet die obere die nur von dem einmal reflectirten Lichte, und die untere die von allem übrigen Lichte herstammende Helle. Es sind also die Werthe der Formeln (24. und 28.).

Die Hypothesen, auf welchen die Berechnung dieser Tafel beruht, sind dieselben, wie die, welche der vorigen Tafel voraufgeschickt wurden. Als Einheit der Helle ist bei diesen Zahlen nicht die ganze Helle der Sonne aufserhalb der Atmosphäre, sondern ein Milliontheil derselben angenommen, weil sonst zu unbequeme Brüche entstanden wären.

(IV.)

Helle der Sonne aufserhalb der Atmosphäre = 1 000 000.

Zenith-Abstand der Sonne.	Helle der Sonne.	Helle des Himmels.							
		In unmittelbarer Nähe der Sonne.	Im Zenith.	In einem Horizontalkreise, 60° vom Zenith.			Im Horizonte.		
				Horizontal-Abstand = 0	Horizontal-Abst. = 90°	Horizontal-Abst. = 180°	Horizontal-Abstand = 0	Horizontal-Abst. = 90°	Horizontal-Abst. = 180°
0	750 000	6,185 / 0,640 6,825	6,185 / 0,640 6,825		2,355 / 1,120 3,475			2,492 / 2,559 5,051	
20°	736 300	6,462 / 0,663 7,125	3,907 / 0,629 4,536	4,143 / 1,100 5,243	2,223 / 1,100 3,323	1,460 / 1,100 2,560	3,593 / 2,515 6,108	2,446 / 2,515 4,961	1,983 / 2,515 4,498
40°	686 900	7,395 / 0,747 8,142	2,304 / 0,596 2,900	6,548 / 1,044 7,592	1,828 / 1,044 2,872	1,049 / 1,044 2,093	5,748 / 2,385 8,133	2,282 / 2,385 4,667	1,699 / 2,385 4,084
60°	562 500	9,278 / 0,949 10,227	1,177 / 0,542 1,719	9,278 / 0,949 10,227	1,329 / 0,949 2,278	0,824 / 0,949 1,773	8,197 / 2,170 10,367	1,869 / 2,170 4,039	1,385 / 2,170 3,555
70°	431 200	10,398 / 1,143 11,541	0,809 / 0,503 1,312	6,336 / 0,880 7,216	1,045 / 0,880 1,925	0,703 / 0,880 1,583	7,882 / 2,010 9,892	1,433 / 2,010 3,443	1,099 / 2,010 3,109
80°	190 800	9,060 / 1,353 10,413	0,462 / 0,418 0,880	3,615 / 0,732 4,347	0,657 / 0,732 1,389	0,484 / 0,732 1,216	4,253 / 1,672 5,925	0,634 / 1,672 2,306	0,548 / 1,672 2,220

Zum Schlusse ist noch auf eine Schwierigkeit aufmerksam zu machen, die bei allen vorstehenden Entwickelungen unberücksichtigt blieb und die von bedeutendem Einflusse sein kann. Es ist nämlich für die Abnahme einer Lichtmenge in einem unvollkommen durchsichtigen Mittel der Ausdruck $e^{-\delta x}$ angenommen worden. Dieser Ausdruck ist aber nur richtig, wenn entweder das Licht homogen, oder die von dem Mittel ausgeübte Schwächung für alle in dem Lichte enthaltenen *Farben* gleich stark ist. Kommen dagegen mehrere *Farben* vor, welche in ungleichem Verhältnisse geschwächt werden, so

gilt zwar für jede derselben ein Ausdruck von der Form $e^{-\delta x}$, aber die Constanten δ sind *verschieden*, und man würde daher für die ganze Lichtmenge einen Ausdruck von der Form

$$\lambda_1 e^{-\delta_1 x} + \lambda_2 e^{-\delta_2 x} + \lambda_3 e^{-\delta_3 x} + \ldots\ldots$$

aufstellen müssen, wo λ_1, λ_2, λ_3, etc. die in ihr ursprünglich enthaltenen Antheile von den verschiedenen *Farben* bedeuten. Für *weifses* Sonnenlicht würde jedoch auch ein solcher Ausdruck unmöglich werden, weil dasselbe eine unendliche Mannichfaltigkeit von Farben enthält und der Ausdruck also unendlich viele Glieder haben müfste.

Betrachtet man nach dieser Bemerkung die bisherigen Entwickelungen, so ist klar, dafs sie, da sie auf dem *einfachen* Ausdrucke beruhen, nur für *homogenes* Licht genau sind. Bestände das in die Atmosphäre eindringende Licht aus einer bestimmten Zahl von *Farben*, so könnte man ebenfalls noch *genau* rechnen, wenn man auf die verschiedenen Theile die gefundenen Formeln einzeln anwendete; jedoch mit verschiedenen Werthen der Constanten δ, oder der Constanten α. Die so berechneten Resultate brauchte man dann nur zu addiren, um das Gesammtresultat zu finden. Hat man es aber, wie beim Sonnenlichte, mit unendlich vielen Farbennüancen zu thun, so mufs man sich nach einem Näherungsverfahren umsehen; und da würde wohl das einfachste Auskunftsmittel das sein: aus der unendlichen Reihe eine bestimmte Zahl einzelner Farben auszuwählen, welche die ganze Reihe so genau, als man es für nöthig hält, vertreten, und mit diesen auf die angegebene Weise zu verfahren.

Berlin im Juni 1847.

13.

Verallgemeinerung des Pascalschen Theorems, das in einen Kegelschnitt beschriebene Sechseck betreffend.

(Von Herrn Prof. *Möbius* in Leipzig.)

(Aus den Berichten über die Verhandlungen der Königlich-Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig.)

Eine projective Eigenschaft einer ebenen Figur ist bekanntlich eine solche, welche auch jeder andern Figur zukommt, die eine Projection der ersten Figur auf eine andere Ebene durch Linien aus einem Puncte ist. Hat man daher eine solche Eigenschaft für eine gewisse Projection als richtig bewiesen, so ist sie zugleich auch für jede andere Projection, und folglich allgemein dargethan. Am vortheilhaftesten aber wird es sein, für jene gewisse Projection diejenige zu wählen, bei welcher möglichst viele der von einer Projection zur andern veränderlichen Verhältnisse der Figur möglichst einfache Werthe erhalten, indem somit der Beweis der projectiven Eigenschaft durch Zuhülfenahme anderer, aus diesen einfachen Verhältnissen fliefsender, nicht projectiver Eigenschaften der Figur am meisten erleichtert werden wird.

Ein Beispiel hierzu giebt die höchst merkwürdige, von *Pascal* entdeckte projective Eigenschaft der Kegelschnitte: dafs die drei Durchschnitte der einander gegenüberliegenden Seiten eines in eine solche Curve beschriebenen Sechsecks in einer Geraden liegen. Da jeder Kegelschnitt auf eine andere Ebene als Kreis projicirt werden kann, so wird *Pascal's* Satz für alle Kegelschnitte bewiesen sein, wenn er nur für den Kreis dargethan ist. Aber noch mehr: zu einem Kegelschnitte und einer in seiner Ebene gezogenen, ihn selbst nicht treffenden Geraden l können eine Projections-Ebene und ein Projectionscentrum immer so bestimmt werden, dafs die Projection des Kegelschnitts ein Kreis wird und die Projection jedes Puncts der Geraden l in die Unendlichkeit fällt, d. h. dafs von je zwei Geraden in der Ebene des Kegelschnitts, welche sich in l schneiden, die Projectionen einander parallel sind. Man wird mithin nur zu zeigen haben, dafs, wenn bei einem in einen Kreis beschriebenen Sechsecke zwei auf einander folgende

Seiten beziehungsweise den ihnen gegenüberliegenden parallel sind, auch die zwei noch übrigen, einander gegenüberliegenden Seiten einander parallel laufen; und es würde somit das Theorem *Pascal's* wenigstens für den Fall dargethan sein, wenn die durch zwei der drei Durchschnittspuncte zu führende Gerade l den Kegelschnitt nicht trifft. Dafs es aber auch dann gilt, wenn l den Kegelschnitt berührt, oder schneidet, kann, wenn auch nicht auf diesem einfachen Wege der Projection, doch durch Hinzufügung einer einfachen analytischen Betrachtung gezeigt werden.

Das Vorstehende ist etwa der Gang, in welchem Herr *Gergonne* im 4. Bande seiner Annalen der Mathematik, Seite 78 u. folg., das merkwürdige Theorem bewiesen hat. Den Nerv dieses Beweises macht, wie man sieht, die eben bemerkte und noch darzuthuende Eigenschaft eines Sechsecks im Kreise aus. Es gründet sich dieselbe auf den elementaren Satz, dafs zwischen parallelen Sehnen liegende Kreisbogen einander gleich sind; und umgekehrt: dafs die Endpuncte zweier einander gleichen Kreisbogen sich durch parallele Sehnen verbinden lassen; oder, um mich bestimmter auszudrücken und die Eigenschaft ganz allgemein für jede Gestalt, welche das Sechseck im Kreise haben kann, darthun zu können:

Sind zwei Sehnen AB und $A'B'$ eines Kreises einander parallel (gleichviel ob die Richtungen AB und $A'B'$ einerlei oder einander entgegengesetzt sind), so sind die Bogen AA' und $B'B$ des Kreises, wenn sie nach einerlei Sinne gerechnet werden, einander gleich; und umgekehrt: sind zwei nach einerlei Sinnne gerechnete Bogen AA' und $B'B$ eines Kreises einander gleich, so sind die Sehnen AB und AB' einander parallel.

Zieht man demnach in einem Kreise, von zwei beliebigen Puncten A und A' desselben aus, irgend zwei einander parallele Sehnen AB und $A'B'$, und von B und B' aus, irgend zwei andere einander parallele Sehnen BC und $B'C'$, so sind die nach einerlei Sinne gerechneten Bogen AA' und $B'B$ einander gleich, und eben so die Bogen $B'B$ und CC', folglich auch die Bogen CC' und AA'; folglich sind die Sehnen CA' und $C'A$ einander parallel; oder, wie man statt dessen auch sagen kann: Ist bei einem in einen Kreis beschriebenen Sechsecke $ABCA'B'C'$ die erste Seite AB mit der vierten $A'B'$ und die zweite BC mit der fünften $B'C'$ parallel, so ist es auch die dritte CA' mit der sechsten $C'A$.

Der Beweis, welchen Herr *Gergonne* von diesem Satze giebt, ist

von dem hier mitgetheilten allerdings nicht wesentlich, sondern nur hinsichtlich der äufsern Fassung verschieden. Allein aufserdem, dafs die hier gebrauchte Fassung einen neuen Beleg des Nutzens giebt, welchen eine stete Berücksichtigung der Aufeinanderfolge der Buchstaben bei den Bezeichnungen geometrischer Objecte gewährt, wird man auch bei dieser Fassung gleichsam von selbst zur Verallgemeinerung des *Pascal*schen Satzes hingeleitet.

In der That: zieht man, von C und C' aus, noch zwei einander parallele Sehnen CD und $C'D'$ nach beliebiger Richtung, so hat man die einander gleichen Bogen

$$AA' = B'B = CC' = D'D.$$

Mithin müssen auch die Sehnen AD und $D'A'$ einander parallel sein. Alle die jetzt gezogenen Sehnen bilden aber zwei Vierecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$, und wir schliefsen somit: Wenn von zwei in einen Kreis beschriebenen Vierecken $A..D$ und $A'..D'$ drei Seiten AB, BC, CD des einen den gleichnamigen $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$ des andern parallel sind, so sind auch die zwei noch übrigen Seiten DA und $D'A'$ einander parallel.

Läfst man auf CD und $C'D'$ noch ein neues Paar paralleler Sehnen DE und $D'E'$ folgen, so sind die Bogen

$$AA' = \ldots. = D'D = EE';$$

folglich sind die Sehnen EA' und $E'A$ einander parallel. Dies giebt ein in den Kreis beschriebenes Zehneck $ABCDEA'B'C'D'E'$, in welchem AB und $A'B'$, BC und $B'C'$ u. s. w., d. h. je zwei einander gegenüberliegende Seiten, einander parallel sind, und wobei der Parallelismus des fünften Paares aus dem der vier vorhergehenden folgt.

Man setze an E und E' ein fünftes Paar paralleler Sehnen EF und $E'F'$, so sind jetzt die Bogen.

$$AA = \ldots. = EE' = F'F$$

und mithin die Sehnen FA und $F'A'$ einander parallel. Man bekommt somit zwei in den Kreis beschriebene Sechsecke $ABCDEF$ und $A'\ldots.F'$, deren gleichnamige Seiten einander parallel sind, und wobei wiederum der Parallelismus des letzten Paares aus dem der vorhergehenden zu schliefsen ist.

Schon diese wenigen Fälle werden hinreichen, um einzusehen, dafs alle auf solche Weise durch fortgesetztes Anlegen paralleler Sehnen entstehenden Figuren von doppelter Art sind, je nachdem die Anzahl der Paare paralleler Seiten ungerade oder gerade ist. Bei einer ungeraden Anzahl von Paaren, $= 2m+1$, bilden alle $4m+2$ Seiten ein einziges Vieleck. Ist die

Anzahl der Paare gerade, $= 2m$, so erhält man zwei gesonderte Vielecke, jedes von $2m$ Seiten. Jede dieser Figuren aber hat die Eigenschaft, dafs der Parallelismus eines jeden Seitenpaares eine Folge aus dem Parallelismus aller jedesmal übrigen Paare ist.

Es bleibt jetzt noch übrig, diese beim Kreise Statt findende Eigenschaft nach den Gesetzen der Projection auf Kegelschnitte überhaupt auszudehnen. Durch Schlüsse von ganz derselben Art, wie oben beim Sechseck, erhalten wir folgende zwei Sätze:

I. Wenn bei einem in einen Kegelschnitt beschriebenen Vielecke von 6, 10, 14 *etc., oder überhaupt von* $4m+2$ *Seiten, die Durchschnitte aller Paare gegenüberliegender Seiten, bis auf eines, in einer Geraden begriffen sind: so liegt darin auch der Durchschnitt dieses letzten Paares.*

II. Wird zu einem in einen Kegelschnitt beschriebenen Vielecke von gerader Seitenzahl ein zweites von gleicher Seitenzahl in den Kegelschnitt so beschrieben, dafs die Durchschnitte je zweier gleichvielter Seiten beider Vielecke, bis auf einen, den letzten, in einer Geraden liegen: so ist auch der letzte in dieser Geraden enthalten.

Schliefslich füge ich noch die diesen Sätzen nach dem Gesetze der Dualität entsprechenden bei, die, wenn man will, gleichfalls aus der Natur des Kreises hergeleitet werden können, indem man die durch Paare von Ecken der Vielseite zu legenden Geraden insgesammt sich im Mittelpuncte des Kreises, um welchen die Vielseite beschrieben worden, schneidend annimmt. (Vergl. die *Gergonne*sche Abhandlung.)

I. Wenn bei einem um einen Kegelschnitt beschriebenen Vielseit mit $4m+2$ *Ecken alle, die gegenüberliegenden Ecken verbindenden Geraden, bis auf eine, in einem Puncte sich schneiden: so trifft diesen Punct auch die das noch übrige Eckenpaar verbindende Gerade.*

II. Wird zu einem um einen Kegelschnitt beschriebenen Vielseit mit gerader Eckenzahl ein zweites Vielseit mit der nämlichen Eckenzahl so beschrieben, dafs die durch je zwei gleichvielte Ecken beider Vielseite zu ziehenden Geraden, bis auf eine, die letzte, in einem Puncte sich schneiden: so trifft diesen Punct auch die letzte Gerade.

Der Satz, dafs die zwischen parallelen Sehnen eines Kreises liegenden Bogen des letztern einander gleich sind, und dafs umgekehrt die Endpuncte

zweier einander gleichen Bogen eines Kreises durch parallele Sehnen verbunden werden können: dieser Satz kann, etwas anders ausgedrückt, auf alle Kegelschnitte ausgedehnt werden. Setzt man nämlich statt der Bogen die ihnen stets proportionalen Sectoren des Kreises und projicirt alsdann die Figur durch Parallellinien auf eine gegen ihre Ebene geneigte Ebene, so erhält man folgendes Theorem:

Sind AB und $A'B'$ zwei parallele Sehnen einer Ellipse und ist M der Mittelpunct der Ellipse, so sind die elliptischen Sectoren $MA'A$ und MBB', so wie $MA'B$ und MAB', einander gleich; und dieses auch hinsichtlich des durch die Buchstabenfolge in ihren Ausdrücken bestimmten Vorzeichens. Umgekehrt: Sind zwei elliptische Sectoren $MA'A$ und MBB' mit Rücksicht auf die Zeichen einander gleich, so sind die Sehnen AB und $A'B'$ einander parallel. Oder noch anders ausgedrückt:

Es bewege sich ein Punct P in einer Ellipse dergestalt, daſs der bis zu ihm vom Mittelpuncte der Ellipse aus gezogene Radius in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht, so werden die zwischen zwei parallelen Sehnen AB und $A'B'$ der Ellipse enthaltenen Bogen $A'A$ und BB', so wie $A'B$ und AB', von P in gleichen Zeiten durchlaufen; und umgekehrt.

Dieselben Sätze gelten, wie sich leicht zeigen läſst, auch für die Hyperbel; und zwar der umgekehrte in allen Fällen, der directe aber mit einer Beschränkung, welche aus der Doppelgestalt der Hyperbel entsteht, und wonach zwei Puncte einer Hyperbel nur dann die Endpuncte eines hyperbolischen Bogens sein können, wenn sie in einer und derselben Hälfte der Curve liegen.

Endlich gelten diese phoronomischen Sätze wörtlich auch für die Parabel, wenn man dieselbe von einem Puncte also durchlaufen läſst, daſs eine durch den Punct gelegte, mit der Axe der Parabel stets parallel bleibende Gerade in gleichen Zeiten gleichbreite Parallelstreifen überstreicht. Es ist dies keine andere, als die parabolische Wurfbewegung, und wir können daher noch Folgendes schlieſsen:

Werden von einem geworfenen Körper die Bogen AB und CD in gleichen Zeiten zurückgelegt, so sind die Geraden AD und BC einander parallel; und wenn die Bogen AB und BC in gleichen Zeiten beschrieben werden, so ist die Gerade AC parallel mit der an die Curve in B gelegten Tangente.

14.

Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

(Von Hrn. Dr. *Öttinger*, Prof. ord. an der Universität zu Freiburg im Br.)

(Fortsetzung des Aufsatzes No. 16. und No. 21. im 26ten, No. 17. und 22. im 30ten und No. 8. im 34ten Bande.)

IV.

§. 35.

Ist mit dem Eintreffen eines Ereignisses die Erwerbung eines physischen Gutes oder ein Gewinn verbunden, so erhält das Eintreffen einen ***Werth.*** Dieser Werth soll ***Werth der Erwartung*** heifsen.

In einer Urne sind $m-1$ schwarze und eine weifse Kugel enthalten. Auf das Erscheinen der weifsen Kugel ist der Gewinn G gesetzt. Von m Personen darf jede eine Kugel aus der Urne nehmen, ohne die in der Urne enthaltenen Kugeln bei der Ziehung sehen zu können. Diejenige Person, welche die weifse Kugel zieht, erhält die ausgesetzte Summe. Welchen Theil des Gewinnes hat jede Person vor der angefangenen Ziehung anzusprechen, oder wie grofs ist der Werth ihrer Erwartung?

Offenbar hat vor dem Anfange der Ziehung jede Person das gleiche Recht oder den gleichen Anspruch auf den Gewinn. Soll daher vor der Ziehung jeder von ihnen ein bestimmter Theil des ausgesetzten Gewinnes zugewiesen werden, so mufs dieser Theil mit der Gröfse des Anspruchs oder mit der Hoffnung zu gewinnen im Verhältnifs stehen. Dieser Werth der Erwartung ist demnach im vorliegenden Fall

$$E = \frac{1}{m}\cdot G.$$

E bedeutet den Werth der Erwartung. Sind nur zwei Personen A und B vorhanden, von welchen die erste p mal, die andere $m-p$ mal ziehen darf, und ist nun der Werth der Erwartung für beide zu bestimmen, so kann man sich die eine als Stellvertreter von p, die andere als Stellvertreter von $m-p$ Personen vorstellen. Es wird also jede sovielmal den $m$ten Theil des Gewinnes anzusprechen haben, als sie Ziehungen machen darf. Demnach ist der Werth der Erwartung für A,

$$E_1 = \frac{p}{m}\cdot G,$$

der für B,

$$E_2 = \frac{m-p}{m} \cdot G.$$

Dies läfst sich leicht auf drei und mehr Personen ausdehnen. Sind n Personen A_1, A_2, A_3, ... A_n vorhanden, von welchen die erste p_1, die zweite p_2, die dritte p_3 u. s. w., die $n$te p_n Ziehungen unter den obigen Bedingungen machen darf, so ist der Werth der Erwartung für A_k,

$$1. \quad E_k = \frac{p_k}{m} \cdot G.$$

Dabei ist vorausgesetzt, dafs $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots p_n$ nicht gröfser als m werden darf. In den Gleichungen drückt die Vorzahl von G nach (1. §. 2.) die Wahrscheinlichkeit aus, den in Aussicht stehenden Gewinn zu erhalten. Dies führt zu folgendem Satze:

2. Der Werth der Erwartung einer Person wird bestimmt durch das Product der ihr günstigen Wahrscheinlichkeit in den zu erwartenden Gewinn, oder durch das Product des zu erwartenden Gewinnes in die Hoffnung, ihn zu erlangen.

A hat die Hoffnung, einen der Gewinne G_1, G_2, G_3, ... G_n zu erlangen. Die Wahrscheinlichkeit, den Gewinn G_1 zu erlangen, ist p_1, diejenige den Gewinn G_2 zu erlangen, ist p_2, u. s. w., diejenige den Gewinn G_n zu erlangen, ist p_n. Wie grofs ist der Werth der Erwartung für A?

Da A nur einen der Gewinne und jeden nur mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit erlangen kann, so findet sich der Werth der Erwartung, wenn man den Grundsatz (2.) auf jeden einzelnen Fall anwendet und die Resultate zusammenzählt. Der gesuchte Werth ist

$$3. \quad E = p_1 G_1 + p_2 G_2 + p_3 G_3 + \ldots + p_n G_n \quad \text{oder}$$

$$4. \quad E = \Sigma_{n=1}^{n=n} p_n G_n,$$

wenn in $p_n G_n$ allmälig, aber gleichzeitig, 1, 2, 3, 4, ... n statt n gesetzt wird. Sind die Wahrscheinlichkeiten, die verschiedenen Gewinne zu erlangen, einander gleich, so dafs $p_1 = p_2 = p_3 = \ldots = p_n = p$, so ist

$$5. \quad E = p(G_1 + G_2 + G_3 \ldots + G_n) = p . \Sigma_{n=1}^{n=n} G_n.$$

Sind die Gewinne gleich und die Wahrscheinlichkeit, sie zu erlangen, ist verschieden, so ist aus (3. und 4.)

$$6. \quad E = (p_1 + p_2 + p_3 \ldots p_n) G = G . \Sigma_{n=1}^{n=n} p_n.$$

In diesen Gleichungen kann $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots p_n$ nicht gröfser als die Einheit sein. Für gleiche Gewinne und gleiche Wahrscheinlichkeiten ist

$$7. \quad E = npG.$$



Diese Gleichungen lassen sich auch noch auf eine andere Art darstellen, wenn nicht die Wahrscheinlichkeiten gegeben sind, sondern die Zahl der Fälle, welche die verschiedenen Gewinne bringen. Bringen r_1 Fälle den Gewinn G_1, r_2 den Gewinn G_2, u. s. w., r_n Fälle den Gewinn G_n, r_s Fälle aber weder Gewinn noch Verlust, so ist der Werth der Erwartung

$$8. \quad E = \frac{\Sigma_{n=1}^{n=n} r_n G_n}{r_s + \Sigma_{n=1}^{n=n} r_n} = \frac{r_1 G_1 + r_2 G_2 + r_3 G_3 + \ldots . r_n G_n}{r_1 + r_2 + r_3 + \ldots . r_n + r_s}.$$

Wirft Jemand mit einem Würfel einmal, in der Hoffnung sovielmal die Summe G zu treffen, als Puncte auf der obern Seite des geworfenen Würfels erscheinen, so findet sich der Werth der Erwartung aus (5.), wenn $p = \frac{1}{6}$ und $G_1 = G_1$, $G_2 = 2G$, ... $G_6 = 6G$ gesetzt wird. Er ist

$$E = \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{42}{2} G = 3\tfrac{1}{2} G.$$

Hat Jemand ein Loos einer aus 1000 Loosen bestehenden Lotterie, in welcher ein Gewinn von 10000 f, einer von 5000 f, vier von 1000 f, vier von 500 f und 600 Gewinne von 50 f enthalten sind, so ist der Werth seiner Erwartung nach (8.)

$$E = \frac{10000 + 5000 + 4.1000 + 4.500 + 600.50}{1000} f = 51 f.$$

Der *Werth der Erwartung* wird auch mit dem Namen *„mathematische Hoffnung"* bezeichnet und diese der *„moralischen"* gegenübergestellt. Zweckmäfsiger würde der Name *„objective Hoffnung"* sein. Auch liefse sich der Werth der Erwartung durch *„mittlerer Werth"* oder *„Durchschnitts-Werth"* bezeichnen. Für viele Fälle pafst die Benennung *mittlerer Werth* recht gut.

Aus den obigen Grundsätzen läfst sich Folgendes weiter ziehen.

In einer Urne ist eine Anzahl Kugeln enthalten, mit den Zahlen 1, 2, 3, ... a bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit, eine Kugel mit dem Zeichen 1 zu treffen, ist p_1; diejenige, eine mit dem Zeichen 2 zu treffen, p_2, u. s. w. Mit dem Erscheinen der genannten Kugeln ist der Reihe nach der A_1, A_2, A_3, ... $A_a$fache Gewinn einer bestimmten Summe verbunden. In einer zweiten Urne ist eine andere Zahl von Kugeln enthalten, welche die Zahlen 1, 2, 3, ... b haben. Die Wahrscheinlichkeiten, diese Kugeln zu treffen, sind beziehlich q_1, q_2, q_3, ... q_b, und mit deren Erscheinen sind die B_1, B_2, B_3, ... $B_b$fachen Gewinne derselben Summe verbunden. Jemand zieht nun erst eine Kugel aus der ersten, dann eine aus der zweiten Urne und gewinnt so viel

als die Summe der auf den gezogenen Kugeln aufgezeichneten Zahlen ausdrückt. Wie grofs ist der Werth der Erwartung?

Die Frage beantwortet sich, wenn zunächst der Werth der Erwartung bestimmt wird, der durch das Ziehen einer Kugel aus der ersten Urne bedingt ist; dann derjenige, welcher durch das Ziehen einer Kugel aus der zweiten Urne sich ergiebt. Wird aus der ersten Urne gezogen, so ist der Werth der Erwartung nach (3.)

$$E_1 = \Sigma_{a=1}^{a=a} p_a A_a.$$

Wird aus der zweiten gezogen, so ist

$$E_2 = \Sigma_{b=1}^{b=b} q_b B_b.$$

Der gesuchte Werth ist demnach

$$9. \quad E = \Sigma_{a=1}^{a=a} p_a A_a + \Sigma_{b=1}^{b=b} q_b B_b.$$

Diese Schlufsweise läfst sich unter ähnlichen Bedingungen auf drei, vier u. s. w. und g Urnen ausdehnen. Im letzten Fall ergiebt sich allgemein für den Werth der Erwartung:

$$10. \quad E = \Sigma_{a=1}^{a=a} p_a A_a + \Sigma_{b=1}^{b=b} q_b B_b + \Sigma_{c=1}^{c=c} r_c C_c + \ldots + \Sigma_{g=1}^{g=g} z_g G_g.$$

Die in (9. und 10.) gefundenen Gleichungen bleiben auch noch in Kraft, wenn die Ziehungen aus den verschiedenen Urnen nicht *nach einander*, sondern *gleichzeitig* gemacht werden. Zugleich ist auch leicht zu sehen, dafs sie noch immer gelten, wenn nur eine Urne vorhanden ist und unter den obigen Bedingungen wiederholt aus ihr eine Kugel gezogen und nach der Ziehung in die Urne zurückgelegt wird. Für diesen Fall werden die Wahrscheinlichkeiten und Gewinne einander gleich. Wird dann $p$mal gezogen, so ist der Werth der Erwartung

$$11. \quad E = p\,\Sigma_{a=1}^{a=a} p_a A_a.$$

Es sind zwei Urnen vorhanden. Die Bedingungen sind die nämlichen, wie die zu (9.). Jemand zieht aus jeder Urne eine Kugel und gewinnt sovielmal eine bestimmte Summe, als das Product der Zahlen anzeigt, welche auf den erschienenen Kugeln geschrieben sind. Wie grofs ist der Werth seiner Erwartung?

Der Werth der Erwartung, welcher aus dem Erscheinen einer Kugel aus der ersten Urne folgt, ergiebt sich aus (3.). Er ist

$$E = \Sigma_{a=1}^{a=a} p_a A_a.$$

Auf jeden der in diesem Ausdrucke begriffenen Fälle kann jede in der zweiten Urne enthaltene, mit den Zahlen 1, 2, 3, ... b beschriebene Kugel folgen.

Erscheint die Kugel mit dem Zeichen 1, so ist der Werth der Erwartung aus (3. und 1.)

$$E_1 = q_1 B_1 \Sigma_{\alpha=1}^{\alpha=a} p_\alpha A_\alpha.$$

Erscheint die Kugel mit dem Zeichen 2, so ist der Werth der Erwartung nach (3. und 1.)

$$E_2 = q_2 B_2 \Sigma_{\alpha=1}^{\alpha=a} p_\alpha A_\alpha$$

u. s. w. Erscheint die Kugel mit dem Zeichen b, so ist der Werth der Erwartung, aus dem nämlichen Grunde,

$$E_b = q_b B_b \Sigma_{\alpha=1}^{\alpha=a} p_\alpha A_\alpha.$$

Aus der Vereinigung dieser Ausdrücke ergiebt sich der Werth der Erwartung. Er ist

$$12. \quad E = \Sigma_{\alpha=1}^{\alpha=a} p_\alpha A_\alpha . \Sigma_{b=1}^{b=b} q_b B_b.$$

Auch wenn drei und mehr Urnen unter ähnlichen Bedingungen in Betracht kommen, bleibt die eben angegebene Schlufsfolge in Kraft. Bei g Urnen ist der Werth der Erwartung

$$13. \quad E = \Sigma_{\alpha=1}^{\alpha=a} p_\alpha A_\alpha . \Sigma_{b=1}^{b=b} q_b B_b . \Sigma_{c=1}^{c=c} r_c C_c \ldots . \Sigma_{g=1}^{g=g} z_g G_g.$$

Die gleichen Resultate finden sich, wenn die Ziehungen gleichzeitig geschehen.

Die Resultate können noch mehr verallgemeinert werden, wenn man die Gleichungen (10. und 13.) mit einander verbindet. Der Werth der Erwartung ist dann

$$14. \quad E = F_1 F_2 \ldots . F_i + G_1 G_2 G_3 \ldots . G_k + \ldots . m_1 m_2 \ldots . m_r,$$

wenn $F_1, F_2, \ldots . F_i$; $G_1, G_2, \ldots . G_k$, u. s. w. die Ausdrücke sind, welche durch (13.) angedeutet werden.

Es sind zwei Urnen vorhanden. Jemand zieht unter den obigen Bedingungen eine Kugel; und zwar entweder aus der ersten, oder aus der zweiten Urne. Die der erscheinenden Kugel aufgeschriebene Zahl bestimmt die Gröfse des Gewinnes. Wie grofs ist der Werth der Erwartung?

Wird aus der ersten Urne allein gezogen, so ist der Werth der Erwartung

$$E_1 = \Sigma_{\alpha=1}^{\alpha=a} p_\alpha A_\alpha.$$

Wird aus der zweiten allein gezogen, so ist derselbe

$$E_2 = \Sigma_{b=1}^{b=b} q_b B_b.$$

Das Ziehen aus jeder Urne ist gleich möglich. Die Wahrscheinlichkeit, eine Kugel aus der einen oder der andern Urne zu ziehen, ist daher $\frac{1}{2}$. Demnach

ist der gesuchte Werth der Erwartung

$$15.\quad E = \tfrac{1}{2}\Sigma_{a=1}^{a=a} p_a A_a + \tfrac{1}{2}\Sigma_{b=1}^{b=b} q_b B_b.$$

Auch wenn unter ähnlichen Voraussetzungen drei und mehr Urnen vorhanden sind, bleibt die eben gemachte Schlufsfolge in Kraft. Es ist allgemein für m Urnen:

$$16.\quad E = \frac{1}{m}\left(\Sigma_{a=1}^{a=a} p_a A_a + \Sigma_{b=1}^{b=b} q_b B_b + \Sigma_{c=1}^{c=c} r_c C_c + \ldots + \Sigma_{m=1}^{m=m} z_m M_m\right).$$

Auch diese Gleichung läfst sich nach dem Vorgange von (4.) verallgemeinern, nämlich zu

$$17.\quad E = \frac{1}{m}(F_1 F_2 \ldots F_i + G_1 G_2 \ldots G_k + \ldots M_1 M_2 \ldots M_r).$$

Sind die Werthe, die dem Eintreffen der einzelnen Fälle zugehören, Functionen irgend einer veränderlichen Gröfse, welche durch

$$fx_1,\ fx_2,\ fx_3,\ \ldots\ fx_a$$

ausgedrückt werden, so ändert dies an der Schlufsfolge nichts und es ist aus (3.) oder (4.):

$$18.\quad E = \Sigma_{a=1}^{a=a} p_a f x_a.$$

Aus (10.) ergiebt sich dann

$$19.\quad E = \Sigma_{a=1}^{a=a} p_a f x_a + \Sigma_{b=1}^{b=b} q_b f y_b + \ldots \Sigma_{g=1}^{g=g} n_g f n_g.$$

Diese Schlüsse lassen sich noch weiter ausdehnen, und gelten auch noch, wenn unter fx_a in (18.) eine zusammengesetzte Function, etwa wie $fx_a = fu_a + fw_a$, verstanden wird. Ferner gelten sie, wenn statt der beziehlichen Wahrscheinlichkeiten die Zahl der Fälle, welche das Erscheinen einer Kugel und des zugehörigen Werthes bedingen, gegeben ist. Sind nun $p_1, p_2, p_3, \ldots p_a$; $q_1, q_2, q_3, \ldots q_b$; u. s. w. die Zahl der Fälle, so ergiebt sich aus (9.):

$$20.\quad E = \frac{\Sigma_{a=1}^{a=a} p_a A_a}{\Sigma_{a=1}^{a=a} p_a} + \frac{\Sigma_{b=1}^{b=b} q_b B_b}{\Sigma_{b=1}^{b=1} q_b}$$

u. s. w. Hier können die unter ΣA_a und ΣB_b u. s. w. begriffenen Fälle auf jeden möglichen Werth, also auch auf 0 und auf negative Gröfsen deuten. Werden die sich ergebenden Resultate negativ, so deuten sie auf *Verlust*.

In einer Urne sind eine Kugel, mit der Zahl 1, zwei Kugeln mit der Zahl 2, drei mit der Zahl 3, u. s. w., m mit der Zahl m bezeichnet, enthalten. Jemand zieht $p$mal je eine Kugel aus der Urne und legt die gezogene Kugel in die Urne zurück. Er erhält jedesmal so oft die Summe G zum Gewinn,

als es die der erscheinenden Nummer aufgeschriebene Zahl anzeigt. Wie grofs ist der Werth der Erwartung?

Aus (11.) oder (20.) ergiebt sich dieser Werth durch Einführung der angezeigten Werthe. Er ist

$$E = p \cdot \frac{\Sigma m^2}{\Sigma m} \cdot G = \frac{2p}{m(m+1)}[\tfrac{1}{3}m^3 + \tfrac{1}{2}m^2 + \tfrac{1}{6}m] = \frac{p(2m^2+3m+1)}{3(m+1)};$$

denn es sind in (20.) statt $p_1, p_2, \ldots p_\alpha$ die Zahlen 1, 2, 3, ... m und statt $A_1, A_2, \ldots A_\alpha$ dieselben Zahlen zu setzen. Wird bei dem Erscheinen irgend einer Kugel nur der einfache Gewinn ausgezahlt, so ist der Werth der Erwartung unter diesen Bedingungen:

$$E = p \cdot \frac{\Sigma m}{\Sigma m} \cdot G = p.G.$$

Ist aber in der Urne nur eine Kugel mit jedem der Zeichen vorhanden, so ist der Werth der Erwartung

$$E = p \cdot \frac{\Sigma m}{\Sigma_1} \cdot G = p \cdot \frac{m(m+1)}{1.2.m} \cdot G = \tfrac{1}{2}p(m+1)G,$$

Dies ist der Fall bei dem Würfelspiel, wenn $G = 1$ gesetzt wird. Es finden sich dann die Durchschnittswerthe, welche bei diesem Spiele mit 1, 2, 3, 4, ... Würfeln geworfen werden können. Dieselben sind der Reihe nach $\tfrac{7}{2}$, 7, $10\tfrac{1}{2}$, 14, $17\tfrac{1}{2}$, 21, $24\tfrac{1}{2}$, 28, $31\tfrac{1}{2}$, 35, ...

In einer Urne befinden sich eine Kugel mit $-m$, eine mit $+m$, zwei mit $-(m-1)$ und zwei mit $+(m-1)$, drei mit $-(m-2)$ und drei mit $+(m-2)$ bezeichnet u. s. w.; endlich $m+1$ Kugeln mit 0 bezeichnet. Man zieht $p$mal. Wie grofs ist der Durchschnittswerth für die den Kugeln aufgeschriebenen Nummern. Aus (20.) ergiebt sich durch Einführung der angezeigten Werthe

$$E = p \cdot \frac{\frac{-m(m+1)}{1.2} + (m+1)0 + \frac{m(m+1)}{1.2}}{m(m+1)+m+1} = 0$$

§. 36.

Die im vorigen Paragraph enthaltenen Grundsätze gelten allgemein zur Bestimmung des Werths der Erwartung irgend einer betheiligten Person, und ohne Rücksicht auf die Art und Weise, wie der zu erwartende Gewinn erlangt wird, oder auf die Ordnung, in welcher die Theilnehmer ihre Ansprüche geltend machen können. Es liegt daher die Frage nahe: Hat die Ordnung, in welcher mehrere Personen dazu gelangen, ihre Ansprüche geltend zu machen, einen Einflufs auf den Werth der Erwartung, oder nicht?

Um diese Frage zu untersuchen, gehen wir vom Folgenden aus.

In einer Urne befinden sich $n-1$ schwarze und eine weifse Kugel. Von n Personen A_1, A_2, A_3, ... A_n nimmt jede in der genannten Ordnung eine Kugel aus der Urne, ohne die Kugeln vorher sehen zu können. Wer die weifse Kugel zieht, gewinnt die darauf gesetzte Summe G. Wie grofs ist der Werth der Erwartung für die einzelnen Theilnehmer?

Es können folgende Fälle eintreten. Die weifse Kugel wird von A_1, oder von A_2, oder von A_3, ..., oder von A_n gezogen. Für jeden einzelnen Fall mufs der Werth bestimmt und das erhaltene Resultat mit den übrigen verglichen werden. Die Wahrscheinlichkeit, dafs A_1 die weifse Kugel ziehen werde, ist $\frac{1}{n}$. Der Werth der Erwartung für A_1 ist demnach

$$E_1 = \frac{G}{n}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs A_2 gerade die weifse Kugel ziehen werde, setzt voraus, dafs A_1 sie nicht, sondern eine schwarze Kugel gezogen habe. Sie ist $\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}$. Der Werth der Erwartung hierfür ist

$$E_2 = \frac{G}{n}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs gerade A_3 die weifse Kugel ziehen werde, setzt voraus, dafs weder A_1 noch A_2 die weifse, sondern eine schwarze Kugel gezogen habe. Sie ist $\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}=\frac{1}{n}$. Der Werth der Erwartung für A_3 ist also

$$E_3 = \frac{G}{n}.$$

Diese Schlüsse lassen sich fortsetzen. Die Wahrscheinlichkeit, dafs A_k gerade die weifse Kugel ziehen werde, beruht darauf, dafs keiner seiner Vorgänger dieselbe gezogen hat und ist $\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{n-k+1}{n-k+2}\cdot\frac{1}{n-k+1}=\frac{1}{n}$. Der Werth der Erwartung ist also für A_k:

$$1.\quad E_k = \frac{G}{n};$$

u. s. w. Die so eben gefundenen Resultate rechtfertigen demnach folgenden Satz.

2. **Soll ein Gewinn G durch Verloosung auf die genannte Weise einer von den Personen A_1, A_2, A_3, ... A_n zugewiesen werden, so ist der Werth der Erwartung aller Theilnehmer vor dem Beginne der Verloosung *gleich grofs*. Sind aber schon k Kugeln gezogen und ist die fragliche Kugel**

noch nicht erschienen, so ist der Werth der Erwartung für den Theilnehmer im Augenblick, wo er zum Loosen gelangt,

$$3.\quad E = \frac{G}{n-k}.$$

An die Stelle der Ordnung, in welcher die genannten Personen zum Loosen gelangen, kann jede andere gesetzt werden, ohne dafs sich die Schlüsse ändern, welche die Resultate (1. und 2.) geben. Dies führt zu folgendem Satze:

4. Soll ein Gewinn G auf die genannte Weise einer von n Personen durch Verloosung zugewiesen werden, so ist die Ordnung, in welcher die Personen zum Loosen gelangen, gleichgültig.

In einer Urne sind $n-2$ schwarze und zwei mit 1 und 2 bezeichnete weifse Kugeln enthalten. Zwei Gewinne G und H sollen unter die Personen $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ durchs Loos vertheilt werden. Wer die Kugel 1 zieht, erhält den Gewinn G und wer die Kugel 2 zieht, den Gewinn H. Die Personen kommen in der genannten Ordnung zum Ziehen. Jede zieht eine Kugel aus der Urne. Wie grofs ist der Werth der Erwartung für jede Person, vor der Ziehung?

Es können folgende Fälle eintreten:
Die Gewinne fallen in der genannten Ordnung

a) auf die 1te und 2te, 1te und 3te, 1te und 4te, ... 1te und n^{te} Person,
b) auf die 2te und 3te, 2te und 4te, 2te und 5te, ... 2te und n^{te} Person,
c) auf die 3te und 4te, 3te und 5te, 3te und 6te, ... 3te und n^{te} Person,
. . . .
n) auf die $(n-1)^{te}$ und n^{te} Person.

Die Ordnung, in welcher die Gewinne erscheinen, ist die umgekehrte, und die nämlichen Fälle treten wieder ein.

Die obige Zusammenstellung umfafst alle möglichen Fälle. Sie stimmen mit den Zerstreuungen zweier Elemente in n Fächer überein und sind deshalb ihrer Zahl nach und in einer bestimmten Ordnung, $=\frac{n(n-1)}{1.2}$. Jeder Theilnehmer hat die Aussicht, dafs sich in $n-1$ Fällen das Loos günstig für ihn entscheide. Für jeden einzelnen Fall mufs daher der Werth seiner Erwartung bestimmt und alle diese Werthe müssen zusammengezählt werden. Die Wahrscheinlichkeiten in den einzelnen Fällen sind veränderlich, nach der Zahl der in der Urne zurückbleibenden Kugeln und des darauf gesetzten Gewinnes.

Werden nun unter den genannten Voraussetzungen die Werthe der Erwartungen bestimmt, so ergiebt sich für die in (a) aufgeführten Fälle, welche den Werth der Erwartung für A_1 in Beziehung auf den Gewinn G andeuten, nach (1. §. 35.) folgende Zusammenstellung:

$$1.\quad\left\{\begin{array}{l}
\frac{G}{n}\cdot\frac{H}{n-1}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{G}{n}\cdot\frac{H}{n-1},\\
\frac{G}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{H}{n-2}\;\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{G}{n}\cdot\frac{H}{n-1},\\
\frac{G}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{H}{n-3}\;\ldots\ldots\ldots = \frac{G}{n}\cdot\frac{H}{n-1},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{G}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-4}{n-3}\;\ldots\;\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}H = \frac{G}{n}\cdot\frac{H}{n-1}.
\end{array}\right.$$

Wendet man die nämlichen Bemerkungen auf die unter (b) angeführten Fälle an, so erhält man folgende Darstellung:

$$2.\quad\left\{\begin{array}{l}
\frac{n-2}{n}\cdot\frac{G}{n-1}\cdot\frac{H}{n-2}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{G}{n}\cdot\frac{H}{n-1},\\
\frac{n-2}{n}\cdot\frac{G}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{H}{n-3}\;\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{G}{n}\cdot\frac{H}{n-1},\\
\frac{n-2}{n}\cdot\frac{G}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-4}{n-3}\cdot\frac{H}{n-4}\;\ldots\ldots\ldots = \frac{G}{n}\cdot\frac{H}{n-1},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{n-2}{n}\cdot\frac{G}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-3}\cdot\frac{n-4}{n-3}\;\ldots\;\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}H = \frac{G}{n}\cdot\frac{H}{n-1}.
\end{array}\right.$$

Für die unter (c) aufgeführten Fälle ergiebt sich:

$$3.\quad\left\{\begin{array}{l}
\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{G}{n-2}\cdot\frac{H}{n-3}\;\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{G}{n}\cdot\frac{H}{n-1},\\
\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{G}{n-2}\cdot\frac{n-4}{n-3}\cdot\frac{H}{n-4}\;\ldots\ldots\ldots = \frac{G}{n}\cdot\frac{H}{n-1},\\
\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{G}{n-2}\cdot\frac{n-4}{n-3}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdot\frac{H}{n-5}\;\ldots\ldots = \frac{G}{n}\cdot\frac{H}{n-1},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{G}{n-2}\cdot\frac{n-4}{n-3}\cdot\frac{n-5}{n-4}\;\ldots\;\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}H = \frac{G}{n}\cdot\frac{H}{n-1},
\end{array}\right.$$

u. s. w. Für den letzten Fall gilt die Bestimmung

$$4.\quad \frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{n-4}{n-2}\;\ldots\;\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{2}G\cdot H = \frac{G}{n}\cdot\frac{H}{n-1}.$$

Erscheinen die Gewinne in umgekehrter Ordnung, so treten die unter $(a, b, c, \ldots n)$ aufgeführten Fälle wieder ein. Es ergeben sich die Ausdrücke (1, 2, 3, 4, ...); jedoch mit dem Unterschiede, dafs G an die Stelle von H tritt; und umgekehrt.

Die Hoffnung von A_1 auf den Gewinn G ist in (1.) angegeben. $n-1$ Fälle sind für A_1 günstig, die sämmtlich einander gleich sind. Nun bezieht sich der Werth der Erwartung von A_1 offenbar nur auf den Gewinn G, nicht auf H. Also ist letzterer auszuscheiden und das Resultat $(n-1)$mal zu nehmen. Mithin ist der Werth der Erwartung für A_1 auf den Gewinn G:

$$g_1 = \frac{G}{n(n-1)} \cdot (n-1) = \frac{G}{n}.$$

Dies gilt unmittelbar auch für A_1 in Beziehung auf den Gewinn H, und der Werth der Erwartung von A_1 ist in dieser Beziehung:

$$h_1 = \frac{H}{n(n-1)} \cdot (n-1).$$

Der ganze Werth der Erwartung von A_1 ist also

$$5. \quad E_1 = \frac{G}{n} + \frac{H}{n}.$$

Auf ganz ähnliche Weise ergiebt sich der Werth der Erwartung für A_2. Nach (2.) sind $n-2$ Fälle für A_2 günstig, nach (1.) nur einer. Der Werth der Erwartung von A_2 auf den Gewinn G ist $\frac{G}{n}$ und auf den Gewinn H, $= \frac{H}{n}$, folglich ist der Werth der Erwartung von A_2 in Beziehung auf beide Gewinne:

$$6. \quad E_2 = \frac{G}{n} + \frac{H}{n}.$$

Setzt man auf diese Weise die Schlufsfolge fort, so ist der Werth der Erwartung von A_k in Beziehung auf beide Gewinne:

$$7. \quad E_k = \frac{G}{n} + \frac{H}{n}.$$

Diese Resultate führen zu folgendem Schlusse:

8. Sollen zwei Gewinne G und H unter den oben genannten Bedingungen unter n Theilnehmer, die in einer vorgeschriebenen Ordnung zum Loose gelangen, vertheilt werden, so ist der Werth der Erwartung für jeden Theilnehmer vor dem Beginn der Verloosung gleich grofs.

Geht man von der vorgeschriebenen Ordnung auf eine andere über, so ändert dies nichts in der Schlufsweise, folglich auch nicht das Resultat für den Werth der Erwartung. Dies giebt folgenden Satz:

9. Sollen zwei Gewinne G und H durch das Loos auf die oben angegebene Weise unter n Theilnehmer vertheilt werden, so ist die Ordnung, in welcher die Theilnehmer zum Loosen gelangen, gleichgültig.

Sind k schwarze Kugeln erschienen, also noch $n-k$ Kugeln und die Gewinne in der Urne zurück, so ist der Werth der Erwartung für jeden folgenden Theilnehmer vor der Fortsetzung der Verloosung:

$$10. \quad E = \frac{G}{n-k} + \frac{H}{n-k}.$$

Ist ein Gewinn, etwa G, erschienen, so ist derselbe

$$11. \quad G = \frac{H}{n-k}.$$

In einer Urne befinden sich $n-3$ schwarze und drei mit 1, 2, 3 bezeichnete weifse Kugeln. Drei Gewinne G_1, G_2, G_3 sollen unter die Personen A_1, A_2, A_3, ... A_n durchs Loos vertheilt werden. Wer die Kugel 1 zieht, erhält den Gewinn G_1; wer die Kugel 2 zieht, erhält G_2; wer die Kugel 3 zieht, erhält G_3. Die Personen kommen in der genannten Ordnung zum Ziehen. Jede nimmt eine Kugel heraus. Wie grofs ist der Werth der Erwartung für jede Person vor der Ziehung?

Die Gewinne können in folgender Ordnung erscheinen:

$$\begin{array}{ll} G_1,\ G_2,\ G_3; & G_2,\ G_3,\ G_1, \\ G_1,\ G_3,\ G_2; & G_3,\ G_1,\ G_2, \\ G_2,\ G_1,\ G_3; & G_3,\ G_2,\ G_1. \end{array}$$

Für jede Ordnung können folgende Fälle vorkommen: die Gewinne können fallen

a) auf die 1te, 2te u. 3te; 1te, 2te u. 4te; 1te, 2te u. 5te; .... 1te, $(n-1)^{te}$, n^{te} Person,

b) auf die 2te, 3te u. 4te; 2te, 3te u. 5te; 2te, 3te u. 6te; .... 2te, $(n-1)^{te}$, n^{te} Person,

c) auf die 3te, 4te u. 5te; 3te, 4te u. 6te; 3te, 4te u. 7te; .... 3te, $(n-1)^{te}$, n^{te} Person,

. . . .

n) auf die $(n-2)^{te}$, $(n-1)^{te}$, n^{te} Person.

Dieses Schema fällt mit den Zerstreuungen von drei Elementen in n Fächer zusammmen, und gilt für jede einzelne Gewinn-Vertheilung. Demnach ist die Zahl aller möglichen Fälle, welche entstehen,

$$= 1.2.3.\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.$$

Unter diesen Fällen kann jeder Theilnehmer $1.2.\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$ mal in Beziehung auf jeden einzelnen Gewinn ein für sich günstiges Resultat erwarten.

Wendet man nun die Schlüsse an, welche in (1. 2. 3. ....) angewendet wurden, so ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$12.\quad\left\{\begin{array}{lr}
\frac{G_1}{n}\cdot\frac{G_2}{n-1}\cdot\frac{G_3}{n-2}\cdots\cdots\cdots\cdots & =\frac{G_1}{n}\cdot\frac{G_2}{n-1}\cdot\frac{G_3}{n-2},\\
\frac{G_1}{n}\cdot\frac{G_2}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{G_3}{n-3}\cdots\cdots\cdots\cdots & =\frac{G_1}{n}\cdot\frac{G_2}{n-1}\cdot\frac{G_3}{n-2},\\
\frac{G_1}{n}\cdot\frac{G_2}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-4}{n-3}\cdot\frac{G_3}{n-4}\cdots\cdots\cdots\cdots & =\frac{G_1}{n}\cdot\frac{G_2}{n-1}\cdot\frac{G_3}{n-2},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\frac{G_1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{n-4}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-3}\cdots\cdots\cdots\cdots\ \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}G_2\cdot G_3 & =\frac{G_1}{n}\cdot\frac{G_2}{n-1}\cdot\frac{G_3}{n-2},
\end{array}\right.$$

$$13.\quad\left\{\begin{array}{lr}
\frac{n-3}{n}\cdot\frac{G_1}{n-1}\cdot\frac{G_2}{n-2}\cdot\frac{G_2}{n-3}\cdots\cdots\cdots\cdots & =\frac{G_1}{n}\cdot\frac{G_2}{n-1}\cdot\frac{G_3}{n-2},\\
\frac{n-3}{n}\cdot\frac{G_1}{n-1}\cdot\frac{G_2}{n-2}\cdot\frac{n-4}{n-3}\cdot\frac{G_3}{n-4}\cdots\cdots\cdots\cdots & =\frac{G_1}{n}\cdot\frac{G_2}{n-1}\cdot\frac{G_3}{n-2},\\
\frac{n-3}{n}\cdot\frac{G_1}{n-1}\cdot\frac{G_2}{n-2}\cdot\frac{n-4}{n-3}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdot\frac{G_3}{n-5}\cdots\cdots\cdots\cdots & =\frac{G_1}{n}\cdot\frac{G_1}{n-1}\cdot\frac{G_3}{n-2},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\frac{n-3}{n}\cdot\frac{G_1}{n-1}\cdot\frac{n-4}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-3}\cdots\cdots\cdots\cdots\ \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}G_2\cdot G_1 & =\frac{G_1}{n}\cdot\frac{G_2}{n-1}\cdot\frac{G_3}{n-2},
\end{array}\right.$$

u. s. w. Endlich

$$14.\quad \frac{n-3}{n}\cdot\frac{n-4}{n-1}\cdot\frac{n-5}{n-2}\cdot\frac{n-6}{n-3}\cdots\cdots\ \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}G_1\cdot\frac{1}{2}G_2\cdot G_3=\frac{G_1}{n}\cdot\frac{G_2}{n-1}\cdot\frac{G_3}{n-2},$$

Wählt man eine andere Ordnung der Gewinne G_1, G_2, G_3, so ist in (12. 13. und 14.) die veränderte Ordnung einzuführen. Die übrigen Gebilde bleiben unverändert.

Um nun den Werth der Erwartung von A_1 in Bezug auf den Gewinn G_1 zu bestimmen, ist zu bemerken, dafs A_1 ihn in $1.2.\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$ Fällen erhalten kann; in welchen jedoch aufser ihm noch zwei Theilnehmer sich in die Gewinne G_2 und G_3 theilen. Werden diese ausgeschieden, so ergiebt sich

$$g_1=\frac{G_1}{n}.$$

Auf gleiche Weise findet sich der Werth der Erwartung von A_1 in Beziehung auf die Gewinne G_2 und G_3, nämlich:

$$g_2=\frac{G_2}{n}\quad\text{und}\quad g_3=\frac{G_3}{n}.$$

Demnach ist der Werth der Erwartung für A_1 in Beziehung auf alle die Gewinne:

$$E_1 = \frac{G_1}{n} + \frac{G_2}{n} + \frac{G_3}{n}.$$

Dieses führt zur Bestimmung des Werths der Erwartung für jeden andern Theilnehmer. Es ist also der Werth der Erwartung für den Theilnehmer A_k:

$$15. \quad E_k = \frac{G_1}{n} + \frac{G_2}{n} + \frac{G_3}{n}.$$

Man gelangt demnach sofort zu dem Schlusse, dafs auch in dem vorliegenden Fall der Werth der Erwartung für alle Theilnehmer vor der Verloosung gleich ist. Daran knüpft sich die weitere Bemerkung, dafs auch hier die Ordnung, in welcher die Theilnehmer zum Loosen gelangen, gleichgültig ist.

Die angegebene Entwicklungsweise ist, wie sich aus dem Gesagten leicht ergiebt, allgemein, und bleibt unverändert dieselbe, wenn es auf die Vertheilung von vier und mehreren Gewinnen unter n Personen ankommt.

Sind daher die Gewinne G_1, G_2, G_3, ... G_r unter n Personen auf die obige Art durchs Loos zu vertheilen, und fragt man nach dem Werth der Erwartung für die einzelnen Theilnehmer vor der Verloosung, so ergiebt sich für jeden:

$$16. \quad E = \frac{G_1 + G_2 + G_3 \ldots . G_r}{n};$$

wo r nicht gröfser als n sein kann. In der vorstehenden Gleichung liegt auch folgender Satz.

17. Wenn r Gewinne unter n Personen durchs Loos vertheilt werden sollen, so ist die Ordnung, in welcher die einzelnen Spieler zum Loosen gelangen, ganz gleichgültig. Denn der Werth der Erwartung bleibt nach (16.) unverändert, welche Ordnung auch gewählt werden mag.

Die gleichen Gesetze gelten bei Vertheilung von Lasten durch das Loos. Dies beweiset, dafs das Verfahren, welches gewöhnlich bei Vertheilung von Gewinnen oder Lasten durch das Loos angewendet wird, ganz im Rechte begründet ist. Man ist dabei einem natürlichen Gefühle gefolgt und richtig verfahren, ohne sich der Gründe klar bewufst zu sein: denn die vorstehenden Sätze sind, so viel mir bekannt, noch nirgend mathematisch bewiesen worden. Sie sind aber die Haupt-Grundlage für die Lehre von dem Werthe der Erwartung; denn gerade die Berechnung der durchschnittlichen Werthe von zu hoffenden Gütern gründet sich ganz auf die hier entwickelten Sätze, und es ist nicht möglich, die Gröfse der mathematischen Hoffnung für irgend einen

Theilnehmer zu ermitteln, wenn nicht eine bestimmte Ordnung festgesetzt ist, oder bevor man nicht erwiesen hat, dafs die Ordnung bei der Verloosung gleichgültig ist.

Wenn mehrere der zu vertheilenden Gewinne einander gleich sind, ändern sich die obigen Sätze nicht. Die Gleichung (16.) geht in folgende über:

$$18. \quad E = \frac{p_1 G_1 + p_2 G_2 + p_3 G_3 \dots + p_r G_r}{n};$$

wobei die Bedingung $p_1 + p_2 + p_3 \dots p_r \leqq n$ Statt findet. Sind k Ziehungen gemacht, ohne dafs ein Gewinn erschienen war, so ändert sich natürlich der Werth der Erwartung für die übrigen Theilnehmer und es ist für diesen Fall aus (18.):

$$19. \quad E = \frac{p_1 G_1 + p_2 G_2 + p_3 G_3 \dots + p_r G_r}{n-k}.$$

Hier ist $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_r \overline{\gtrless} n-k$.

Verschiedene Arten sind denkbar, Gewinne und Lasten durch das Loos zu vertheilen. Wir wollen folgende hervorheben.

a. In eine Urne werden so viele verschiedene Nummern gelegt, als Theilnehmer vorhanden sind: in eine zweite Urne so viele Blättchen oder Zettel, als Gewinne vertheilt werden sollen. Auf jedem Blättchen ist ein bestimmter Gewinn verzeichnet. Ist die Zahl der Gewinne kleiner als die Zahl der Theilnehmer, so werden so viele unbezeichnete oder mit 0 bezeichnete Blättchen (Nieten) hinzugethan, bis die Zahl der Theilnehmer erfüllt ist. Die Blättchen können zur Vorsicht verschlossen in die Urne gethan werden. Darauf wird aus jeder Urne je ein Blättchen gleichzeitig gezogen, die Zahl und der zugehörige Treffer oder die Niete wird gelesen, und so fortgefahren, bis aus beiden Urnen alle Blättchen gezogen sind.

b. Man bezeichnet auf verschiedene Blättchen der Reihe nach die zu vertheilenden Gewinne und legt die Blättchen verschlossen in die Urne, und so viele Nieten hinzu, bis die Zahl der Theilnehmer ergänzt ist. Nun werden der Reihe nach die Nummern, welche die Theilnehmer vertreten, ausgerufen, und bei oder vor jedem Aufrufe wird ein Blättchen aus der Urne gezogen und im letzten Falle geöffnet, wenn die Nummer gerufen ist. Das Verfahren wird fortgesetzt, bis alle Blättchen gezogen sind.

c. Man bringt in eine Urne, verschlossen, alle Nummern, welche die Theilnehmer vertreten. In eine zweite Urne legt man so viele Blättchen als Gewinne vertheilt werden sollen, mit den darauf verzeichneten Gewinnen; gleich-

falls verschlossen. Nun zieht man aus jeder Urne gleichzeitig ein Blättchen, lieset die Nummer und den dazu gehörigen Gewinn ab, und fährt so fort, bis alle Treffer gezogen sind und dadurch das Loos sämmtlicher Theilnehmer entschieden ist.

d. Man bringt in eine Urne, verschlossen, alle Nummern, welche die Theilnehmer vertreten, ruft in einer bestimmten, oder in jeder beliebigen Ordnung, sämmtliche Treffer aus, und zieht gleichzeitig mit jedem Treffer eine Nummer, wodurch das Loos der Theilnehmer allmälig entschieden wird.

Bei allen diesen Arten wird vorausgesetzt, dafs die in der Urne enthaltenen Blättchen wohl gemengt und bei jeder Ziehung durch einander gerüttelt werden, und dafs natürlich überall rechtlich und gewissenhaft verfahren werde.

Die erste Art schützt wohl am meisten gegen Betrug; besonders wenn gleichzeitig aus beiden Urnen Nummern gezogen werden und die Blättchen verschlossen in der Urne liegen. Diese Methode hat in sich selbst ihre Controle.

Die Rechtlichkeit der drei letzten Methoden gründet sich darauf, dafs bei dem Ziehen der Nummern aus einer Urne (nach der Lehre der Versetzungen, welche hier Anwendung findet) jede Zahl auf jeder einzelnen Stelle gleichvielmal erscheint; wodurch also die Ansprüche eines jeden Theilnehmers gesichert sind. Die beiden letzten Methoden ersparen bei einer grofsen Anzahl von Loosen viel Zeit.

Diese Sätze hier stimmen mit denen (§. 5. und 6.) überein, und die hier und dort gefundenen ergänzen sich gegenseitig; denn mit den dort betrachteten Fällen kann das Vertheilen von Gewinnen und also ein bestimmter Werth der Erwartung verbunden sein.

§. 37.

n Personen A_1, A_2, A_3, ... A_n trachten, in der genannten Reihenfolge und jeder mit einer besondern Wahrscheinlichkeit, ein Ereignifs herbeizuführen, mit dessen Eintreffen ein Gewinn verbunden ist; und zwar A_1 mit der Wahrscheinlichkeit a des Gelingens im einzelnen Fall, des Mifslingens $\alpha = 1 - a$ in q auf einander folgenden Versuchen; A_2 mit einer Wahrscheinlichkeit des Gelingens b im einzelnen Falle und des Mifslingens $\beta = 1 - b$ in r Versuchen, u. s. w., A_n mit einer Wahrscheinlichkeit n des Gelingens und des Mifslingens $\nu = 1 - n$ in z Versuchen. Gewinnt der Theilnehmer A_1 einmal, so erhält er den Gewinn G_1, A_2 den Gewinn G_2, u. s. w., A_n den Ge-

winn G_n. Jeder Theilnehmer tritt $p$mal in die Reihe, wenn nicht durch Erscheinen eines Gewinnes die Versuche beendet werden. Wie grofs ist der Werth der Erwartung für jeden einzelnen Theilnehmer?

Der Theilnehmer A_1 kann entweder gerade im ersten, oder im zweiten, oder im dritten u. s. w., oder im $q$ten Versuche in der ersten, zweiten, oder dritten u. s. w., oder in der $p$ten Reihenfolge gewinnen. In jedem einzelnen Falle erhält er G_1. Die Möglichkeit gerade im zweiten, dritten Versuche u. s. w., und überhaupt in einem spätern Versuche als dem ersten zu gewinnen, setzt voraus, dafs in keinem der vorhergehenden Versuche ein Gewinn erlangt wurde. Demnach ist der Werth der Erwartung für A_1 in Beziehung auf die Versuche der ersten Reihenfolge (6. §. 35.):

$$E_{1,1} = (a + \alpha a + \alpha^2 a + \alpha^3 a + \dots + \alpha^{q-1} a) G_1 = \frac{1-\alpha^q}{1-\alpha} \cdot a G_1 = (1-\alpha^q) G_1.$$

Der Werth der Erwartung für A_1 in Beziehung auf die Versuche der zweiten Reihenfolge ist

$$\begin{aligned} E_{1,2} &= \alpha^q \beta^r \gamma^s \dots \nu^z (a + \alpha a + \alpha^2 a + \dots \alpha^{q-1} a) G_1 \\ &= \alpha^q \beta^r \gamma^s \dots \nu^z (1-\alpha^q) G_1. \end{aligned}$$

Der Werth der Erwartung für A_1 in Beziehung auf die Versuche der dritten Reihenfolge ist

$$\begin{aligned} E_{1,3} &= \alpha^{2q} \beta^{2r} \gamma^{2s} \dots \nu^{2z} (a + \alpha a + \alpha^2 a + \dots \alpha^{q-1} a) G_1 \\ &= \alpha^{2q} \beta^{2r} \gamma^{2s} \dots \nu^{2z} (1-\alpha^q) G_1, \end{aligned}$$

u. s. w. Der Werth der Erwartung in Beziehung auf die Versuche der $p$ten Reihenfolge ist

$$\begin{aligned} E_{1,p} &= \alpha^{(p-1)q} \beta^{(p-1)r} \gamma^{(p-1)s} \dots \nu^{(p-1)z} (a + \alpha a + \alpha^2 a + \dots \alpha^{q-1} a) G_1 \\ &= (\alpha^q \beta^r \gamma^s \dots \nu^z)^{p-1} (1-\alpha^q) G_1. \end{aligned}$$

Werden diese Werthe vereinigt, so ergiebt sich für den Werth der Erwartung von A_1 in Beziehung auf sämmtliche Reihenfolgen:

$$1. \quad E_1 = \frac{1-(\alpha^q \beta^r \gamma^s \dots \nu^z)^p}{1-\alpha^q \beta^r \gamma^s \dots \nu^z} (1-\alpha^q) G_1.$$

Auf ganz gleiche Weise ergiebt sich der Werth der Erwartung für A_2, wenn man erwägt, dafs q Versuche dem Eintritt in die erste, $2q + r + s + \dots + z$ Versuche dem in die zweite u. s. w., endlich $pq + (p-1)(r + s + \dots n)$ dem Eintritt in die $p$te Reihenfolge vorausgegangen sein müssen. Demnach ist der Werth der Erwartung von A_2:

$$2. \quad E_2 = \alpha^q(1-\beta^r)G_2$$
$$+\alpha^{2q}\beta^r\gamma^s\ldots\nu^z(1-\beta^r)G_2$$
$$+\alpha^{3q}\beta^{2r}\gamma^{2s}\ldots\nu^{2z}(1-\beta^r)G_2$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\alpha^{pq}(\beta^r\gamma^s\ldots\nu^z)^{p-1}(1-\beta^r)G_2$$
$$=\alpha^q(1-\beta^r)\frac{1-\alpha^q\beta^r\gamma^s\ldots\nu^z)^p}{1-\alpha^q\beta^r\gamma^s\ldots\nu^z}\cdot G_2.$$

Setzt man diese Schlufsweise fort, so ergiebt sich für den Werth der Erwartung von A_3:

$$3. \quad E_3 = \alpha^q\beta^r(1-\gamma^s)\frac{1-(\alpha^q\beta^r\gamma^s\ldots\nu^z)^p}{1-\alpha^q\beta^r\gamma^s\ldots\nu^z}\cdot G_3,$$

u. s. w. Der für A_n ist

$$4. \quad E_n = \alpha^q\beta^r\gamma^s\ldots\omega^y(1-\nu^z)\frac{1-(\alpha^q\beta^r\gamma^s\ldots\nu^z)^p}{1-\alpha^q\beta^r\gamma^s\ldots\nu^z}\cdot G_n.$$

Ist p eine ziemlich grofse Zahl, oder werden die Reihenfolgen ins Unbestimmte fortgeführt, so kann $(\alpha^q\beta^r\gamma^s\ldots\nu^z)^p$, als sehr klein, vernachlässigt werden. In diesem Fall gehen die Ausdrücke (1. bis 4.) in folgende über:

$$5. \quad \begin{cases} E_1 = (1-\alpha^q)\dfrac{G_1}{1-\alpha^q\beta^r\ldots\nu^z}, \\ E_2 = \alpha^q(1-\beta^r)\dfrac{G_2}{1-\alpha^q\beta^r\ldots\nu^z}, \\ E_3 = \alpha^q\beta^r(1-\gamma^s)\dfrac{G_3}{1-\alpha^q\beta^r\ldots\nu^z}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ E_n = \alpha^q\beta^r\ldots\omega^y\cdot\dfrac{G_n}{1-\alpha^q\beta^r\gamma^s\ldots\nu^z}. \end{cases}$$

Vergleicht man die Werthe der Erwartungen für eine beschränkte (1. bis 4.) oder für eine unbeschränkte Reihenfolge (5.) mit einander, so ergiebt sich folgender Ausdruck:

$$6. \quad E_1 : E_2 : E_3 : \ldots . E_n$$
$$= (1-\alpha^q)G_1 : \alpha^q(1-\beta^r)G_2 : \alpha^q\beta^r(1-\gamma^s)G_3 : \ldots . \alpha^q\beta^r\ldots\omega^y(1-\nu^z)G_n,$$

und man wird auf ein beständiges Verhältnifs der Werthe der Erwartungen der einzelnen Theilnehmer für beschränkte und unbeschränkte Reihenfolgen geführt.

Sind die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Theilnehmer, Gewinne und Zahl der Versuche, gleich grofs, so dafs $a = b_1 = c = \dots\dots \alpha = \beta = \gamma = \dots\dots$ $G = G_1 = G_2 = G_3 \dots\dots$ und $q = r = s = \dots\dots$ ist, so gehen die Gleichungen (1. bis 4.) in eine andere Form über, die allgemein

$$7. \qquad E_k = \alpha^{(k-1)q}(1-\alpha^q)\frac{1-\alpha^{nqp}}{1-\alpha^{nq}}\cdot G$$

ist. Das Verhältnifs der Werthe der Erwartungen für die einzelnen Theilnehmer wird dann

$$8. \qquad E_1 : E_2 : E_3 : \dots\dots E_n = 1 : \alpha^q : \alpha^{2q} : \alpha^{3q} \dots\dots \alpha^{(n-1)q}.$$

Ist $q = 1$, so ergiebt sich aus (7.) die Formel

$$9. \qquad E_k = a\alpha^{k-1}\frac{1-\alpha^{np}}{1-\alpha^n}\cdot G.$$

Das Verhältnifs der Werthe der Erwartungen wird dann

$$10. \qquad E_1 : E_2 : E_3 : E_4 : \dots\dots E_n = 1 : \alpha : \alpha^2 : \alpha^3 \dots\dots \alpha^{n-1}.$$

Diese Werthe stehen zu einander in dem Verhältnisse der Glieder einer geometrischen Proportion, deren erstes Glied die Einheit und deren Exponent die dem Eintreffen des Ereignisses ungünstige Wahrscheinlichkeit ist. Diese Werthe nehmen ab. Die Gleichung (10.) gilt unter der Bedingung, dafs die Wahrscheinlichkeit, im einzelnen Falle zu gewinnen, für jeden Theilnehmer unverändert dieselbe bleibt.

Die Vergleichung der in diesem und dem vorigen Paragraphen erlangten Resultate zeigt, dafs die Ordnung, in welcher die Theilnehmer zum Loosen gelangen, bei den in (10.) ausgedrückten Bedingungen durchaus nicht gleichgültig ist, und dafs die früher eintretenden Theilnehmer vor den später eintretenden im Vortheil sind. Die Sätze (§. 36.) gründen sich darauf, dafs die Wahrscheinlichkeiten der Theilnehmer, wenn sie zum Loosen gelangen, veränderlich sind, während die Wahrscheinlichkeit für den einzelnen Theilnehmer bei (10.) unverändert bleibt.

Die hier gefundenen Resultate lassen sich noch anderweitig untersuchen, und man kann fragen: wie müssen die Wahrscheinlichkeiten, oder wie die Zahl der Versuche, oder wie die ausgesetzten Gewinne beschaffen sein, damit die Werthe der Erwartungen für die einzelnen Theilnehmer *gleich* sind. Läfst man die Zahl der Versuche und die Wahrscheinlichkeiten unverändert und bestimmt die Gröfse der Gewinne, um gleiche Erwartungswerthe zu haben, so ist

$$11.\quad \begin{cases} G_2 = \dfrac{1-\alpha^q}{\alpha^q(1-\beta^r)}\cdot G_1, \\ G_3 = \dfrac{1-\beta^r}{\beta^r(1-\gamma^s)}\cdot G_2 = \dfrac{1-\alpha^q}{\alpha^q\beta^r(1-\gamma^s)}\cdot G_1, \\ G_4 = \dfrac{1-\gamma^s}{\gamma^s(1-\delta^t)}\cdot G_3 = \dfrac{1-\beta^r}{\beta^r\gamma^s(1-\delta^t)}\cdot G_2 = \dfrac{1-\alpha^q}{\alpha^q\beta^r\gamma^s(1-\delta^t)}\cdot G_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ G_n = \dfrac{1-\omega^y}{\omega^y(1-\nu^z)}\cdot G_{n-1} = \dots\dots \dfrac{1-\beta^r}{\beta^r\gamma^s\dots\omega^y(1-\nu^z)} = \dfrac{(1-\alpha^q)G_1}{\alpha^q\beta^r\gamma^s\dots\omega^q(1-\nu^z)}. \end{cases}$$

Läfst man die Wahrscheinlichkeiten und Gewinne unverändert, so ergeben sich aus (1. bis 4.) folgende Bestimmungen für die Zahl der Versuche, um gleiche Erwartungswerthe zu erlangen:

$$12.\quad \begin{cases} r = \dfrac{\log\left(1-\dfrac{(1-\alpha^q)G_1}{\alpha^q G_2}\right)}{\log\beta}, \\ s = \dfrac{\log\left(1-\dfrac{(1-\beta^r)G_2}{\beta^r G_3}\right)}{\log\gamma}, \\ t = \dfrac{\log\left(1-\dfrac{(1-\gamma^s)G_3}{\gamma^s G_4}\right)}{\log\delta}, \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Bleiben die Zahl der Versuche und die Gewinne unverändert, so ergeben sich folgende Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Theilnehmer, um zu gleichen Erwartungswerthen zu gelangen:

$$13.\quad \beta = \sqrt[r]{\left(\frac{\alpha^q G_2-(1-\alpha^q)G_1}{\alpha^q G_2}\right)},\quad \gamma = \sqrt[s]{\left(\frac{\beta^r G_3-(1-\beta^r)G_2}{\beta^r G_3}\right)},\quad \delta = \left(\sqrt[t]{\frac{\gamma^s G_4-(1-\gamma^s)G_3}{\gamma^s G_4}}\right)$$

u. s. w. Die Gleichungen (13.) werden einfacher, wenn $G = G_1 = G_2 = G_3 = \dots$ gesetzt wird. Alsdann ist

$$14.\quad \begin{cases} \beta = \sqrt[r]{\left(\dfrac{2\alpha^q-1}{\alpha^q}\right)}, \\ \gamma = \sqrt[s]{\left(\dfrac{3\alpha^q-2}{2\alpha^q-1}\right)} = \sqrt[s]{\left(\dfrac{2\beta^r-1}{\beta^r}\right)}, \\ \delta = \sqrt[t]{\left(\dfrac{4\alpha^q-3}{3\alpha^q-2}\right)} = \sqrt[t]{\left(\dfrac{2\gamma^s-1}{\gamma^s}\right)} = \sqrt[t]{\left(\dfrac{3\beta^r-2}{2\beta^r-1}\right)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \nu = \sqrt[z]{\left(\dfrac{n\alpha^q-n+1}{(n-1)\alpha^q-n+2}\right)} = \sqrt[z]{\left(\dfrac{(n-1)\beta^r-n+2}{(n-2)\beta^r-n+3}\right)} = \sqrt[z]{\left(\dfrac{(n-2)\gamma^s-n+3}{(n-3)\gamma^s-n+4}\right)} = \dots\dots \end{cases}$$

Wird hier $q = r = s = \ldots = 1$ und $\alpha = \frac{n-1}{n}$ gesetzt, so sind die Wahrscheinlichkeiten $a, b, c, \ldots$, welche den einzelnen Theilnehmern der Reihe nach zugehören, um gleiche Erwartungswerthe zu erlangen:

$$\frac{1}{n}, \quad \frac{1}{n-1}, \quad \frac{1}{n-2}, \quad \ldots \quad \tfrac{1}{3}, \quad \tfrac{1}{2}, \quad 1.$$

Dieses Ergebnifs führt auf die Voraussetzungen, von welchen wir in (§. 36.) ausgingen und bestätigt die Richtigkeit der in beiden Paragraphen gefundenen Resultate. Eine diesen Gegenstand näher untersuchende Abhandlung findet sich im 2ten Bande der Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der Königlich-Bairischen Akademie. München 1837.

§. 38.

Das Vertheilen der Gewinne durchs Loos setzt Beiträge der Theilnehmer voraus, aus welchen die Gewinne genommen werden. Die Beiträge, durch welche man das Recht der Theilnahme an der Verloosung erlangt, sind nach der Natur des besondern Falles entweder gleich, oder verschieden: letzteres wenn sie ein Act der Willkür sind; wie bei vielen Spielen. Die Beiträge heifsen *Einlage,* oder auch *Einsatz.*

Die Einlage kann von den Theilnehmern vor der Verloosung erhoben werden, wie bei Lotterien aller Art, bei manchen Glücksspielen u. s. w., oder sie kann auch auf gegenseitige Verabredung bestimmt und erst nach der Entscheidung erhoben werden. Im ersten Falle tritt ein Staat, eine Gesellschaft, oder eine einzelne Person, unter Gewährleistung, den Theilnehmern gegenüber; im zweiten Falle vereinigen sich zwei oder mehrere Personen, unter gegenseitiger Verpflichtung, im Falle des Verlierens die bedungene Summe auszuzahlen; wie bei Wetten, bei Unterhaltungs- und Gesellschaftsspielen u. s. w.

In allen diesen Fällen mufs der Werth der Einlage auf einer richtigen Grundlage beruhen. Dies wird dann der Fall sein, wenn der einzelne Theilnehmer durchschnittlich so viel Gewinn zu hoffen hat, als er beiträgt.

Daraus ergiebt sich folgender hierher gehörige Grundsatz:

1. Die Einlage mufs dem Werthe der Erwartung gleich sein; und umgekehrt.

Bezeichnen wir die Gröfse der Einlage durch B, so läfst sich der Satz durch

$$2. \quad B = E$$

ausdrücken. Wird damit der Satz (2. §. 35.) verbunden, so erhält man

$$3.\quad B = wG = \frac{mG}{q};$$

wo m die Zahl der günstigen und q die aller möglichen Fälle bezeichnet.

Der Werth der Einlage hangt also von dem zu erlangenden Gewinn und der Wahrscheinlichkeit ihn zu treffen ab. Wenden wir jetzt den Satz (3.) auf verschiedene Fälle an, so ergiebt sich die Vergleichung

$$4.\quad B_1 : B_2 = w_1 G_1 : w_2 G_2.$$

Die Einlagen zweier Personen stehen demnach zu einander in zusammengesetztem Verhältnisse der zu erwartenden Gewinne und der Wahrscheinlichkeiten, sie zu erlangen. Haben die Wahrscheinlichkeiten w_1 und w_2 gleiche Nenner, so fallen dieselben aus der Vergleichung weg. Bezeichnet man die Zähler durch m_1 und m_2, so geht (4.) in

$$5.\quad B_1 : B_2 = m_1 G_1 : m_2 G_2 \text{ über}$$

Diese Sätze lassen sich leicht ins Allgemeine ausdehnen, und es ist

$$6.\quad B_1 : B_2 : B_3 : \ldots B_n = w_1 G_1 : w_2 G_2 : w_3 G_3 \ldots . w_n G_n$$
$$= m_1 G_1 : m_2 G_2 : m_3 G_3 \ldots . m_n G_n,$$

$$7.\quad B_k : B_1 + B_2 + B_3 \ldots . B_{k-1} + B_{k+1} \ldots . B_n$$
$$= w_k G_k : w_1 G_1 + w_2 G_2 + \ldots . w_{k-1} G_{k-1} + w_{k+1} G_{k+1} \ldots . w_n G_n$$
$$= m_k G_k : m_1 G_1 + m_2 G_2 + \ldots . m_{k-1} G_{k-1} + m_{k+1} G_{k+1} \ldots . m_n G_n,$$

$$8.\quad B_k : \Sigma_{n=1}^{n=n} B_n = w_k G_k : \Sigma_{n=1}^{n=n} w_n G_n = m_k G_k : \Sigma_{n=1}^{n=n} m_n G_n.$$

Vereinigen sich zwei Personen zum Spiele, so verlangt die Billigkeit, daſs der Werth ihrer Erwartung vor dem Beginne des Spiels gleich sei. Hieraus ergiebt sich leicht der Satz (2. §. 35.), nemlich

$$9.\quad w_1 G_1 = w_2 G_2.$$

Dieser Satz läſst sich leicht weiter ausdehnen und es ist

$$10.\quad w_1 G_1 = w_2 G_2 = w_3 G_3 = \ldots . w_n G_n.$$

Der Satz (9.) gilt auch noch, wenn eine von beiden Personen als Repressentant von mehreren Theilnehmern betrachtet wird. Die Betrachtungs-Art wird dadurch nicht geändert. Es ist aus (9.)

$$11.\quad w_1 G_1 = (w_2 + w_3 + w_4 + \ldots . + w_n) G_2.$$

Aus (10.) folgt

$$12.\quad G_k : G_h = w_h : w_k = m_h : m_k,$$

wenn die Wahrscheinlichkeiten w_h und w_k gleiche Nenner haben und m_h und m_k deren Zähler bezeichnen. Ist in der Gleichung (8.) $B_1 = B_2 = B_3 \ldots . = B_n$,

so geht sie in folgende über:

$$13.\quad 1:n = w_k G_k : \Sigma_{n=1}^{n=m} w_n G_n = m_k G_k : \Sigma_{n=1}^{n=m} m_n G_n.$$

Es giebt Fälle, auf welche der Satz (12.) keine Anwendung findet; namentlich, wo eine bestimmte Reihenfolge eingehalten wird, mit welcher ein bestimmter Vortheil verbunden ist. Da aber dieser Vortheil der Reihe nach an Jeden kommt, so gleicht er sich wieder aus, und es bleibt den einzelnen Personen überlassen, ob sie unter solchen Verhältnissen in eine derartige Verbindung treten wollen. Bei Spielen mit Spielhaltern (Banquiers) ist dies auch der Fall. Es kann dies die Richtigkeit obiger Sätze nicht entkräften.

Aus der Gleichung (3.) ergiebt sich leicht

$$14.\quad G = \frac{B}{w} = \frac{q.B}{m}.$$

Diese Gleichung zeigt, wie aus der Einlage und der Wahrscheinlichkeit zu gewinnen die Gröfse des zu erlangenden Gewinnes abgeleitet werden kann. Statt der Wahrscheinlichkeit kann auch das Verhältnifs zwischen der Zahl der günstigen Fälle und der aller möglichen Fälle gegeben sein. Ferner ergiebt sich hieraus

$$15.\quad B:G = m:q = w:1.$$

Die Einlage verhält sich also zum Gewinne, wie die Zahl der günstigen Fälle zur Zahl der möglichen, oder wie die zugehörige Wahrscheinlichkeit zur Einheit.

Spielen zwei Personen, deren eine vor dem Beginn des Spieles eine Einlage macht, die andere nach der Entscheidung den Gewinn auszuzahlen hat, so wird die Gröfse der auszuzahlenden Summe durch (14. oder 15.) bestimmt.

Aus (3.) ergiebt sich endlich auch die Gleichung

$$16.\quad w = \frac{B}{G}.$$

Sie zeigt, wie aus der Einlage und dem zu erwartenden Gewinne die zugehörige Wahrscheinlichkeit gefunden wird.

§. 39.

Sind die Einlagen gemacht und erfolgt nun die Vertheilung der Gewinne durch das Loos, so wird dem Gewinner die ihm gehörige Summe zugestellt. In dieser Summe ist die Einlage mitbegriffen Zieht man die Einlage von der erhaltenen oder zu erlangenden Summe ab, so erhält man eine Gröfse, die wir „reinen Gewinn" nennen und durch R bezeichnen wollen. Dies giebt die Gleichung

$$1.\quad R = G - B.$$

Ist R eine positive Gröfse, so gilt die Gleichung in der vorstehenden Form und bezeichnet einen Vortheil. Wird aber der Werth von R negativ, so ist

$$2. \quad R = B - G,$$

welches auf Nachtheil deutet. Wird $R = 0$, so ist

$$3. \quad 0 = G - B \quad \text{oder} \quad G = B.$$

Es findet dann weder Vortheil noch Nachtheil Statt. Führen wir aus (3. §. 38.) den Werth für B in (1.) ein, so erhalten wir die Gleichung

$$4. \quad R = G - wG = (1-w)G.$$

Da nun $1-w$ die dem Eintreffen eines Ereignisses entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit (5. §. 3.) bedeutet, so ergiebt sich, wenn wir dieselbe durch w_1 bezeichnen, aus (4.):

$$5. \quad R = w_1 G.$$

Die Gröfse des zu erwartenden reinen Gewinnes wird demnach durch das Product aus dem Gesammtgewinne G in die dem Eintreffen des bezüglichen Ereignisses entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit bestimmt.

Zerlegen wir nun die dem Eintreffen eines Ereignisses entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit in ihre Bestandtheile und nennen die Zahl der ungünstigen Fälle n, die Zahl aller möglichen Fälle, wie in (3. §. 38.), q, so geht (5.) in

$$6. \quad R = \frac{n}{q} \cdot G$$

oder in

$$7. \quad R:G = n:q = w_1:1 \text{ über.}$$

Der reine Gewinn verhält sich also zum Gesammtgewinne, wie die Zahl der dem Eintreffen des Ereignisses ungünstigen Fälle zu der Zahl aller möglichen Fälle, oder wie die dem Eintreffen ungünstige Wahrscheinlichkeit zur Einheit.

Aus (5. und 6.) ergiebt sich folgende Zusammenstellung:

$$8. \quad R_1:R_2 = w_2 G_1 : w_1 G_2 = n G_1 : m G_2.$$

Wird der Werth von G aus (14. §. 38.) in (1.) gesetzt, so erhält man

$$9. \quad R = \frac{B}{w} - B = \frac{1-w}{w} B = \frac{w_1}{w} B = \frac{n}{m} B.$$

Hier bezeichnet w die günstige und w_1 die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, m die Anzahl der günstigen, n die der ungünstigen Fälle. Es folgt daraus

$$10. \quad R:B = w_1:w = n:m.$$

Die Ausdrücke (9. und 10.) zeigen den Zusammenhang zwischen der Einlage und dem reinen Gewinn, der günstigen und der ungünstigen Wahrscheinlichkeit. Nach (10.) verhält sich der reine Gewinn zur Einlage, wie die ungünstige zur günstigen Wahrscheinlichkeit, oder wie die Zahl der günstigen zu der

der ungünstigen Fälle. Aus (5. und 6.) ergiebt sich

$$11. \quad G = \frac{R}{w_1} = \frac{q}{n} . R.$$

Aus (10.) ergiebt sich

$$12. \quad B = \frac{w . R}{w_1} = \frac{m . R}{n}.$$

Hieraus läſst sich die Gröſse der Einlage für einen bestimmten reinen Gewinn ableiten.

Wenn zwei Personen A_1, A_2 mit den beziehlichen Wahrscheinlichkeiten w_1 und w_2, die sich zur Einheit ergänzen, keine Einlage machen, sondern sich gegenseitig verpflichten, den reinen Gewinn einander nach der Entscheidung auszuzahlen, so ergiebt sich leicht der Satz, daſs die zu erwartenden reinen Gewinne umgekehrt sich verhalten wie die Wahrscheinlichkeiten, die Gewinne zu erlangen, oder umgekehrt wie die Zahl der entsprechenden günstigen Fälle; denn es ist billig, daſs eine desto gröſsere Summe an den Gegner entrichtet werde, je kleiner die Zahl der dem Gegner günstigen Fälle ist, und daſs umgekehrt der Gegner eine um so geringere Summe zahle, je häufiger die Gelegenheit zu verlieren vorkommt. Bezeichnet man die reinen Gewinne durch R_1, R_2 und die Zahl der günstigen Fälle durch m_1, m_2, so ergiebt sich

$$13. \quad R_1 : R_2 = w_2 : w_1 = m_2 : m_1.$$

Dieser Satz fällt mit dem in (10.) zusammen, wenn man letztern auf den vorliegenden speciellen Fall anwendet. Es wird die Einlage, welche A_1 zu zahlen hat, zum reinen Gewinn für A_2; und umgekehrt. Dies rechtfertigt zugleich die Schlüsse oben in (18.).

Bei Lotterien, Spielen u. dergl. wird gegen eine bestimmte Einlage B im glücklichen Falle ein bestimmter Gewinn S ausgezahlt. Die Gröſse dieses Gewinnes ist in (14. §. 38.) angegeben. Vergleicht man diesen Gewinn mit der ausgezahlten Summe, so ergiebt sich

$$14. \quad V = \frac{B}{w} - S.$$

Ist $\frac{B}{w}$ gröſser als S, so ergiebt sich ein Abzug für den Gewinner oder ein Vortheil für den Unternehmer der Lotterie oder den Spielhalter, folglich ein Nachtheil für den Gewinner. Ist S gröſser als $\frac{B}{w}$, so ist der Gewinner im Vortheil. Ist $\frac{B}{w}$ gröſser als S, so läſst sich aus (14.) die Gröſse des Vortheils P für den Unternehmer bestimmen. Zu dem Ende ist die Gleichung (14.)

durch (14. §. 38.) zu dividiren. Demnach ist

$$15.\quad P = 1 - \frac{w.S}{B} = 1 - \frac{m.S}{q.B}.$$

Hier ist die Gröfse des Vortheils als Theil der Einheit angegeben. Führt man sie auf 100 zurück, so erhält man sie in *Procenten* ausgedrückt. Es ist

$$16.\quad P = 100\left(1 - \frac{w.S}{B}\right).$$

Einfacher werden diese Bestimmungen, wenn man die Einlage B auch als Einheit annimmt. Dann geht (15. und 16.) über in

$$17.\quad P = 1 - wS \text{ und}$$

$$18.\quad P = 100(1 - wS).$$

Der muthmafsliche Vortheil, der auf Jemandes Seite fällt, kann auf folgende Weise bestimmt werden. Die Einlage sei, wie bisher, B; die für das Gewinnen bestimmte Summe sei tB; die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen sei w. Nach (2. §. 35.) ist der Werth der Erwartung oder der muthmafsliche Gewinn wtB. Der hieraus erwachsende Vortheil ist

$$19.\quad V = wtB - B.$$

In diesem Falle mufs wtB gröfser als B, oder wt gröfser als die Einheit sein. Ein Nachtheil entsteht, wenn

$$20.\quad N = B - wtB$$

eine positive Gröfse, oder wenn die Einlage gröfser ist als wtB oder als der Werth des muthmafslichen Gewinnes. Weder Nachtheil noch Vortheil findet Statt, wenn

$$21.\quad 0 = B - wtB \text{ ist.}$$

Der Vortheil zwischen zwei Personen A_1 und A_2 kann auch durch die Gröfse des reinen Gewinnes bestimmt werden. Beträgt der reine Gewinn von A_1 das $k_1$fache der Einlage B und der von A_2 das $k_2$fache derselben Einlage, und sind die Wahrscheinlichkeiten, diese Gewinne zu erlangen, w_1 und w_2, so ist der muthmafsliche Gewinn von $A_1 = w_1 k_1 B$, der von $A_2 = w_2 k_2 B$ und es findet auf keiner Seite Vortheil Statt, wenn

$$22.\quad w_1 k_1 B - w_2 k_2 B = 0$$

ist. Der Vortheil für A_1 wird durch

$$23.\quad V_1 = w_1 k_1 B - w_2 k_2 B,$$

der Vortheil für A_2 durch

$$24.\quad V_2 = w_2 k_2 B - w_1 k_1 B$$

ausgedrückt. Ergeben sich negative Werthe, so geht der Vortheil in Nachtheil über.

Auf gleiche Weise ergeben sich diese Bestimmungen, wenn der Gesammtgewinn zu Grund gelegt wird. Bezeichnet man dieselben durch S_1 und S_2, so ist der Vortheil für A_1:

$$25. \quad V_1 = w_1 S_1 - w_2 S_2,$$

und der Vortheil für A_2:

$$26. \quad V_2 = w_2 S_2 - w_1 S_1.$$

Die Gleichungen (25. und 26.) gelten auch, wenn $S_1 = S_2$, oder wenn $w_1 + w_2 < 1$ ist; wie es bei der relativen Wahrscheinlichkeit vorkommt. Setzt man nämlich $w_1 = \frac{m_1}{q}$ und $w_2 = \frac{m_2}{q}$, so dafs $m_1 + m_2 < q$ ist, so deutet m_1 die Zahl der für A_1 und m_2 die Zahl der für A_2 günstigen Fälle an. Kämen nur $m_1 + m_2$ Fälle, in welchen der Gewinn entschieden wird, in Betracht, so wäre der Werth der Erwartung $= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot S_1$ für A_1 und $= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot S_2$ für A_2. Es kommen aber q Fälle in Betracht, unter welchen nur $m_1 + m_2$ die Entscheidung geben. Man hat daher die Entscheidung von $m_1 + m_2$ auf q Fälle zu übertragen. Der Gewinn wird also in beiden Fällen nur $\frac{m_1 + m_2}{q}$ mal vorkommen. Demnach ist der für A_1 zu erwartende Gewinn

$$P_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{m_1 + m_2}{q} \cdot S = \frac{m_1}{q} \cdot S_1,$$

der Gewinn für A_2 aber

$$P_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{m_1 + m_2}{q} \cdot S = \frac{m_2}{q} \cdot S_2.$$

Also ist der Vortheil für A_1:

$$27. \quad V_1 = \frac{m_1}{q} \cdot S_1 - \frac{m_2}{q} \cdot S_2,$$

und für A_2:

$$28. \quad V_2 = \frac{m_2}{q} \cdot S_2 - \frac{m_1}{q} \cdot S_1.$$

Die Gleichungen (25. und 27., 26. und 28.) stimmen überein.

§. 40.

Die in den beiden vorigen Paragraphen verzeichneten Gleichungen sind vielfacher Anwendungen fähig. Der Verdeutlichung wegen, und um dies zu zeigen, sollen hier einige besondere Fälle erörtert werden.

Zwei Personen A_1 und A_2 spielen mit einander mit drei Würfeln. A_1 übernimmt gegenüber von A_2, jede Nummer, die geworfen werden wird, mit der gehörigen Summe zu besetzen. A_2 darf irgend eine oder mehrere auswählen, die er jede mit einer bestimmten Summe besetzt. Wird eine von A_2 besetzte Nummer geworfen, so gewinnt A_2, und A_1 mufs den darauf geordneten Gewinn zahlen. Wird die von A_2 besetzte Nummer nicht geworfen, so erhält A_1 die von A_2 ausgesetzte Summe. Welches ist die Gröfse des jeder Nummer zugeordneten Gesammtgewinnes oder des reinen Gewinnes?

Die Nummern, welche mit den Würfeln geworfen werden können, sind 3, 4, 5, ... 18. Die Wahrscheinlichkeiten für das Erscheinen dieser Zahlen ergeben sich aus (1. §. 13.). Daraus findet sich die Zahl der Fälle, wie oft diese Nummern geworfen werden können. Nun können die Einlagen auf jede Zahl beliebig gemacht werden. Wir nehmen zwei Fälle an. In dem einen soll die Einlage der Zahl der günstigen Fälle gleich sein, im andern die Einheit als Einlage auf jede Nummer gelten. Bei Bestimmung des Gesammtgewinnes kommt die Gleichung (14. §. 38.), bei der des reinen Gewinnes die Gleichung (9. §. 39.) zur Anwendung. Daraus ergeben sich folgende Tafeln:

1. Nummer	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Zahl der Würfe ...	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1
Gröfse der Einlage	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1
Gewinn sammt Einlage	216	216	216	216	216	216	216	216	216	216	216	216	216	216	216	216
Reiner Gewinn ...	215	213	210	206	201	195	191	189	189	191	195	201	206	206	213	215

2. Nummer	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Zahl der Werthe ..	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1
Gröfse der Einlage	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Gewinn nebst Einlage	216	72	36	$21\frac{3}{5}$	$14\frac{2}{5}$	$10\frac{2}{7}$	$8\frac{16}{25}$	8	8	$8\frac{16}{25}$	$10\frac{2}{7}$	$14\frac{2}{5}$	$21\frac{3}{5}$	36	72	216
Reiner Gewinn ...	215	71	35	$20\frac{3}{5}$	$13\frac{2}{5}$	$9\frac{2}{7}$	$7\frac{16}{25}$	7	7	$7\frac{16}{25}$	$9\frac{2}{7}$	$13\frac{2}{5}$	$20\frac{3}{5}$	35	71	215

Diese Tafeln gelten für zwei Spieler unter den obigen Bedingungen. Dabei kann eine und dieselbe Person mehrere Gegner haben; wie die Spielhalter oder die sogenannten Banken. Jede Person ist mit dem Spielhalter zusammen ein für sich bestehendes Paar. Sollte nun Jemand die Nummern 8, 9, 10, 11, 12, 13 als für sich gewinnend ansprechen, so hätte er als reinen

Gewinn $\frac{35}{78}$ der Einlage zu erwarten; wie sich aus (9. §. 38.) ergiebt. Zu demselben Resultat führt (14. §. 38.).

Zufolge der beiden obigen Tafeln hat keiner der beiden Gegner einen Vortheil vor dem andern. Dies ist aber bei Banken nicht der Fall, sondern ihre Einrichtung ist gewöhnlich so, dafs ein Vortheil auf die Seite des Unternehmers fällt; und dieser Vortheil ist oft ziemlich bedeutend; wie z. B. bei den Würfeltischen, die man zu Zeiten auf den Märkten oder Messen sieht. Als Erläuterung mag die Einrichtung des Lottospiels dienen.

Nach dem Königl. Baierischen Lottokalender vom Jahre 1839 wird die Einlage dem Gewinner

15	mal für einen unbestimmten	Auszug,
75	- - -	bestimmten Auszug,
270	- - eine unbestimmte	Ambe,
5100	- - -	bestimmte Ambe,
5400	- - -	Terne,
60 000	- - -	Quaterne

ausgezahlt. Die Wahrscheinlichkeiten, einen Auszug, eine Ambe, Terne und Quaterne zu treffen, ergeben sich, wenn in der Gleichung (1. §. 5.) statt p_1, p_2, m_1 und m_2 allmälig ihre Werthe gesetzt werden. Sie sind der Reihe nach $\frac{1}{18}$, $\frac{2}{801}$, $\frac{1}{11748}$, $\frac{1}{511038}$. Die Wahrscheinlichkeit, einen bestimmten Auszug zu treffen, ist $\frac{1}{90}$, die eine bestimmte Ambe zu treffen $\frac{1}{90.89}=\frac{1}{8010}$. Nach (14. §. 38.) sollte die Einlage dem Gewinner

18	mal für einen unbestimmten	Auszug,
90	- - -	bestimmten Auszug,
400½	- - eine unbestimmte	Ambe,
8010	- - -	bestimmte Ambe,
11748	- - -	Terne,
511038	- - -	Quaterne

ausgezahlt werden; statt nach dem obigen Schema. Die Bank des Königl. Baierischen Lottospiels hat also nach (17. §. 39.) folgenden Gewinn:

Von einem unbestimmten Auszug	$1-\frac{15}{18}$	$=$	0,1666....,
- - bestimmten Auszug	$1-\frac{75}{90}$	$=$	0,1666....,
- einer unbestimmten Ambe	$1-\frac{2.270}{801}$	$=$	0,32584....,
- - bestimmten Ambe .	$1-\frac{5100}{8010}$	$=$	0,36329....,
- - Terne	$1-\frac{5400}{11748}$	$=$	0,54034....,
- - Quaterne	$1-\frac{60000}{511038}$	$=$	0,88259....;

wenn die Einlage zur Einheit angenommen wird. Sie hat also von allen Einlagen, auf unbestimmte und bestimmte Auszüge $16\frac{2}{3}$, auf unbestimmte Amben $32\frac{1}{2}$, auf bestimmte 36, auf Ternen 54, auf Quaternen 88 Procent und noch etwas mehr Gewinn.

Nach *Lacroix* Wahrscheinlichkeitsrechnung (§. 66.) wird in der Lotterie von Frankreich der unbestimmte Auszug mit der 15fachen, der bestimmte mit der 70fachen, die unbestimmte Ambe mit der 270fachen, die bestimmte mit der 5100fachen, die Terne mit der 5500fachen, die Quaterne mit der 75000fachen, die Quinterne mit der 1 000 000fachen Einlage bezahlt. Daraus ergeben sich folgende Abzüge:

Von dem	unbestimmten Auszug	$1-$	$\frac{15}{18}$	$=0{,}1666\ldots.,$
-	- bestimmten Auszug	$1-$	$\frac{70}{90}$	$=0{,}2222\ldots.,$
- der	unbestimmten Ambe	$1-$	$\frac{2.270}{801}$	$=0{,}32548\ldots.,$
-	- bestimmten Ambe .	$1-$	$\frac{5100}{8010}$	$=0{,}36329\ldots.,$
-	- Terne	$1-$	$\frac{5500}{11748}$	$=0{,}53183\ldots.,$
-	- Quaterne	$1-$	$\frac{75000}{511038}$	$=0{,}85324\ldots.,$
-	- Quinterne	$1-$	$\frac{1000000}{43949268}$	$=0{,}97724\ldots.$

Mehreres hierüber wird später folgen.

§. 41.

Bisher wurde die Beziehung zwischen Einlage und Gewinn betrachtet. Wir wenden uns nun zur Untersuchung des Verhältnisses des Werths der Erwartung zu der Art, die zu wagende Summe auszusetzen.

A will die Summe rB wagen. Die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen ist w, die zu verlieren $w_1 = 1 - w$. So oft A gewinnt, bekommt er die $q$fache Einlage als reinen Gewinn. Soll A die Summe rB in einem Versuche, soll er sie in r hintereinander folgenden, oder in gleichzeitigen Versuchen wagen, so dafs in jedem einzelnen Versuche die Summe B eingesetzt wird?

a. A wagt die Summe rB in *einem* Versuche. Gewinnt er, so erhält er die Summe $q.rB$. Der Werth seiner Erwartung ist nach (2. §. 35.)

$$1. \quad E = w.qrB.$$

b. Die genannte Summe wird auf r Versuche vertheilt und bei jedem B gesetzt. Es können folgende Fälle vorkommen: A gewinnt in allen Versuchen, oder in $r-1$, $r-2$, ... 2, oder in 1 Versuche: der Werth der Erwartung ist für die einzelnen Fälle zu bestimmen und die Resultate sind zusammenzuzählen.

Die Wahrscheinlichkeit, in *allen* Versuchen zu gewinnen, ist w^r. In diesem Falle gewinnt er rqB. Der Werth der Erwartung ist also

$$E_r = w^r r q B.$$

Die Wahrscheinlichkeit, in $r-1$ Versuchen zu gewinnen, setzt voraus, dafs A einmal verliere. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $r.w^{r-1}w_1$. In diesem Falle wird er $(r-1)qB$ gewinnen. Der Werth der Erwartung ist demnach

$$E_{r-1} = r w^{r-1} w_1 (r-1) q B.$$

Die Wahrscheinlichkeit, in $r-2$ Versuchen zu gewinnen, läfst zu, dafs das entgegengesetzte Ereignifs zweimal eintrete. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $\frac{r(r-1)}{1.2} w^{r-2} w_1^2$. In diesem Falle gewinnt A, $(r-2)qB$. Der Werth der Erwartung ist also

$$E_{r-2} = \frac{r(r-1)}{1.2} \cdot w^{r-2} w_1^2 (r-2) q B.$$

Werden diese Schlüsse fortgesetzt, so ergiebt sich für den Gesammtwerth der Erwartung:

$$E = r w^r q B + r \cdot \frac{(r-1)}{1} \cdot w^{r-1} w_1 q B + r \cdot \frac{(r-1)(r-2)}{1.2} \cdot w^{r-2} w_1^2 q B$$

$$+ r \cdot \frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{1.2.3} \cdot w^{r-3} w_1^3 q B + \ldots$$

$$\ldots + r \cdot \frac{(r-1)^{r-2|-1}}{1^{r-2|1}} \cdot w w_1^{r-2} q B + r \cdot \frac{(r-1)^{r-1|-1}}{1^{r-1|1}} \cdot w w_1^{r-2} q B$$

$$= r q B . w \Big[w^{r-1} + \frac{r-1}{1} \cdot w^{r-2} w_1 + \frac{(r-1)^2}{1^{2|1}} \cdot w^{r-3} w_1^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(r-1)^{r-2|-1}}{1^{r-1|1}} \cdot w w_1^{r-2} + \frac{(r-1)^{r-1|-1}}{1^{r-1|1}} \cdot w_1^{r-1} \Big].$$

Da die eingeklammerte Reihe mit dem Binomium $(w+w_1)^{r-1} = 1$ zusammenfällt, so geht der vorliegende Ausdruck in folgenden über:

$$2. \quad E = w r q B.$$

Das Gleiche ergiebt sich, wenn die Versuche gleichzeitig gemacht werden. Die Vergleichung von (1. und 2.) giebt daher, in Verbindung mit der eben ausgesprochenen Bemerkung, folgenden Satz.

3. Der Werth der Erwartung oder objectiven Hoffnung bleibt derselbe, man mag eine Summe in *einem* Versuche wagen, oder auf *mehrere* gleiche vertheilen, wenn die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen in den einzelnen Versuchen gleich bleibt.

Hierher gehört auch die Untersuchung des folgenden Problems.

In einer Urne sind m Kugeln enthalten, mit den Zahlen $1, 2, 3, \ldots . m$ bezeichnet. Es werden p Kugeln nach einander gezogen und nach der Ziehung zusammen in die Urne zurückgelegt. Jede Zahl kann mit einer gewissen Summe besetzt werden. Erscheint die besetzte Zahl unter den gezogenen Kugeln, so wird die eingesetzte Summe $q$mal als reiner Gewinn bezahlt. A will die Summe rB wagen. Soll er sie auf *eine* Zahl setzen, oder auf *mehrere* Zahlen derselben Ziehung vertheilen, so dafs jede Zahl mit B besetzt wird?

Auch hier sind die beiden oben angeführten Fälle zu untersuchen.

a. A setzt die Summe rB auf *eine* Zahl. Er erhält im günstigen Falle qrB. Die Wahrscheinlichkeit, dafs die besetzte Zahl unter p gezogenen erscheinen werde, ist nach (1. §. 5.) $\frac{p(m-1)^{p-1|-1}}{m^{p|-1}} = \frac{p}{m}$. Demnach ist der Werth der Erwartung

$$4. \quad E = \frac{p}{m} \cdot rqB.$$

b. Die Summe B wird auf r Zahlen vertheilt. Es können daher r, oder $r-1$, oder $r-2, \ldots .$, oder 2, oder 1 von den besetzten Zahlen erscheinen. Die Gewinne, welche in diesem Fall erlangt werden, sind rqB, $(r-1)qB$, $(r-2)qB$, ... $2qB$, qB. Die Wahrscheinlichkeiten, dafs r, $r-1$, $r-2$, $r-3$, ... 3, 2, 1 von den besetzten Zahlen erscheinen werden, ergeben sich aus (1. §. 5.) und sind der Reihe nach

$$\frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}} \cdot \frac{r^{r|-1}(m-r)^{p-r|-1}}{m^{p|-1}}, \qquad \frac{p^{r-1|-1}}{1^{r-1|1}} \cdot \frac{r^{r-1|-1}(m-r)^{p-r+1|-1}}{m^{p|-1}},$$

$$\frac{p^{r-2|-1}}{1^{r-2|1}} \cdot \frac{r^{r-2|-1}(m-r)^{p-r+2|-1}}{m^{p|-1}}, \ldots . \quad \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot \frac{r^{2|-1}(m-r)^{p-2|-1}}{m^{p|-1}} + \frac{p}{1} \cdot \frac{r(m-r)^{p-1|-1}}{m^{p|-1}}.$$

Werden diese Werthe mit den zugehörigen Gewinnen verbunden, so ergiebt sich folgender Ausdruck des Werths der Erwartung:

$$E = \frac{rp^{r|-1}(m-r)^{p-r|-1}}{m^{p|-1}} \cdot qB + r \cdot \frac{r-1}{1} \cdot \frac{p^{r-1|-1}(m-r)^{p-r+1|-1}}{m^{p|-1}} \cdot qB$$

$$+ r \cdot \frac{(r-1)(r-2)}{1.2} \cdot \frac{p^{r-2|-1}(m-r)^{p-r+2|-1}}{m^{p|-1}} \cdot qB + \ldots .$$

$$\ldots . + r \cdot \frac{(r-1)^{r-2|-1}}{1^{r-2|1}} \cdot \frac{p^{2|-1}(m-r)^{p-2|-1}}{m^{p|-1}} \cdot qB + r \cdot \frac{(r-1)^{r-1|-1}}{1^{r-1|1}} \cdot \frac{p(m-r)^{p-1|-1}}{m^{p|-1}} \cdot qB.$$

Werden die jedem Gliede gemeinschaftlichen Gröfsen und ferner die Facultät

$$(m-r)^{p-r|-1} = (m-r)(m-r-1)(m-r-2) \ldots . (m-p+1)$$

ausgestofsen, so geht die Gleichung in folgende über:

$$E=\left[\frac{p(m-r)^{p-r|-1}}{m^{p|-1}}\cdot rqB\left[(p-1)^{r-1|-1}+\frac{r-1}{1}(p-1)^{r-2|-1}(m-p)^{1|-1}\right.\right.$$
$$+\frac{(r-1)^{2|-1}}{1^{2|1}}(p-1)^{r-3|-1}(m-p)^{2|-1}+\ldots.$$
$$\left.\ldots.+\frac{(r-1)^{r-2|-1}}{1^{r-2|1}}(p-1)(m-p)^{r-2|-1}+\frac{(r-1)^{r-1|-1}}{1^{r-1|1}}(m-p)^{r-1|-1}\right].$$

Die in Klammern eingeschlossene Reihe dieses Ausdrucks läfst sich auf folgende Weise behandeln:

5. $(a+b)^{s|-1}=a^{s|-1}+\frac{s}{1}\cdot a^{s-1|-1}b+\frac{s^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot a^{s-2|-1}b^{2|-1}+\ldots.+\frac{s^{-1|-1}}{1^{s-1|1}}\cdot ab^{s-1|-1}+b^{s|-1}$.

Hiedurch erhält man folgende Gleichung:

$$E=\frac{p(m-r)^{p-r|-1}}{m^{p|-1}}\cdot rqB(m-1)^{r-1|-1}=\frac{p(m-1)^{p-1|-1}}{m^{p|-1}}\cdot rqB.$$

Es ist also

$$6.\quad E=\frac{p}{m}\cdot rqB.$$

Aus (4. und 6.) ergiebt sich die Gleichheit der Werthe der Erwartung und es bestätigt sich der Satz in (3.).

Die Resultate (4. und 6.) gelten zunächst nur für den Fall, wenn r kleiner, oder höchstens so grofs als p ist. Sie gelten jedoch auch noch, wenn r gröfser als p wird. In diesem Falle können von den besetzten Zahlen höchstens p, also entweder p, oder $p-1$, oder $p-2$, ... 2, 1 gewinnen. Wird nun für jeden einzelnen Fall auf die vorhin angegebene Weise der Werth der Erwartung bestimmt, so ergiebt sich für den Gesammtwerth der Erwartung:

$$E=\frac{p^{p|-1}}{1^{p|1}}\cdot\frac{r^{p|-1}}{m^{p|-1}}\cdot p.qB+\frac{p^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}\cdot\frac{r^{p-1|-1}(m-r)}{m^{p|-1}}(p-1)qB$$
$$+\frac{p^{p-2|-1}}{1^{p-2|1}}\cdot\frac{r^{p-2|-1}(m-r)^{2|-1}}{m^{p|-1}}(p-2)qB+\ldots.$$
$$\ldots.+\frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{r^{2|-1}(m-r)^{p-2|-1}}{m^{p|-1}}\cdot 2qB+p\cdot\frac{r(m-r)^{p-1|-1}}{m^{p|-1}}\cdot qB.$$

Werden die gleichen Factoren ausgeschieden, so erhält man

$$E=\frac{p.rqB}{m^{p|-1}}\left[(r-1)^{p-1|-1}+\frac{p-1}{1}(r-1)^{p-2|-1}(m-r)\right.$$
$$+\frac{(p-1)^{2|-1}}{1^{2|1}}(r-1)^{p-3|-1}(m-r)^{2|-1}+\ldots.$$
$$\left.\ldots.+\frac{(p-1)^{p-2|-1}}{1^{p-2|1}}(r-1)(m-r)^{p-2|-1}+(m-r)^{p-1|-1}\right].$$

Wird hier die eingeschlossene Reihe nach (5.) behandelt, so ergiebt sich

$$7. \quad E = \frac{p}{m} \cdot rqB.$$

Nach (4. 6. und 7.) findet also für die Rechnung kein Unterschied Statt. Dies scheint eine Art von Paradoxon zu sein. Ist namentlich r gröfser als p, oder die Zahl der einfachen Einlagen gröfser als die Zahl der Kugeln, welche in einer Ziehung gezogen werden, so können höchstens p Kugeln gewinnen und dann kann A im glücklichsten Fall nur $p.qB$ erhalten, während er im glücklichen Falle eine viel gröfsere Summe $r.qB$ erlangen kann, wenn er die Summe rB auf eine einzige Zahl setzt. Dieser Widerspruch hebt sich aber dadurch, dafs der Werth der Erwartung den mittlern oder Durchschnittswerth für alle möglichen Gewinne giebt, und dafs dieser Werth einer bestimmten Summe gleichkommen kann, ohne dafs die einzelnen Gewinne, durch welche er bedingt ist, zu einer solchen Höhe anwachsen, als es in einem andern Falle vorkommen kann.

Der Satz (3.) ist bekannt, und schon von *Lacroix* in seiner Wahrscheinlichkeitsrechnung (§. 75.) bewiesen. Die Sätze (4. 6. und 7.) sind, wie man sieht, eine Erweiterung jenes Satzes, und hier aufgestellt, weil sie nicht bekannt zu sein scheinen. *Gauthier d'Hauteserve* hat in seinem „Traité sur les probab. Probl. XVII. pg. 77" starke Verstöfse dagegen gemacht, die er vermieden hätte, wenn er auf den dort erörterten Fall aufmerksamer gewesen wäre. Der Werth der Erwartung in Beziehung auf den reinen Gewinn ist für Jemand, der drei Franken in das Lottospiel setzen will, nach (§. 35. und 40.) immer 2,333... Fr., er mag sie auf *eine* Nummer, oder auf *drei* Nummern derselben Ziehung, oder auf Nummern aus drei verschiedenen Ziehungen setzen; nicht aber, wie *G. d'H.* meint, im ersten Falle 2,333... Fr., im zweiten 2,5464... Fr., im dritten gar 2,6001 Fr. Aufserdem scheint in der von *G. d'H.* angegebenen Zahl 2,5464... ein Druck- oder Rechnungsfehler zu sein.

§. 42.

Zwei Personen A_1 und A_2, von welchen die erste r, die zweite s Marken hat und deren Hoffnung zu gewinnen $\frac{a}{a+b} = w_1$ und $\frac{b}{a+b} = w_2$ ist, spielen mit einander. Der Verlierende giebt dem Gewinnenden eine Marke ab. Das Spiel dauert so lange, bis eine von beiden Personen alle Marken gewonnen hat. Wie grofs ist der Werth der Erwartung für A und für B vor dem Anfange des Spiels?

Der Werth der Erwartung des A_1 soll durch A ausgedrückt werden, und zwar so, dafs unten rechts an A die Zahl der Marken angeschrieben wird, die er besitzt. So oft nun ein weiteres Spiel beginnt, kann A_1 in demselben eine Marke gewinnen, oder verlieren. Im ersten Falle bekommt er eine mehr, im zweiten verliert er eine. Demnach ist die Erwartung für A_1, wenn er k Marken besitzt, für das nächste Spiel:

$$1. \quad A_k = w_1 A_{k+1} + w_2 A_{k-1} = \frac{a}{a+b} A_{k+1} + \frac{a}{a+b} A_{k-1}.$$

Wäre der Werth für A_{k+1} und A_{k-1} bestimmt, so wäre auch A_k gegeben. Um diesen Werth zu finden, ist zu bemerken, dafs für A alle Wechselfälle im Besitze der Marken von 1 bis $r+s-1$ möglich sind. Der Spieler kann im Laufe des Spiels alle möglichen Zahlen von Marken zwischen 1 und $r+s-1$ besitzen, verlieren und wiedergewinnen, wenn er nur nicht die letzte verloren hat. Für jeden Besitzstand gilt daher die obige Gleichung. Um den Werth von A_k zu finden, dient die Zurückführung auf einfache Fälle. Zu dem Ende müssen in die Gleichung (1.) allmälig die Werthe $1, 2, 3, \ldots\ldots r+s-1$ statt k gesetzt werden. Dies giebt folgendes Schema:

$$2. \quad \left\{ \begin{array}{rcl} A_1 &=& w_1 A_2 + w_2 A_0, \\ A_2 &=& w_1 A_3 + w_2 A_1, \\ A_3 &=& w_1 A_4 + w_2 A_2, \\ \ldots & & \ldots\ldots \\ A_p &=& w_1 A_{p+1} + w_2 A_{p-1}, \\ A_{p+1} &=& w_1 A_{p+2} + w_2 A_p, \\ \ldots & & \ldots\ldots \\ A_{p+r-2} &=& w_1 A_{p+r-1} + w_2 A_{p+r-3}, \\ A_{p+r-1} &=& w_1 A_{p+r} \;\; + w_2 A_{p+r-2}. \end{array} \right.$$

Das Schema ist *zurücklaufend.* Es müssen daher die Werthe der frühern A in den spätern substituirt werden. Nun ist leicht zu sehen, dafs $A_0 = 0$ ist; denn für den Fall, wo A_1 die letzte Marke verliert, ist der Werth seiner Erwartung 0. Wird nun der Werth für A_1 aus der ersten Gleichung in (2.) eingeführt, so ergiebt sich:

$$A_2 = \frac{w_1}{1 - w_1 w_2} A_3.$$

Diesen Werth in die dritte Gleichung gesetzt, giebt

$$A_3 = \frac{w_1 (1 - w_1 w_2)}{1 - 2 w_1 w_2} A_4.$$

Durch Fortsetzung dieser Rechnung erhält man

$$A_4 = \frac{w_1(1-2w_1w_2)}{1-3w_1w_2+(w_1w_2)^2}\cdot A_5,$$

$$A_5 = \frac{w_1(1-3w_1w_2+(w_1w_2)^2)}{1-4w_1w_2+3(w_1w_2)^2}\cdot A_6,$$

$$A_6 = \frac{w_1(1-4w_1w_2+3(w_1w_2)^2)}{1-5w_1w_2+6(w_1w_2)^2-(w_1w_2)^3}\cdot A_7,$$

$$A_7 = \frac{w_1(1-5w_1w_2+6(w_1w_2)^2-(w_1w_2)^3)}{1-6w_1w_2+10(w_1w_2)^2+4(w_1w_2)^3}\cdot A_8,$$

u. s. w. Das Fortschreitungsgesetz ist deutlich. Es wird durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$3.\quad A_k = \frac{w_1\left(1-\frac{k-2}{1}w_1w_2+\frac{(k-3)^{2|-1}}{1^{2|1}}(w_1w_2)^2-\frac{(k-4)^{3|-1}}{1^{3|1}}(w_1w_2)^3+\dots\right)}{1-\frac{k-1}{1}w_1w_2+\frac{(k-2)^{2|-1}}{1^{2|1}}(w_1w_2)^2-\frac{(k-3)^{3|-1}}{1^{3|1}}(w_1w_2)^3+\dots}\cdot A_{k+1}.$$

Dieses Gesetz giebt den Werth der Erwartung für A_1, wenn er k Marken besitzt, in Beziehung auf das nächste Spiel. Es läfst sich weiter benutzen, um den Werth der Erwartung von A_1 für spätere Spiele darzustellen. Setzt man nämlich $k+1$ statt k in (3.) und führt den dadurch erhaltenen Werth statt A_{k+1} in (3.) ein, so ergiebt sich

$$4.\quad A_k = \frac{w_1^2\left(1-\frac{k-2}{1}w_1w_2+\frac{(k-3)^{2|-1}}{1^{2|-1}}(w_1w_2)^2-\frac{(k-4)^{3|-1}}{1^{3|-1}}(w_1w_2)^3+\dots\right)}{1-\frac{k}{1}w_1w_2+\frac{(k-1)^{2|-1}}{1^{2|1}}(w_1w_2)^2-\frac{(k-2)^{3|-1}}{1^{3|1}}(w_1w_2)^3+\dots}\cdot A_{k+2}.$$

Setzt man $k+2$ statt k in (3.) und führt den erhaltenen Werth statt A_{k+2} in (4.) ein, so geht (4.) über in

$$5.\quad A_k = \frac{w_1^3\left(1-\frac{k-2}{1}w_1w_2+\frac{(k-3)^{2|-1}}{1^{2|1}}(w_1w_2)^2-\frac{(k-4)^{3|-1}}{1^{3|1}}(w_1w_2)^3+\dots\right)}{1-\frac{k+1}{1}w_1w_2+\frac{k^{2|-1}}{1^{2|1}}(w_1w_2)^2-\frac{(k-1)^{3|-1}}{1^{3|1}}(w_1w_2)^3+\dots}\cdot A_{k+3}.$$

Fährt man auf diese Weise fort, so ergiebt sich allgemein für den Werth der Erwartung von A_1, m Marken zu gewinnen wenn er k Marken hat:

$$6.\quad A_k = \frac{w_1^m\left(1-\frac{k-2}{1}w_1w_2+\frac{(k-3)^{2|-1}}{1^{2|1}}(w_1w_2)^2-\frac{(k-4)^{3|-1}}{1^{3|1}}(w_1w_2)^3+\dots\right)}{1-\frac{k+m-2}{1}w_1w_2+\frac{(k+m-3)^{2|-1}}{1^{2|1}}(w_1w_2)^2-\frac{(k+m-4)^{3|-1}}{1^{3|1}}(w_1w_2)^3+\dots}\cdot A_{k+m}.$$

Diese Gleichung bestimmt den Werth der Erwartung für A_1 allgemein; also auch in der oben angegebenen Weise. Man hat zu dem Ende r statt k und s

statt m zu setzen. Sie bestimmt auch den Werth der Erwartung für A_2, der s Marken hat, r Marken zu gewinnen, wenn s statt k, r statt m, w_2 statt w_1 und B statt A gesetzt wird. Es ist

$$7.\quad B_s = \frac{w_2^r\left(1-\frac{s-2}{1}w_2 w_1+\frac{(s-3)^{2|-1}}{1^{2|1}}(w_2 w_1)^2-\frac{(s-4)^{3|-1}}{1^{3|1}}(w_2 w_1)^3+\ldots\right)}{1-\frac{s+r-2}{1}w_2 w_1+\frac{(s+r-3)^{2|1}}{1^{2|1}}(w_2 w_1)^2-\frac{(s+r-4)^{3|-1}}{1^{3|1}}(w_2 w_1)^3+\ldots}\cdot B_{r+s}.$$

Die gefundenen Gleichungen geben andere Ausdrücke, wenn man $w_1 = \frac{a}{a+b}$ und $w_2 = \frac{b}{a+b}$ setzt und die nöthigen Reductionen macht. Sie gehen dann in folgende über:

$$A_1 = \frac{a}{a+b}\cdot A_2,$$

$$A_2 = \frac{a(a+b)}{a^2+ab+b^2}\cdot A_3,$$

$$A_3 = \frac{a(a^2+ab^2+b^2)}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}\cdot A_4,$$

$$A_4 = \frac{a(a^3+a^2b+ab^2+b^3)}{a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4}\cdot A_5,$$

. . . .

Hieraus ergiebt sich durch Fortsetzung der Substitutionen:

$$8.\quad A_k = \frac{a(a^{k-1}+a^{k-2}b+a^{k-3}b^2+\ldots ab^{k-2}+b^{k-1})}{a^k+a^{k-1}b+a^{k-2}b^2+\ldots ab^{k-1}+b^k}\cdot A_{k+1}.$$

Nun ist

$$a^m+a^{m-1}b+a^{m-2}b^2+\ldots ab^{m-1}+b^m = \frac{a^{m+1}-b^{m+1}}{a-b}.$$

Also geht (8.) in

$$9.\quad A_k = \frac{a(a^k-b^k)}{a^{k+1}-b^{k+1}}\cdot A_{k+1}$$

über. Setzen wir die Substitutionen fort, wie sie in (4., 5. u. s. w) gemacht wurden, so ergiebt sich

$$A_k = \frac{a^2(a^k-b^k)}{a^{k+2}-b^{k+2}}\cdot A_{k+2},\qquad A_k = \frac{a^3(a^k-b^k)}{a^{k+3}-b^{k+3}}\cdot A_{k+3},$$

u. s. w. Durch weitere Fortsetzung ergiebt sich hieraus für den Spieler A_1, der r Marken besitzt, der Werth der Erwartung, die s Marken seines Gegners zu gewinnen,

$$10.\quad A_r = \frac{a^s(a^r-b^r)}{a^{s+r}-b^{s+r}}\cdot A_{r+s}.$$

Für A_2 aber ist der Werth der Erwartung, r Marken seines Gegners zu erlangen,

$$11. \quad B_s = \frac{b^r(b^s - a^s)}{b^{s+r} - a^{s+r}} \cdot B_{s+r}.$$

Haben beide Gegner die gleiche Anzahl von Marken, so ergiebt sich aus (10. und 11.), da $r = s$ ist:

$$12. \quad A_r = \frac{a^r}{a^r + b^r} \cdot A_{2r},$$

$$13. \quad B_r = \frac{b^r}{a^r + b^r} \cdot B_{2r}.$$

Sind die Wahrscheinlichkeiten für beide Gegner gleich, so ist aus (10. und 11.)

$$14. \quad A_r = \frac{r}{s+r} \cdot A_{r+s},$$

$$15. \quad B_s = \frac{s}{s+r} \cdot B_{r+s}.$$

Am einfachsten ist es, den Werth der Erwartung auf die Einheit zu beziehen, also A_{r+s} und B_{r+s} durch die Einheit darzustellen. Dies giebt aus den Gleichungen (12. und 13., 14. und 15.) folgende Vergleichung für den Werth der Erwartung der beiden Personen:

$$16. \quad A_r : B_r = a^r : b^r,$$

$$17. \quad A_r : B_r = r : s.$$

Hat jede Person 6 Marken, ist aber ihre Geschicklichkeit um $\frac{1}{11}$ verschieden, so verhält sich der Werth der Erwartung beider zu einander nach (16.) wie

$$A_r : B_r = 6^6 : 5^6 = 46656 : 15625$$

oder nahe wie 3:1. Hat jede 6 Marken und ist ihre Geschicklichkeit um $\frac{1}{41}$ verschieden, so ist für den Werth der Erwartung

$$A_r : B_r = 21^6 : 20^6 = 85766121 : 64000000$$

oder nahe wie 134:100. Hat jede 12 Marken, unter den nämlichen Bedingungen, so ist

$$A_r : B_r : 21^{12} : 20^{12},$$

oder beinahe wie 2 zu 1. Man sieht, wie wirksam hier die gröfsere Geschicklichkeit auf den Werth der Erwartung ist. Von den Gleichungen (16. und 17.) lassen sich noch weitere Anwendungen machen. Man kann nämlich leicht die Zahl der Marken bei bestimmtem Werthe der Erwartung und die Wahrscheinlichkeiten, oder auch letztere durch erstere bestimmen.

Die vorstehende Aufgabe ist von *Laplace* (Recueil de l'académie d. sciences d. Paris p. l'année 1778 p. 227 u. ff.) durch die Methode der Gleichun-

gen mit endlichen Differenzen aufgelöset worden. Im 2ten Bande der „Annales d. mathém. pures et appliquées p. *J. D. Gergonne* pg. 340 u. ff." finden sich drei Auflösungen: die eine auf elementare Weise, die andere durch die Methode der recurrirenden Reihen, die dritte durch eine lineare Gleichung zweiter Ordnung mit endlichen Differenzen, nach der Methode, wie sie *Lagrange* in den „Mémoires d. l'acad. d. Berlin p. l'année 1775" gegeben hat. Hiermit ist „*Laplace* Théor. d. probab. pg. 405 u. ff." und „Mémoires des savans étrangers, T. VII. pg. 153" zu vergleichen.

§. 43.

Im Vorhergehenden wurde die Ermittelung des Werths der objectiven Hoffnung und der damit in Beziehung stehende Vortheil oder Nachtheil gezeigt. Wir wollen nun das Verhältnifs dieses Werthes zu dem Besitze eines Individuums erörtern, welches im Begriff steht, sich auf ein Unternehmen einzulassen, dessen Ausgang nicht mit Sicherheit vorauszusehen ist, und wovon Gewinn oder Verlust bestimmter Summen abhangt.

Der Besitz eines Individuums werde durch K, der zu hoffende Gewinn durch G, die Einlage oder der bevorstehende Verlust durch B und die Wahrscheinlichkeit des Gelingens durch w, die des Mifslingens durch $1-w=w_1$ bezeichnet.

Wird die Einlage, wie es gewöhnlich geschieht, vor der Ausführung des Unternehmens gemacht, so ist der hiedurch bedingte Besitz des Individuums noch $K-B$. Die Wahrscheinlichkeit, dafs dieser Fall eintreten werde, ist w, und folglich der muthmaafsliche Werth

$$M_1 = w_1(K-B).$$

Gelingt das Unternehmen, so ist der Besitz $K-B+G$. Die Wahrscheinlichkeit, dafs es geschehen werde, ist w, also der muthmaafsliche Werth

$$M = w(K-B+G).$$

In den einen oder den andern Fall kommt der Unternehmer. Der Werth der Erwartung ist demnach

$$1.\quad E = w_1(K-B)+w(K-B+G) = K-B+wG.$$

Kommt nun wG, wie in (3. §. 38.) vorausgesetzt wurde, der Einlage gleich, so folgt, dafs dann der Besitzstand des Individuums hiedurch nicht verändert wird. Es ergiebt sich also hieraus folgender Satz:

2. Aus dem Werthe der objectiven Hoffnung ist unter den angeführten Bedingungen auf keine Änderung des Besitzstandes eines Individuums zu schliefsen, und er zeigt weder einen Vortheil noch einen Nachtheil an. Erwägt man aber,

dafs in der Regel der zu erwartende Gewinn mit einem Abzuge belastet ist und dafs also $wG < B$ ist, so folgt, dafs jedes Unternehmen, welches unter dieser Voraussetzung begonnen wird, als nachtheilig für den Besitz eines Individuums betrachtet werden mufs und dafs Derjenige, welcher demungeachtet auf ein solches Unternehmen eingeht, seinen Besitzstand gefährdet. Nur wenn wG gröfser als B ist, wird das Unternehmen vortheilhaft sein.

Dieselben Resultate ergeben sich, wenn die Einlage nicht vor, sondern nach der Entscheidung gemacht und wenn dann nur der reine Gewinn verabfolgt wird. Im Falle des Mifslingens ist der Besitzstand nach der Entscheidung $K-B$ und der hierdurch bedingte muthmaafsliche Besitz

$$M_1 = w_1(K-B).$$

Im Fall des Gelingens ist der Besitzstand $K+R$ und der muthmaafsliche Besitz

$$M = w(K+R),$$

folglich der Werth der Erwartung

$$3.\quad E = w_1(K-B)+w(K+R) = K-w_1B+wR.$$

Diese Gleichung deutet auf keine Änderung im Besitzstande, wenn nach (10. §. 39.) $w_1B = wR$ ist, und der in (2.) ausgesprochene Satz bestätigt sich auch hier.

§. 44.

Weiter oben wurden die Grundsätze betrachtet, nach welchen der Werth der Erwartung ohne Rücksicht auf die Verhältnisse der Personen, welche sich auf Gewinn oder Verlust bringende Unternehmungen einlassen, zu bestimmen ist. Dabei wurde hauptsächlich die Forderung gesetzt, dafs keine *Bevortheilung* auf irgend einer Seite Statt finden dürfe. Sind nun auch die Bedingungen, unter welchen Unternehmungen begonnen und ausgeführt werden, im Allgemeinen oder in Rücksicht auf äufsere Umstände gleich, so können sie doch in Beziehung auf subjective Verhältnisse sehr ungleich sein. Die Ausführung eines Unternehmens, bei welchem nicht unbedeutende Summen gewagt werden, kann für eine Person von vielen Mitteln leicht zu bewerkstelligen sein, während sie für beschränkte Mittel unthunlich wird. Der Gegenstand selbst bleibt hiebei ganz unverändert und der Werth der objectiven Hoffnung ist im Falle des Gelingens für die eine wie für die andere Person derselbe. Anders verhält es sich, wenn die subjectiven Verhältnisse einer Person in Betracht gezogen werden. So kann eine Person, die 1000 Gulden besitzt, leichter eine Summe von 10 G. der Gefahr des Verlierens aussetzen, als eine, die nur 100 G. besitzt. Die 10 G. haben eine ganz andere Bedeutung für Jemand

der 100, als für Jemand der 1000 G. besitzt. Eben so hat die Erwerbung der 10 G. eine ganz andere Bedeutung für einen Besitzstand von 100, als für ein Vermögen von 1000 G.

Wir werden hiedurch auf den Begriff von *subjectiver Bedeutung* einer zu wagenden Summe für den Unternehmer geführt. Wir wollen diesem Begriff den Namen „*Subjective Hoffnung*" geben und deren Werth den „*Werth der subjectiven Hoffnung*" nennen.

Daniel Bernoulli, der zuerst hierauf aufmerksam machte, hat diesen Begriff durch *Mensura sortis* bezeichnet, *Laplace* (Théor. anal. d. Probab. Chap. X.) hat ihn *fortune morale, espérance morale* genannt. Besser scheint ihn der obige Name zu bezeichnen.

Um den Werth einer subjectiven Hoffnung zu finden, wird nöthig sein, den Besitz einer Person nicht nur mit dem zu befürchtenden Verluste, sondern auch den zu erwartenden Gewinn mit dem aus dem erhaltenen Gewinne folgenden Besitzstande, zu vergleichen. Aus dem Verhältnifs dieser Zustände wird sich die Bedeutung des zu befürchtenden Verlustes und des zu erwartenden Gewinnes ergeben.

Bezeichnet K den Besitz einer Person und B die Summe, um deren Verlust oder Gewinn es sich handelt, so drückt

$$\frac{B}{K}$$

die Bedeutung der Summe B in Beziehung auf den Besitz der Person, oder die Wichtigkeit dieser Summe als *Verlust*, und

$$\frac{B}{K+B}$$

die Bedeutung der Summe in Beziehung auf den durch den Gewinn herbeigeführten Besitzstand, oder die Wichtigkeit dieser Summe als *Gewinn* aus. Es ist daher der Werth der subjectiven Hoffnung hinsichtlich des zu befürchtenden *Verlustes* (T):

$$1. \quad T = \frac{B}{K},$$

und hinsichtlich des zu erwartenden *Gewinnes* (V):

$$2. \quad V = \frac{B}{K+B}.$$

Dies giebt folgende Vergleichung:

$$3. \quad T : V = \frac{B}{K} : \frac{B}{K+B} = K+B : K.$$

Die Bedeutung des Verlustes und Gewinns, welche eine und dieselbe Summe für den Besitzstand einer Person hat, verhält sich also zu einander, wie der durch den Gewinn vergröfserte Besitzstand zu dem ursprünglichen; und umgekehrt. Bringt man (3.) auf die Form

$$4.\quad T:V = 1:\frac{K}{K+B} = 1+\frac{B}{K}:1,$$

so sieht man, dafs *dieselbe* Summe, welche verloren oder gewonnen werden kann, als Verlust eine gröfsere Bedeutung hat, denn als Gewinn, und dafs der Gewinn einer Summe den Besitz in geringerem Verhältnisse steigert, als ihr Verlust denselben schwächt. So hat der Verlust von 10 G. für einen Besitz von 100 G. die Bedeutung $\frac{1}{10}$, und der Gewinn der gleichen Summe die Bedeutung $\frac{1}{11}$.

Hieraus zeigt sich schon, welche Vorsicht bei Anlegung von Summen auf Gewinn oder Verlust nöthig ist, da immer der Gewinn für das nämliche Individuum eine geringere Bedeutung hat, als der Verlust; und wie ungünstig wiederholt erlittene Verluste wirken. Zugleich zeigt sich, wie unklug es ist, im Unglücke durch Wiederholung und Steigerung des Einsatzes die früher erlittenen Verluste ausgleichen zu wollen, da die Anstrengungen immer ungleicher werden.

Untersucht man, um Dies näher zu zeigen, den Werth der subjectiven Hoffnung nach $n$maligem Verluste der Summe B, so findet man aus (3.) folgende Vergleichung:

$$5.\quad T:V = \frac{B}{K-nB}:\frac{B}{K+(n+1)B} = K+(n+1)B:K-nB.$$

Die Gröfse des Unterschiedes von Verlust und Gewinn ist

$$6.\quad V-T = \frac{(2n+1)B^2}{(K-nB)(K+(n+1)B)};$$

und dieser Unterschied wird immer gröfser, je gröfser n wird. Die Bedeutung von Gewinn und Verlust kommt daher in ein immer gröfseres Mifsverhältnifs.

Vergleicht man nun den Werth, welchen die nämliche Summe als Gewinn und Verlust für Personen von verschiedenem Besitze hat, so ergeben sich folgende Vergleichungen:

$$7.\quad V_1:V_2 = \frac{B}{K_1+B}:\frac{B}{K_2+B} = K_2+B:K_1+B,$$

$$8.\quad T_1:T_2 = \frac{B}{K_1}:\frac{B}{K_2} = K_2:K_1.$$

Der Ausdruck (7.) zeigt, dafs die Bedeutung der nämlichen Summe als *Gewinn* für Personen von verschiedenem Besitze in umgekehrtem Verhältnisse des durch den Gewinn veränderten Besitzstandes steht; der Ausdruck (8.) zeigt, dafs die Bedeutung der nämlichen Summe als *Verlust* für Personen von verschiedenem Besitze in umgekehrtem Verhältnisse des ursprünglichen Besitzes ist. Für den Bemittelteren hat daher Gewinn und Verlust derselben Summe eine geringere Bedeutung, als für den weniger Bemittelten; und zwar in desto geringerem Maafse, je gröfser die ihnen zu Gebote stehenden Mittel sind. Das Umgekehrte findet für den Unbemittelteren Statt. Für gleich bemittelte Personen hat Gewinn und Verlust die gleiche Bedeutung. Daran knüpft sich die weitere Folgerung, dafs es am zweckmäfsigsten ist, wenn sich Personen von gleichen Mitteln in Gesellschaften zu Erreichung beliebiger Zwecke vereinigen; denn für sie hat Gewinn und Verlust, oder Förderung und Beeinträchtigung der gemeinschaftlichen Interessen gleiche Bedeutung, und es ist zu erwarten, dafs in so constituirten Gesellschaften der Gemeinsinn stärker und fester hervortreten werde, als in andern von verschiedenen Interessen.

Soll unter den Bestimmungen (3.) die Bedeutung des Verlustes, den Jemand erleiden kann, der Bedeutung des zu erwartenden Gewinnes für einen bestimmten Besitz *gleich* sein, so ergiebt sich für die Gröfse des Verlusts:

$$9. \quad x = \frac{K.B}{K+B}.$$

Diese Gleichung erhält man, wenn x statt B in (1.) und $T = V$ in (3.) gesetzt wird. Der Gewinn, welcher für einen bestimmten Verlust bei einem bestimmten Besitze gleiche Bedeutung hat, ist unter ähnlicher Annahme aus (2.):

$$10. \quad y = \frac{K.B}{K-B}.$$

Eben so ergeben sich dieselben Begriffe für wiederholtes Gewinnen und Verlieren aus (5.), nemlich:

$$11. \quad x = \frac{K.B}{K+(2n+1)B},$$

$$12. \quad y = \frac{K.B}{K-(2n+1)B}.$$

Im ersten Falle drückt B Gewinn, im zweiten Verlust aus.

§. 45.

Jeder hat in seiner *Persönlichkeit* einen bestimmten Besitz, den er einem Capitale gleich anschlagen kann, welches nach Verhältnifs seines Fleifses

und seiner Talente rentirt. Man kann daher sagen, dafs Niemand absolut arm geboren sei. Bildet er seine Talente aus, steigert er seine Brauchbarkeit, und dauert er in seinem Fleifse aus, so vermehrt er die ihm hieraus erwachsende Rente. Gesellen sich dazu noch andere Mittel des Erwerbs, so wird sich damit seine Rente ebenfalls steigern. Gewöhnlich steigert sich der Besitz eines Individuums allmälig. Doch kann es auch schnell geschehen. Tritt dieser Fall ein, so läfst sich derselbe als eine aus vielen durch auf einander folgendes Zusammenwirken entstandene allmälige Zunahme betrachten.

Bezeichnet K den ursprünglichen Besitz einer Person, der durch Anhäufen ununterbrochen dauernder, unendlich-kleiner Zunahmen dx zu der Summe $K+x$ angewachsen ist, so ist die Bedeutung einer solchen Zunahme in Beziehung auf den hieraus hervorgegangenen Gewinn nach (2. §. 44.):

$$\frac{dx}{K+x},$$

und die Bedeutung sämmtlicher Zunahmen, oder der Werth der subjectiven Hoffnung ist

$$1. \quad V = \int \frac{dx}{K+x} = \log(K+x) + C.$$

Für $x = 0$, oder für den ursprünglichen Zustand, ist

$$C = -\log K.$$

Also ist

$$2. \quad V = \log(K+x) - \log K = \log \frac{K+x}{K}.$$

Betrachten wir auf gleiche Weise die Verminderung des ursprünglichen Besitzes K und nehmen an, dafs sich derselbe um x vermindert habe, so ist die Bedeutung der allmäligen Verminderung

$$\frac{dx}{K-x}$$

und die Bedeutung des zu fürchtenden Verlustes ist

$$3. \quad T = \int \frac{dx}{K-x} + C.$$

Dieses giebt, aus den nämlichen Gründen wie vorher:

$$4. \quad T = \log(K-x) - \log K = \log \frac{K-x}{K}$$

Bei den meisten Unternehmungen, welche auf die Veränderung des Besitzes eines Individuums durch Gewinn oder Verlust einwirken, ist der Erfolg ungewifs und die Anwendung des Calculs wird dadurch bedingt: denn es soll dann

durch ihn die Bedeutung unsicherer Verhältnisse gewürdigt werden. Bei Unternehmungen, wo die Gewifsheit eines Vortheils oder Nachtheils vor Augen liegt, ist der Calcul überflüssig. Ist aber der Erfog ungewifs und die Aussicht vorhanden, dafs sich der ursprüngliche Besitz eines Individuums um die Gröfse G im Falle des Gelingens vermehren wird, und ist das Zutreffen dieser Aussicht mit der Wahrscheinlichkeit w_1 zu erwarten, so ist der Werth der Erwartung in diesem Falle, oder der muthmafsliche Werth M des erhöhten Besitzes:

$$5. \quad M = w_1 \log\frac{K+G}{G}.$$

Steht das Eintreffen eines Verlustes B mit einer Wahrscheinlichkeit B in Aussicht, so ist die Furcht des verminderten Besitzes, oder der muthmafsliche Werth N des verminderten Besitzes:

$$6. \quad N = w_2 \log\frac{K-B}{K}.$$

Einer von beiden Fällen wird eintreten. Demnach ist der Werth der subjectiven Hoffnung H:

$$7. \quad H = w_1 \log\frac{K+G}{K} + w_2 \log\frac{K-G}{K}.$$

Um nun den Werth der subjectiven Hoffnung in Beziehung auf den Besitz eines Individuums zu erkennen, wird Folgendes dienen. Es ist bekanntlich, wenn man die obigen Logarithmen in Reihen entwickelt:

$$w_1 \log\left(1+\frac{G}{K}\right) = \quad w_1\frac{G}{K} - w_1\frac{G^2}{2K^2} + w_1\frac{G^3}{3K^3} - w_1\frac{G^4}{4K^4} + \dots,$$

$$w_2 \log\left(1-\frac{B}{K}\right) = -w_2\frac{B}{K} - w_2\frac{B^2}{2K^2} - w_2\frac{B^3}{3K^3} - w_2\frac{B^4}{4K^4} - \dots$$

Demnach geht (5.) in

$$H = \frac{w_1 G - w_2 B}{K} - \frac{w_1 G^2 + w_2 B^2}{2K^2} + \frac{w_1 G^3 - w_2 B^3}{3K^3} - \dots$$

über. Im vorliegenden Falle giebt G den Zuwachs des Besitzes, also den zu erwartenden reinen Gewinn. Man kann folglich nach (§. 39.) $G = \frac{w_2 B}{w_1}$ setzen. Dadurch geht der obige Ausdruck in folgenden über:

$$8. \quad H = -w_2\left(1+\frac{w_2}{w_1}\right)\frac{B^2}{2K^2} - w_2\left(1-\frac{w_2^2}{w_1^2}\right)\frac{B^3}{3K^3} - w_2\left(1+\frac{w_2^3}{w_1^3}\right)\frac{B^4}{4K^4} - \dots$$

Der Werth dieser Reihe wird durch die Beschaffenheit von $\frac{w_2^n}{w_1^n}\cdot\frac{B^{n+1}}{(n+1)K^{n+1}}$ bedingt, wo w_1 und w_2 so unter einander zusammenhangen, dafs $w_1 + w_2 = 1$ ist und B nicht wohl gröfser als K werden kann, wenn nicht Jemand über

fremde Mittel zu gebieten hat, oder auf Credit mehr wagt, als sein Besitz beträgt. Der Werth von $\frac{w_2 B}{w_1 K}$ kann also entweder so grofs, oder kleiner, oder gröfser als die Einheit sein. In den beiden ersten Fällen convergirt die vorstehende Reihe und ihr Werth wird negativ. Im letzten Falle divergirt sie und die Werthe des 2ten, 4ten, 6ten, ... Gliedes in (6.) werden positiv, die des 3ten, 5ten, 7ten, ... negativ. Vergleicht man nun das $2n$te und $(2n+1)$te Glied mit einander, so geben beide zusammen, wegen der Divergenz der Reihe, einen negativen Werth. Daraus folgt, dafs in diesem Falle auch der Werth der ganzen Reihe negativ wird. Diese Bemerkungen führen zu folgenden Sätzen:

9. Bei jeder Unternehmung, wo die Summe B gewagt wird, um einen reinen Gewinn G zu erzielen, findet ein nachtheiliger Einflufs auf den Werth der subjectiven Hoffnung Statt; selbst dann, wenn Einlage und Gewinn zu einander in richtigem Verhältnisse stehen. Dieser Nachtheil ist stärker, wenn auf dem reinen Gewinn ein Abzug lastet; wie bei Lotterien, Spielen u. s. w.

10. Der Nachtheil wird um so kleiner, je kleiner die zu wagende Summe im Verhältnisse zum Besitze und je günstiger die Aussicht auf Gewinn ist; er wird um so gröfser, je gröfser die zu wagende Summe und je ungünstiger die Aussicht ist.

Jedes Spiel, wenn es auch auf ganz richtiger Grundlage beruht, oder wenn es auch hinsichtlich der objectiven Hoffnung mit keinem Nachtheil verbunden sein sollte, übt einen nachtheiligen Einflufs auf den Werth der subjectiven Hoffnung aus und ist deswegen verwerflich. Am meisten verführen hohe Gewinne zum Spiele. Je gröfser der Gewinn, je geringer ist die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen und desto gröfser ist der auf dem Gewinne lastende Abzug. Gerade in diesem Falle ist der Werth der subjectiven Hoffnung am meisten im Nachtheil.

Diese Bemerkungen haben auf ein ganz anderes Resultat geführt, als diejenigen in (§. 43.). Geht man von den Logarithmen auf die Grundgröfse über, so läfst sich die Gleichung (7.) auch so darstellen:

$$11. \quad H = \left(\frac{K+G}{K}\right)^{w_1} \left(\frac{K-B}{K}\right)^{w_2},$$

oder, wenn $w_1 = \frac{p}{q}$ und $w_2 = \frac{r}{q}$ gesetzt wird:

$$12. \quad H = \sqrt[q]{\left(\left(\frac{K+G}{K}\right)^p \left(\frac{K-B}{K}\right)^r\right)}.$$

Diese Gleichungen beziehen den Werth der subjectiven Hoffnung auf die Einheit. Soll er auf den ursprünglichen Besitz bezogen werden, so ist der Ausdruck in (11. und 12.) von dem Nenner K zu befreien. Dies giebt

$$13. \quad x = (K+G)^{w_1}(K-B)^{w_2} = \sqrt[q]{((K+G)^p(K-G)^r)} \quad \text{und}$$
$$14. \quad x = (K+G)^{w_1}(K-B)^{w_2} < K.$$

Laplace hat den Satz (7.) durch Integralrechnung (Théor. anal. d. probab. pg. 433 und 434) entwickelt. Hier ist er auf eine einfache und dabei etwas allgemeinere Weise gefunden, die zugleich auf den Satz (10.) führt.

Specielle Fälle ergeben sich leicht. Läfst sich Jemand mit einem Besitze von 200 G. auf ein Unternehmen ein, das ihm bei der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ einen Gewinn oder Verlust von 60 G. bringt, so ist der Werth der subjectiven Hoffnung

$$x = \sqrt{(260.140)} = \sqrt{(36400)} = 190{,}78784\ldots.$$

Die Ausführung des Unternehmens steht einer Ausgabe von 9,2121.... G. gleich. Ist die Wahrscheinlichkeit, zu gewinnen $\frac{2}{3}$, zu verlieren $\frac{1}{3}$, und können 30 G. gewonnen und 60 verloren werden, so ist der Werth der subjectiven Hoffnung

$$x = \sqrt[3]{(230^2.140)} = \sqrt[3]{(7406000)} = 194{,}9221\ldots.\ \text{G.}$$

Sind die Bedingungen umgekehrt, so ist

$$x = \sqrt[3]{(260.140^2)} = \sqrt[3]{(5096000)} = 172{,}085\ldots.\ \text{G.}$$

Ist aber die Wahrscheinlichkeit 60 G. zu gewinnen $\frac{2}{3}$, die 60 G. zu verlieren $\frac{1}{3}$, so ist der Werth der subjectiven Hoffnung

$$x = \sqrt[3]{(260^2.140)} = \sqrt[3]{(9464000)} = 211{,}523\ldots.\ \text{G.}$$

Man sieht, dafs der Werth der subjectiven Hoffnung auch auf Vortheil deuten kann. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn $w_1 G > w_2 B$ ist. Dadurch wird die Bedingung, unter welcher die Sätze (9. und 10.) gelten, aufgehoben. Denn sie gelten nur, wenn $w_1 G = w_2 B$ ist. Die Bedingung, dafs $w_1 G > w_2 B$ ist, wird aber selten oder gar nicht vorkommen; es müfste denn Jemand auf den Gedanken fallen, sich seines Besitzes auf die eben bezeichnete Weise entledigen zu wollen.

(Der Schlufs folgt.)

15.

Nouvelle démonstration des théorèmes des Fourier.

(Par Mr. le Dr. *O. Schlömilch*, professeur à l'université de Jena.)

Nous donnerons ici une démonstration des deux formules:

$$\tfrac{1}{2}\pi f(\gamma) = \int_0^\infty \cos\gamma u\,\partial u \int_0^c f(t)\cos ut\,\partial t,$$

$$\tfrac{1}{2}\pi f(\gamma) = \int_0^\infty \sin\gamma u\,\partial u \int_0^c f(t)\sin ut\,\partial t,$$

qui n'exige que des notions élémentaires, tandis qu'elle est parfaitement rigoureuse.

En désignant par K la valeur de l'intégrale définie

$$\int_0^\infty \frac{\sin z}{z}\partial z \text{ *)},$$

on a en fesant $z = mu$:

$$\int_0^\infty \frac{\sin mu}{u}\partial u = K$$

pourvu que m soit une quantité positive > 0. De là on tire

$$\int_0^\infty \frac{\sin(a+b)u}{u}\partial u + \int_0^\infty \frac{\sin(a-b)u}{u}\partial u = 2K$$

si $a > b$, et

$$\int_0^\infty \frac{\sin(b+a)u}{u}\partial u - \int_0^\infty \frac{\sin(b-a)u}{u}\partial u = 0$$

si $a < b$. Ces deux résultats réunis, donnent le théorème

$$1.\quad \int_0^\infty \frac{\sin au\cos bu}{u}\partial u = K, \quad \text{si } a > b,$$
$$= 0, \quad \text{si } a < b,$$

dont on pourra faire les applications suivantes.

I. Nous considérerons l'intégrale double

$$2.\quad P = \int_0^\infty \frac{\cos\gamma u}{u}\partial u \int_0^c F(t)\sin ut\,\partial t,$$

en supposant que la fonction $F(t)$ soit continue et finie entre les limites $t = 0$, $t = c$. Il suit de là que l'expression

$$\frac{\cos\gamma u}{u}F(t)\sin ut$$

---

*) On sait que cette valeur est égale à $\frac{1}{2}\pi$, mais il n'est pas nécessaire de supposer cette valeur, parcequ'elle suivra de nos formules mêmes.

sera continue et finie entre les limites $u=0$, $u=\infty$ et $t=0$, $t=c$: donc il sera permis de changer l'ordre des intégrations. On obtiendra de cette manière

$$P=\int_0^c F(t)\,\partial t\int_0^\infty \frac{\sin tu\cos\gamma u}{u}\,\partial u.$$

Maintenant il faut distinguer les deux cas: $\gamma>c$ et $c>\gamma>0$. Dans le premier cas on a (en vertu de $c>t$) $\gamma>t$, et par conséquent l'intégrale, prise par rapport à u, s'évanouira et il restera

$$3.\qquad P=0,\qquad \gamma>c.$$

Dans l'autre cas $c>\gamma>0$ on pourra décomposer l'intervalle depuis 0 jusqu'à c en deux autres depuis 0 jusqu'à γ et de γ jusqu'à c. Cela donne

$$P=\int_0^\gamma F(t)\,\partial t\int_0^\infty \frac{\sin tu\cos\gamma u}{u}\,\partial u+\int_\gamma^c F(t)\,\partial t\int_0^\infty \frac{\sin tu\cos\gamma u}{u}\,\partial u.$$

Comme on a $\gamma>t$ pour la première de ces intégrales, et $\gamma<t$ pour la seconde, on obtient

$$P=\int_\gamma^c F(t)\,\partial t.K.$$

Posons enfin $\int F(t)\,\partial t=f(t)$ où $F(t)=f'(t)$, et nous aurons

$$\int_\gamma^c F(t)\,\partial t=f(c)-f(\gamma),$$

$$\int_0^c F(t)\sin ut\,\partial t=f(c)\sin cu-u\int_0^c f(t)\cos ut\,\partial t.$$

A l'aide de ces substitutions, l'équation ci-dessus:

$$\int_0^\infty \frac{\cos\gamma u}{u}\,\partial u\int_0^c F(t)\sin ut\,\partial t=K\int_\gamma^c F(t)\,\partial t$$

se change en celle-ci:

$$f(c)\int_0^\infty \frac{\sin cu\cos\gamma u}{u}\,\partial u-\int_0^\infty \cos\gamma u\,\partial u\int_0^c f(t)\cos ut\,\partial t=K[f(c)-f(\gamma)];$$

et comme $c>\gamma$, la première intégrale est égale à K et on obtient

$$4.\qquad \int_0^\infty \cos\gamma u\,\partial u\int_0^c f(t)\cos ut\,\partial t=Kf(\gamma),\qquad c>\gamma>0.$$

La valeur de l'intégrale double

$$\int_0^\infty \cos\gamma u\,\partial u\int_0^c f(t)\cos ut\,\partial t$$

est donc $Kf(\gamma)$ si $c>\gamma>0$, et zéro pour $\gamma>c$. Il est aisé de voir que ces considérations ont encore lieu dans le cas $\gamma=0$, et cela rend facile

la détermination de K. En prenant p. ex. $f(t) = e^{-\alpha t}$, $c = \infty$, on trouve

$$\int_0^\infty \frac{\alpha \cos \gamma u}{\alpha^2 + u^2} \partial u = K e^{-\alpha \gamma},$$

ce qui donne $\frac{1}{2}\pi = K$ pour $\gamma = 0$.

Les mêmes transformations, appliquées à l'intégrale (2.), sont aussi applicables à l'intégrale

$$5. \qquad Q = \int_0^\infty \frac{\sin \gamma u}{u} \partial u \int_0^c F(t) \cos u t \, \partial t,$$

et on trouvera qu'elle est égale à

$$K \int_0^c F(t) \partial t, \qquad \text{si } \gamma > c$$

et à

$$K \int_0^\gamma F(t) \partial t, \qquad \text{si } c > \gamma > 0.$$

En feant $F(t) = f'(t)$, on verra aisément que la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty \sin \gamma u \, \partial u \int_0^c f(t) \sin u t \, \partial t$$

est égale à $K f(\gamma)$ si $c > \gamma > 0$, et à zéro pour $\gamma > c$. Dans le cas $\gamma = 0$ l'intégrale s'évanouit et ne donne pas la valeur de $K f(0)$.

Par la même méthode on parvient au théorème plus général:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty \cos \gamma u \, \partial u \int_a^b f(t) \cos u t \, \partial t \\ &\int_0^\infty \sin \gamma u \, \partial u \int_a^b f(t) \sin u t \, \partial t \end{aligned}\right\} = K f(\gamma),$$

sous condition que γ soit entre les limites a et b. Pour toute autre valeur positive de γ, les intégrales se réduisent à zéro. Il n'est pas difficile d'étendre ce théorème au cas, où la continuité de la fonction est interrompue dans l'intervalle $t = a$ jusqu'à $t = b$, pourvu que les interruptions ne sont pas infinies.

16.

Transformation de quelques intégrales définies.

(Par Mr. le Dr. *O. Schlömilch*, professeur à l'université de Jena.)

Parmi les différentes formules propres à la transformation des intégrales définies, il n'y en a que très peu qui soient facilement applicables aux intégrales contenants des fonctions algébriques et des fonctions trigonométriques, et dont les limites de l'intégration sont zéro et l'infini. Je vais présenter ici des développements qui auront peut-être quelque intérêt parcequ'ils sont fondés sur une méthode peu exploitée encore; savoir sur la décomposition de l'intervalle de l'intégration. Les formules dont il s'agit sont:

$$\int_0^\infty \frac{r\,dx}{r^2+x^2}\Phi(\cos x)\,\Psi(\sin^2 x) = \int_0^1 \frac{p\,dz}{p^2+z^2}\Phi(\sqrt{(1-z^2)})\,\Psi(z^2),$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{r^2+x^2}\Phi(\sin x)\,\Psi(\cos^2 x) = \int_0^1 \frac{q\,dz}{q^2-z^2}\Phi(\sqrt{(1-z^2)})\,\Psi(z^2),$$

$$p = \tfrac{1}{2}(e^r-e^{-r}), \qquad q = \tfrac{1}{2}(e^r+e^{-r}),$$

où Φ désigne une fonction qui à la propriété $\Phi(-u) = -\Phi(u)$, et Ψ une fonction arbitraire.

Comme toute intégrale de la forme

$$\int_0^\infty f(x)\,dx$$

n'est que la limite vers laquelle converge l'intégrale

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = F(w),$$

en fesant croitre infiniment la quantité arbitraire w, on peut considérer l'intégrale

$$1. \quad S = \int_0^\infty \frac{r\,dx}{r^2+x^2}\Phi(\cos x)\,\Psi(\sin^2 x)$$

comme la limite de

$$2. \quad S' = \int_0^{\frac{1}{2}\pi s+\varrho} \frac{r\,dx}{r^2+x^2}\Phi(\cos x)\,\Psi(\sin^2 x)$$

pour des valeurs croissantes du nombre entier s, tandis que ϱ est toujours entre 0 et $\frac{1}{2}\pi$.

Décomposons maintenant l'intégrale S' comme suit:

$$3. \quad S' = \int_0^{\frac{1}{2}\pi s} \frac{r\,dx}{r^2+x^2}\Phi(\cos x)\,\Psi(\sin^2 x) + \int_{\frac{1}{2}\pi s}^{\frac{1}{2}\pi s+\varrho} \frac{r\,dx}{r^2+x^2}\Phi(\cos x)\,\Psi(\sin^2 x),$$

et examinons séparément les deux parties.

La première intégrale, que nous désignerons simplement par

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi s} X\,dx, \quad \left\{X = \frac{r}{r^2+x^2}\,\Phi(\cos x)\,\Psi(\sin^2 x)\right\},$$

peut être décomposée en d'autres intégrales, toutes du même intervalle d'intégration. En effet, on pourra la présenter par la suite des termes:

$$4. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} X\,dx + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} X\,dx + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} X\,dx + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} X\,dx + \dots$$
$$\dots + \int_{(s-2)\frac{1}{2}\pi}^{(s-1)\frac{1}{2}\pi} X\,dx + \int_{(s-1)\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi s} X\,dx.$$

Deux termes consécutives de cette série se présentent sous les formes:

$$\int_{(n-\frac{1}{2})\pi}^{n\pi} X\,dx, \quad \int_{n\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi} X\,dx,$$

et ils sont susceptibles de deux transformations aussi simples que fécondes. En fesant $x = n\pi - y$ dans la première intégrale, elle se change en

$$(-1)^n \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{r\,dy}{r^2+(n\pi-y)^2}\,\Phi(\cos y)\,\Psi(\sin^2 y);$$

comme on le trouvera facilement si l'on a égard à la propriété $\Phi(-u) = -\Phi(u)$. Dans la seconde intégrale nous fesons $x = n\pi + y$, et elle devient alors

$$(-1)^n \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{r\,dy}{r^2+(n\pi+y)^2}\,\Phi(\cos y)\,\Psi(\sin^2 y).$$

En transformant de cette manière toutes les intégrales (4.), on obtiendra l'équation

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi s} \frac{r\,dx}{r^2+x^2}\,\Phi(\cos x)\,\Psi(\sin^2 x)$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{r\,dy}{r^2+y^2}\,\Phi(\cos y)\,\Psi(\sin^2 y) - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{r\,dy}{r^2+(\pi-y)^2}\,\Phi(\cos y)\,\Psi(\sin^2 y)$$
$$- \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{r\,dy}{r^2+(\pi+y)^2}\,\Phi(\cos y)\,\Psi(\sin^2 y) + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{r\,dy}{r^2+(2\pi-y)^2}\,\Phi(\cos y)\,\Psi(\sin^2 y)$$
$$+ \dots \dots \dots - \dots \dots \dots$$

dont la partie à droite embrasse s intégrales. En réunissant tous les termes, on aura

$$5. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi s} \frac{r\,dx}{r^2+x^2}\,\Phi(\cos x)\,\Psi(\sin^2 x) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} Y_s\,\Phi(\cos y)\,\Psi(\sin^2 y)\,dy,$$

Y_s étant la somme des s premiers termes de la série

$$\frac{r}{r^2+y^2} - \frac{r}{r^2+(\pi-y)^2} - \frac{r}{r^2+(\pi+y)^2} + \frac{r}{r^2+(2\pi-y)^2} + \frac{r}{r^2+(2\pi+y)^2} - \dots$$

Quant à la deuxième intégrale du n°. 3, elle peut être réduite à

$$\int_0^\varrho \frac{r\,dy}{r^2+(\frac{1}{2}\pi s+y)^2}\,\Phi[\cos(\tfrac{1}{2}\pi s+y)]\,\Psi[\sin^2(\tfrac{1}{2}\pi s+y)],$$

en fesant $x=\frac{1}{2}\pi s+y$. Si on n'a égard qu'aux valeurs absolues, les deux fonctions Φ et Ψ sont indépendantes de s; on peut donc mettre l'intégrale sous la forme

$$6. \qquad \pm\int_0^\varrho \frac{r\,dy}{r^2+(\frac{1}{2}\pi s+y)^2}\,f(y),$$

$f(y)$ étant une fonction qui ne contient pas s et qui ne change pas de signe depuis $y=0$ jusqu'à $y=\varrho$. En observant encore que $\frac{r}{r^2+(\frac{1}{2}\pi s)^2}$ est le maximum de $\frac{r}{r^2+(\frac{1}{2}\pi s+y)^2}$ dans l'intervalle mentionnée, il suit, que la valeur absolue de notre intégrale est moindre que celle du produit

$$\frac{r}{r^2+(\frac{1}{2}\pi s)^2}\int_0^\varrho f(y)\,dy = \frac{rR}{r^2+(\frac{1}{2}\pi s)^2},$$

en désignant par R la valeur de $\int_0^\varrho f(y)\,dy$. L'intégrale dont il est question (6.), peut donc être exprimée par

$$\pm\frac{\lambda r R}{r^2+(\frac{1}{2}\pi s)^2},$$

où λ signifie une quantité entre 0 et 1.

Ayant attention aux diverses transformations que nous venons d'indiquer, nous pourront maintenant poser l'équation

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi s+\varrho} \frac{r\,dx}{r^2+x^2}\,\Phi(\cos x)\,\Psi(\sin^2 x)$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}\pi} Y_s\,\Phi(\cos y)\,\Psi(\sin^2 y)\,dy \pm \frac{\lambda r R}{r^2+(\frac{1}{2}\pi s)^2}.$$

Or fesant croitre s au dessus de toute limite, Y_s a pour limite la somme de la série infinie

$$\frac{r}{r^2+y^2}-\frac{r}{r^2+(\pi-y)^2}-\frac{r}{r^2+(\pi+y)^2}+\frac{r}{r^2+(2\pi-y)^2}+\frac{r}{r^2+(2\pi+y)^2}-\dots \text{ in inf.},$$

et cette somme est *)

$$7. \qquad \frac{p\cos y}{p^2+\sin^2 y}, \qquad p=\tfrac{1}{2}(e^r-e^{-r}).$$

Comme de plus $1>\lambda>0$, et comme les quantités r et R sont indépendantes

*) Voyez la note à la fin.

de s, on aura

$$\lim. \frac{\lambda r R}{r^2+(\frac{1}{2}\pi s)^2} = 0,$$

et par conséquent

$$\int_0^\infty \frac{r\,dx}{r^2+x^2}\,\Phi(\cos x)\,\Psi(\sin^2 x) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{p\cos y\,dy}{p^2+\sin^2 y}\,\Phi(\cos y)\,\Psi(\sin^2 y).$$

Substitutiant $\sin y = z$, on obtient enfin

8. $$\int_0^\infty \frac{r\,dx}{r^2+x^2}\,\Phi(\cos x)\,\Psi(\sin^2 x) = \int_0^1 \frac{p\,dz}{p^2+z^2}\,\Phi(\sqrt{(1-z^2)})\,\Psi(z^2).$$

Voilà le premier des théorèmes mentionnés ci-dessus.

Les mêmes transformations peuvent être appliquées à l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{r^2+x^2}\,\Phi(\sin x)\,\Psi(\cos^2 x),$$

et on trouvera sans peine qu'elle est égale à l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} Y\,\Phi(\sin y)\,\Psi(\cos^2 y)\,dy,$$

Y étant la somme de la série infinie

$$\frac{y}{r^2+y^2} + \frac{\pi-y}{r^2+(\pi-y)^2} - \frac{\pi+y}{r^2+(\pi+y)^2} - \frac{2\pi-y}{r^2+(2\pi-y)^2} + \dots$$

Comme on a d'ailleurs *)

9. $$Y = \frac{q\sin y}{q^2-\cos^2 y}, \qquad q = \tfrac{1}{2}(e^r+e^{-r}),$$

on obtient

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{r^2+x^2}\,\Phi(\sin x)\,\Psi(\cos^2 x) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{q\sin y\,dy}{q^2-\cos^2 y}\,\Phi(\sin y)\,\Psi(\cos^2 y),$$

et cela, par la substitution $\cos y = z$, se change en

10. $$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{r^2+x^2}\,\Phi(\sin x)\,\Psi(\cos^2 x) = \int_0^1 \frac{q\,dz}{q^2-z^2}\,\Phi(\sqrt{(1-z^2)}\,\Psi(z^2).$$

Les théorèmes (8. et 10.) contiennent (comme cas particuliers) des nombreuses formules plus où moins connues. Si p. ex. on suppose $\Phi(u) = u$ et $\Psi(u) = 1$, on a

$$\int_0^\infty \frac{r\cos x}{r^2+x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\pi e^{-r},$$

$$\int_0^\infty \frac{x\sin x}{r^2+x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\pi e^{-r}.$$

---

*) Voyez la note.

Les suppositions $\Phi(u) = u$ et $\Psi(u) = \frac{1}{1+u^2}$, $\Psi(u) = \frac{1}{1-u^2}$ offrent deux autres applications de la formule (10.); elles donnent

$$\int_0^\infty \frac{x \operatorname{tang} \frac{1}{2} x}{r^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{e^r + 1}, \qquad \int_0^\infty \frac{x \cot \frac{1}{2} x}{r^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{e^r - 1}.$$

Il ne serait pas difficile de trouver encore beaucoup d'autres formules analogues.

Note.

Les formules sommatoires dont nous avons fait usage, peuvent être démontrées de la manière suivante.

Si dans l'équation connue

$$l \sin x = l x + l\left(1 - \frac{x}{\pi}\right) + l\left(1 + \frac{x}{\pi}\right) + l\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) + l\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) + \dots$$

on remplace x par $y + r\sqrt{-1}$, on aura d'abord

$$\sin x = \tfrac{1}{2}(e^r + e^{-r}) \sin y + \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\,(e^r - e^{-r}) \cos y,$$

et en égalant entre elles les parties imaginaires de l'équation précédente, on obtient

$$\alpha. \quad \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{e^r - e^{-r}}{e^r + e^{-r}} \cot y\right)$$

$$= \operatorname{arc\,tang} \frac{r}{y} - \operatorname{arc\,tang} \frac{r}{\pi - y} + \operatorname{arc\,tang} \frac{r}{\pi + y} - \dots$$

Les mêmes transformations, appliquées à la formule

$$l\left(\tfrac{1}{2}(1 + \cos x)\right) = 2l\left(1 - \frac{x}{\pi}\right) + 2l\left(1 + \frac{x}{\pi}\right) + 2l\left(1 - \frac{x}{3\pi}\right) + 2l\left(1 + \frac{x}{3\pi}\right) + \dots,$$

donnent la seconde expression

$$\beta. \quad \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{e^r - e^{-r}}{2 + e^r + e^{-r}} \operatorname{tang} y\right)$$

$$= 2 \operatorname{arc\,tang} \frac{r}{\pi - y} - 2 \operatorname{arc\,tang} \frac{r}{\pi + y} + 2 \operatorname{arc\,tang} \frac{r}{3\pi - y} - \dots$$

La somme des expressions α et β est

$$\begin{aligned} \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{e^r - e^{-r}}{2 \sin y}\right) = {} & \operatorname{arc\,tang} \frac{r}{y} + \operatorname{arc\,tang} \frac{r}{\pi - y} \\ & - \operatorname{arc\,tang} \frac{r}{\pi + y} - \operatorname{arc\,tang} \frac{r}{2\pi - y} \\ & + \operatorname{arc\,tang} \frac{r}{2\pi + y} + \operatorname{arc\,tang} \frac{r}{3\pi - y} \\ & - \dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

De là on tire, en différentiant suivant y:

$$\gamma.\quad \frac{p\cos y}{p^2+\sin^2 y}$$

$$= \frac{r}{r^2+y^2} - \frac{r}{r^2+(\pi-y)^2} - \frac{r}{r^2+(\pi+y)^2} + \frac{r}{r^2+(2\pi-y)^2} + \frac{r}{r^2+(2\pi+y)^2} - \dots,$$

$$p = \tfrac{1}{2}(e^r - e^{-r}),$$

et en différentiant suivant r:

$$\frac{\frac{1}{2}(e^r+e^{-r})\sin y}{p^2+\sin^2 y} = \frac{y}{r^2+y^2} + \frac{\pi-y}{r^2+(\pi-y)^2} - \frac{\pi+y}{r^2+(\pi+y)^2} - \frac{2\pi-y}{r^2+(2\pi-y)^2} + \dots$$

En posant

$$q = \tfrac{1}{2}(e^r + e^{-r}),$$

on a

$$p^2 = q^2 - 1,$$

et l'équation précédente se réduit à

$$\delta.\quad \frac{q\sin y}{q^2-\cos^2 y} = \frac{y}{r^2+y^2} + \frac{\pi-y}{r^2+(\pi-y)^2} - \frac{\pi+y}{r^2+(\pi+y)^2} - \frac{2\pi-y}{r^2+(2\pi-y)^2} + \dots$$

Les formules (γ. et δ.) sont celles qui étaient à démontrer.

Crelle, Journal d. Math. Bd. 36. Heft 3.

Fac-simile einer Handschrift von Vandermonde.

Je requiers qu'on recherche dans
les registres de l'Academie s'il n'y
a pas eu déja une deliberation
qui a decidé que la Compagnie
ne donneroit jamais son jugement
sur des matieres d'économie
politique et j'insiste pour que
l'Academie prenne cette
deliberation si elle ne l'a pas
déja faite.

le 6 mai 1786.

Vandermonde

17.

Über das Verhalten der Gamma-Functionen zu den Producten äquidifferenter Factoren.

(Von Herrn Prof. Dr. *M. Ohm* zu Berlin.)

---

§. 1.

Wir nehmen als Definition der Gamma-Function die Gleichung

$$\text{I.}\quad \Gamma_x = \int_0^\infty e^{-z}\cdot z^{x-1}\cdot dz = \int_0^1 \left(\log\frac{1}{z}\right)^{x-1}\cdot dz,$$

in welcher wir x stets *positiv* (ganz oder gebrochen) voraussetzen.

Ist x positiv *ganz*, so findet sich durch theilweise Integration unmittelbar

$$\text{II.}\quad \Gamma_x = 1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots(x-1),\quad \text{so wie}\quad \Gamma_2 = 1 \quad \text{und}\quad \Gamma_1 = 1.$$

Ist aber x gebrochen, so verhält sich die transcendente Gamma-Function Γ_x zu dem Product *äquidifferenter* Factoren, wie sich die *(transcendente)* Exponential-Function e^x zu dem Producte *gleicher* Factoren verhält; — und wie wir von der Betrachtung eines Productes *gleicher* Factoren ausgehen, um nach und nach zu den (transcendenten) Exponential-Functionen und deren Eigenschaften zu gelangen, so ist es naturgemäfs, von den Producten *äquidifferenter* Factoren auszugehen, um in *ihren* Gesetzen, auch die Grundgesetze und die wesentlichsten Eigenschaften der Gamma-Functionen bereits ausgesprochen zu erblicken.

§. 2.

Wir definiren nun

$$\text{III.}\quad a^{n|r} = a(a+r)(a+2r)\ldots\ldots(a+(n-1)\cdot r),$$

wo n positiv *ganz* gedacht ist, nennen $a^{n|r}$ eine ganze *Factorielle*, so wie a die *Basis*, n den *Exponenten* und r die *Differenz* derselben, und wir ziehen aus dieser Definition die Folgerungen

$$\text{IV.}\quad a^{n|r} = (a+(n-1)\cdot r)^{n|-r};$$

$$\text{V.}\quad a^{m+n|r} = a^{m|r}\cdot(a+mr)^{n|r} = a^{n|r}\cdot(a+nr)^{m|r},$$

$$\text{VI.}\quad a^{m-n|r} = \frac{a^{m|r}}{(a+(m-n)\cdot r)^{n|r}},$$

$$\text{VII.}\quad \frac{a^{m|r}}{a^{n|r}} = (a+nr)^{m-n|r};$$

so wie (aus (V.), wenn $a+nr=b$ gesetzt wird)

$$\text{VIII.}\quad \frac{a^{m|r}}{b^{m|r}} = \frac{a^{(b-a):r|r}}{(a+mr)^{(b-a):r|r}},$$

(wo aber alle Exponenten als *positiv ganz* vorausgesetzt werden, namentlich also auch $\frac{b-a}{r}$);

$$\text{IX.}\quad a^{m|r} = \left(\frac{a}{h}\right)^{m|\frac{r}{h}} \cdot h^m,$$

also auch

$$\text{IX.}\,b.\quad a^{m|r} = r^m \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^{m|1} = r^m \cdot \frac{1^{(a:r)+m-1|1}}{1^{(a:r)-1|1}},$$

durch welche letztere Gleichung die Factorielle $a^{m|r}$ auf den einfachsten Fall derselben, wo die Basis und die Differenz gleichmäfsig der Einheit gleich sind, zurückgeführt sich sieht.

In allen diesen Gleichungen setzen wir aber die Exponenten *positiv ganz* voraus, damit wir es überall nur mit Producten äquidifferenter Factoren zu thun haben.

§. 3.

Nun aber nimmt man die Gleichung (VI.) als Definition der *Differenz-Factorielle* $a^{m-n|r}$, deren Exponent $m-n$ eben so gut positiv als auch negativ *ganz* gedacht wird, eben so gut Null als 1. — Man untersucht aber mit Sorgfalt und findet zu Folge dieser Untersuchungen, dafs für diesen erweiterten Begriff der Factorielle $a^{b|r}$ die Formeln (IV. — IX.) noch gelten, obgleich jetzt die Factoriellen *Quotienten* aus Producten äquidifferenter Factoren vorstellen. — Die *Exponenten* dieser Factoriellen sind also jetzt positive oder negative ganze Zahlen, oder Null; die *Basis* und die *Differenz* einer jeden ist aber beliebig, reell oder imaginär.

In der Formel (VI.) steckt aber nun noch

$$\text{X.}\quad a^{1|r} = a;$$

$$\text{XI.}\quad a^{0|r} = 1;$$

$$\text{XII.}\quad a^{-n|r} = \frac{1}{(a-nr)^{n|r}} = \frac{1}{(a-r)^{n|-r}},$$

während n selbst beliebig positiv oder negativ *ganz* oder Null ist. Endlich ist auch noch für diese allgemeinere Factorielle:

$$\text{XIII.}\quad a^{m|0} = a^m,$$

so dafs die Gesetze dieser Factoriellen in die Gesetze der Potenzen (mit po-



sitiven oder negativen ganzen oder Null-Exponenten) übergehen, so oft man die Differenz r, $=0$ setzt.

§. 4.

Hierauf nehme man aus der (II.) und der (IX. *b.*) diese drei Definitionen:

$$\text{XIV.}\quad 1^{c|1} = \Gamma_{1+c} \quad \text{d. h.} \quad = \int_0^\infty e^{-z}\cdot z^c \cdot dz = \int_0^1 \left(\log\frac{1}{z}\right)^c \cdot dz,$$

wo $1+c$ *positiv* gedacht ist;

$$\text{XV.}\quad a^{c|1} = \frac{\Gamma_{a+c}}{\Gamma_a},$$

wo a und $a+c$ *positiv* gedacht sind, und welche die (XIV.) in sich schliefst,

$$\text{XVI.}\quad a^{c|r} = r^c\cdot\frac{\Gamma_{(a:r)+c}}{\Gamma_{(a:r)}},$$

wo r und a und $\frac{a}{r}+c$ *positiv* gedacht sind, während c beliebig ganz oder gebrochen sein soll. — Im letztern Falle nennt man die Factoriellen *gebrochen.*

So wie aber diese Begriffe festgestellt sind, mufs sogleich wieder eine Untersuchung angestellt werden, und diese lehrt, dafs die vorhergehenden Formeln (V.—XII.) für gebrochene Factoriellen ebenfalls noch gelten, welche reelle Werthe auch die Buchstaben nur immer vorstellen, wenn nur die Bedingungen der Existenz dieser gebrochenen Factoriellen erfüllt sind, — *dafs aber die* (IX.), *nämlich*

$$a^{m|r} = \left(\frac{a}{h}\right)^{m|\frac{r}{h}}\cdot h^m,$$

nur dann gilt, wenn h positiv ist und h^m ihren positiven Werth vorstellt; während von der (IV.) deshalb zur Zeit in Bezug auf *gebrochene* Factoriellen keine Rede sein kann, weil bis jetzt bei den gebrochenen Factoriellen nur *positive* Differenzen vorausgesetzt worden sind.

§. 5.

Um nun aber auch Factoriellen mit beliebig grofsem negativem Exponenten zu haben, nehme man aus der (V.) als Definition

$$\text{XVII.}\quad a^{c|r} = \frac{a^{\nu|r}}{(a+cr)^{\nu|r}}\cdot(a+\nu r)^{c|r} = \frac{a^{\nu|r}}{(a+cr)^{\nu|r}}\cdot r^c\cdot\frac{\Gamma_{(a:r)+c+\nu}}{\Gamma_{(a:r)+\nu}},$$

nachdem man sich ν *positiv ganz* und grofs genug gedacht hat, dafs, wenn auch a und c beliebig grofs und negativ sein sollten, doch $\frac{a}{r}+\nu$ und $\frac{a}{r}+c+\nu$ stets positiv werden, während die Differenz r immer nur positiv vorausgesetzt wird.

Dann aber untersucht und findet man aufs Neue, dafs alle vorhergehenden Formeln für diese jetzt ziemlich allgemeinen Factoriellen auch noch gelten, *jedoch die* (IX.) *wiederum nur, wenn h positiv ist und die Potenz h^m ihren positiven Werth vorstellt.* — Von der (IV.) endlich kann jedoch für gebrochene Exponenten wiederum zur Zeit deshalb noch nicht die Rede sein, weil wir bis jetzt noch keine weitern Factoriellen kennen, als solche, die nur *positive* Differenzen haben. — Die Exponenten und Basen können dagegen *beliebig reell* gedacht werden.

§. 6.

Endlich nehmen wir die Gleichung (IV.) als Definition der gebrochenen (oder ganzen) Factorielle mit *negativer* Differenz (indem wir in (IV.) $a-(n-1)r$ statt a schreiben). — Nachdem diese letztere Definition noch hinzugekommen, hat aber die Factorielle $a^{c|r}$ jedesmal eine völlig bestimmte Bedeutung, sie hat jedesmal einen bestimmten einzigen und reellen Werth, wie auch a und r und c beliebig reell gegeben sein mögen *).

Untersucht man aber, so findet man auch in Bezug auf die letztere Definition, dafs *alle* vorhergehenden Formeln, die nicht ihrer Natur nach ganz specielle sind, für *alle* Factoriellen gelten, während alle vorkommenden Buchstaben beliebige *reelle* Werthe haben, *mit Ausnahme der (IX.), die nur gilt, wenn h positiv ist und h^m positiv genommen wird* **).

§. 7.

Ist ν *positiv ganz*, c aber wie a beliebig reell und endlich, so nähert sich der Quotient $\frac{\nu^c}{(a+\nu)^{c|1}}$ der 1 desto mehr, je gröfser ν gedacht wird, und man hat

$$\text{XVIII.} \quad \frac{\nu^c}{(a+\nu)^{c|1}} = 1 \quad \text{für} \quad \nu = +\infty.$$

Für *ganze* Werthe von c fällt die Wahrheit dieser Behauptung in die Augen, und für gebrochene Werthe von c ist, wegen

$$1. \quad (a+\nu)^{c|1} = \frac{\Gamma_{a+\nu+c}}{\Gamma_{a+\nu}},$$

---

*) Dafs sich immer in den besondern Fällen der Anwendung *die* Fälle als Ausnahmsfälle ausscheiden, in welchen Ausdrücke vorkommen, welche die Form $\frac{1}{0}$ annehmen, versteht sich von selbst.

**) Dafs *Kramp* diese Formel (IX.) für allgemein wahr hält und sie auch anwendet, wenn h negativ ist, kann man als die Hauptquelle der Widersprüche ansehen, in welche er sich in seiner „Analyse des réfractions astron. et terrestres 1799" verwickelt sieht.

noch

$$2. \quad \frac{\nu^c}{(a+\nu)^{c|1}} = \frac{\nu^c . \Gamma_{a+\nu}}{\Gamma_{a+\nu+c}} = \frac{\nu^c . \int_0^\infty e^{-z} . z^{a+\nu-1} . dz}{\int_0^\infty e^{-z} . z^{a+\nu+c-1} . dz}$$

Nun hat man aber für $\nu = +\infty$, $e^{-z} = \left(1-\frac{z}{\nu}\right)^\nu$, weil beide Seiten einerlei Logarithmen geben, wenigstens für jeden *endlichen* Werth von z, und weil für $z = \infty \gtreqless \nu$ beide Seiten unendlich klein werden. Und da ferner der aggregirende Theil der beiden Integrale zur Rechten, der noch hinzutreten mufs, wenn solche zuerst von $z = 0$ bis $z = \nu$, dann aber noch von $z = \nu$ bis zu jedem noch gröfsern Werth von z genommen werden, für $\nu = \infty$ offenbar der Null gleich sind, so kann man statt der obern Grenze ∞ der Integrale jedesmal ν schreiben (wenn $\nu = +\infty$), so dafs die Gleichung (2.) dadurch übergeht in

$$3. \quad \frac{\nu^c}{(a+\nu)^{c|1}} = \frac{\nu^c . \int_0^\nu \left(1-\frac{z}{\nu}\right)^\nu . z^{a+\nu-1} . dr}{\int_0^\nu \left(1-\frac{z}{\nu}\right)^\nu . z^{a+\nu+c-1} . dz},$$

oder, wenn man $\frac{z}{\nu} = x$ setzt:

$$4. \quad \frac{\nu^c}{(a+\nu)^{c|1}} = \frac{\int_0^1 (1-x)^\nu . x^{a+\nu-1} . dx}{\int_0^1 (1-x)^\nu . x^{a+\nu+c-1} . dx},$$

für $\nu = +\infty$. — Dafs aber das Verhältnifs (der Quotient) dieser letztern beiden Integrale desto näher der Einheit rückt, je gröfser ν gedacht wird, und für $\nu = +\infty$ der Einheit unendlich nahe kommt, ist unschwer zu erkennen.

Anmerkung. Aus diesem Satze folgt noch

$$\text{XIX.} \qquad a^{c|+\frac{1}{\infty}} = a^c,$$

so lange a positiv ist. — Denn es ist

$$a^{c|r} = r^c . \left(\frac{a}{r}\right)^{c|1},$$

folglich auch

$$\frac{a^c}{a^{c|r}} = \left(\frac{a}{r}\right)^c : \left(\frac{a}{r}\right)^{c|1} = \frac{\nu^c}{\nu^{c|1}},$$

wenn $\frac{a}{r} = \nu$ gesetzt wird. Weil nun aber ν positiv unendlich grofs wird, so oft $r = +\frac{1}{\infty}$ und a positiv gedacht wird, so folgt das Behauptete.

Man findet aber auch noch

$$\text{XIX. } b. \qquad a^{c|-\frac{1}{\infty}} = a^c,$$

wenn nur a positiv und endlich ist.

Denn es ist $a^{c|-\frac{1}{\infty}} = \left(a-(c-1)\cdot\frac{1}{\infty}\right)^{c|+\frac{1}{\infty}} = \left(a-(c-1)\cdot\frac{1}{\infty}\right)^c = a^c$.

Deshalb kann man annehmen, dafs die (XIII.), nämlich $a^{m|0} = a^m$, auch noch für jeden *gebrochenen* reellen Werth von m gilt, *so lange nur a* positiv ist.

§. 8.

Die Gleichung (V.) giebt daher für $r = 1$:

$$\text{XX.} \qquad a^{c|1} = \frac{a^{\nu|1}}{(a+c)^{\nu|1}}\cdot\nu^c \quad \text{für} \quad \nu = +\infty,$$

wo a und c beliebig reell gedacht sind. — Für $a = 1$ geht diese Gleichung über in

$$\text{XXI.} \qquad 1^{c|1} = \frac{1^{\nu|1}}{(1+c)^{\nu|1}}\cdot\nu^c \quad \text{für} \quad \nu = +\infty,$$

wo c beliebig reell gedacht ist*).

Multipliciren wir in (XX.) rechts Zähler und Nenner mit r^ν, und die Gleichung selbst mit r^c, und setzen wir r *positiv* voraus, so ergiebt sich, wenn noch $\frac{a}{r}$ statt a gesetzt wird (nach IX.):

$$\text{XXII.} \qquad a^{c|r} = \frac{a^{\nu|r}}{(a+cr)^{\nu|r}}\cdot(\nu r)^c \quad \text{für} \quad \nu = +\infty,$$

dagegen ist, wenn wiederum r positiv, also $-r$ negativ gedacht wird,

$$\text{XXIII.} \qquad a^{c|-r} = \frac{a^{-\nu|r}}{(a+cr)^{-\nu|r}}\cdot(\nu r)^c \quad \text{für} \quad \nu = +\infty,$$

welche Formel mittelst der (IV.) aus der (XXII.) unmittelbar hervorgeht.

Anmerkung. Man begreift übrigens, dafs man von diesen letztern beiden Gleichungen als Definition der gebrochenen Factoriellen mit positiver, dann auch mit negativer Differenz, hätte ausgehen können. Dann würde sich aus diesen Definitionen die Gültigkeit der Formeln (IV. — XVII.) haben ab-

---

*) Diesen Ausdruck zur Rechten in (XXI.) hat *Gaufs* in der Abhandlung vom Jahre 1812: „Disquis. gener. circa seriem infinitam etc." im 2ten Bande der Göttinger Commentarien durch Π_c bezeichnet. Es ist also Π_c völlig identisch mit $1^{c|1}$, aber allgemeiner als Γ_{1+c}, so lange wir unter Γ_c nichts anderes als das bestimmte Integral in (I.) verstehen, weil Π_c nur dann $= \Gamma_{1+c}$ ist, wenn c zwischen -1 und ∞ liegt, während $1^{c|1}$ oder Π_c für jeden andern negativen Werth von c auch seine Bedeutung hat.

leiten lassen; aber auch da würde man gefunden haben, dafs die (IX.) nur gilt, wenn h und h^m *positiv* sind. — Wir werden diesen bessern Weg bei einer andern Gelegenheit (in einer eignen Schrift) nachweisen. —

§. 9.

Das Verhältnifs (der Quotient) $\frac{a^{c|r}}{b^{c|r}}$ zweier Factoriellen, welche denselben Exponenten und dieselbe Differenz haben, läfst sich auf 8 verschiedene Arten unmittelbar so umformen (wenn man die (VIII.) und dann auf jede der 4 Factoriellen die (XIII.) und die (IV.) anwendet), dafs immer Zähler und Nenner dieselbe Differenz und denselben Exponenten haben, aber mit allen Combinationen der Vorzeichen. Man hat nämlich:

$$\frac{a^{c|r}}{b^{c|r}} = \frac{(b-r)^{-c|-r}}{(a-r)^{-c|-r}} = \frac{(b+cr)^{-c|r}}{(a+cr)^{-c|r}} = \frac{(a+(c-1)\cdot r)^{c|-r}}{(b+(c-1)\cdot r)^{c|-r}}$$

$$= \frac{a^{(b-a):r|r}}{(a+cr)^{(b-a):r|r}} = \frac{(a+(c-1)\cdot r)^{(a-b):r|-r}}{(a-r)^{(a-b):r|-r}} = \frac{(b+cr)^{(a-b):r|r}}{b^{(a-b):r|r}} = \frac{(b-r)^{(b-a):r|-r}}{(b+(c-1)\cdot r)^{(b-a):r|-r}}.$$

Wenn man sich diese 8 Umformungen wohl einprägt, so wird man bei dem Rechnen mit Factoriellen kaum mehr Schwierigkeiten begegnen.

§. 10.

Der Haupt-Eigenschaft der Factoriellen, welche in der Gleichung (V.), nämlich in der Gleichung

$$(\odot) \qquad a^{c|r}\cdot(a+cr)^{\nu|r} = a^{\nu|r}\cdot(a+\nu r)^{c|r}$$

oder (für $r=1$ und $a=1$, desgleichen $c-1$ statt c)

$$(☾) \qquad c^{\nu|1} = \frac{1^{\nu|1}}{1^{c-1|1}}\cdot(1+\nu)^{c-1}$$

ausgesprochen ist, kann man sich nun, wenn c *gebrochen*, ν aber *ganz* gedacht wird (beide aber positiv oder negativ) bedienen, einmal

um *gebrochene* Factoriellen in *ganze* auszudrücken, wie solches (§. 8. XX., XXII. und XXIII.) geschehen, —

dann aber auch

um *ganze* Factoriellen in *gebrochene* auszudrücken, *also auch in Gamma-Functionen* (nach §. 5. XV. und XVI.).

Dies letztere ist nun die Quelle der wichtigsten Eigenschaften der Gamma-Functionen.

Jede einfachste Wahrheit nämlich, die durch eine Gleichung zwischen Producten äquidifferenter Factoren ausgedrückt ist, geht dadurch, dafs man die

ganzen Factoriellen (nach der Formel (⊙) oder (☾)) in *gebrochene* umformt, in eine Vergleichung der Gamma-Functionen über, so lange nur die Bedingungen der Existenz der Gamma-Functionen erfüllt sind. — Jede solche *elementarste* Wahrheit liefert also eine Eigenschaft der *transcendenten* Gamma-Functionen.

Wir wollen dies jetzt an einigen Beispielen nachweisen.

§. 11.

Erstes Beispiel. Es ist bekannt, dafs sich $\sin a\pi$ in ein Product aus unendlich vielen Factoren ausdrücken läfst. Nimmt man das analoge Product für $\sin b\pi$, dividirt man beide durch einander und hebt man so viel wie möglich auf, so erhält man:

$$1.\quad \frac{\sin a\pi}{\sin b\pi} = \frac{a^{\nu|1}\cdot(1-a)^{\nu|1}}{b^{\nu|1}\cdot(1-b)^{\nu|1}} \quad \text{für} \quad \nu = +\infty.$$

Setzt man nun hier herein (nach §. 10. (⊙) oder nach VIII.) statt der Quotienten $\frac{a^{\nu|1}}{b^{\nu|1}}$ und $\frac{(1-a)^{\nu|1}}{(1-b)^{\nu|1}}$ die ihnen bezüglich gleichen Quotienten $\frac{a^{b-a|1}}{(a+\nu)^{b-a|1}}$, und $\frac{(1-a)^{a-b|1}}{(1-a+\nu)^{a-b|1}}$ und bedenkt man, dafs weil $\nu = \infty$ die letztern beiden Nenner (nach §. 7. XVIII.) bezüglich die *Potenzen* ν^{b-a} und ν^{a-b} sind, deren Product 1 ist, so erhält man aus (1.) sogleich

$$\text{XXIV.}\quad \frac{\sin a\pi}{\sin b\pi} = a^{b-a|1}\cdot(1-a)^{a-b|1},$$

also auch, im Falle b und a positiv und kleiner als 1 vorausgesetzt werden, (nach. §. 4. XV.):

$$\text{XXV.}\quad \frac{\sin a\pi}{\sin b\pi} = \frac{\Gamma_b\cdot\Gamma_{1-b}}{\Gamma_a\cdot\Gamma_{1-a}}.$$

Setzt man hier $b = a+\frac{1}{2}$, so erhält man

$$\text{XXVI.}\quad \operatorname{tang} a\pi = \frac{\Gamma_{\frac{1}{2}+a}\cdot\Gamma_{\frac{1}{2}-a}}{\Gamma_a\cdot\Gamma_{1-a}},$$

wo aber a positiv und $< \frac{1}{2}$ vorausgesetzt werden mufs.

Und da (nach V. und XI.)

$$\text{XXVII.}\quad a^{c|1} = a\cdot(a+1)^{c-1|1} = a^{c-1|1}\cdot(a+c-1)$$

ist, so folgt zunächst auch (für $a=1$ und c positiv)

$$\text{XXVIII.}\quad \Gamma_{c+1} = c\cdot\Gamma_c;$$

und dann ergiebt sich noch, wenn man die (XXIV.) durch a dividirt und hier-

auf $a = 0$ setzt (in so fern $\frac{\sin a\pi}{a} = \pi$ wird, für $a = 0$)

$$\text{XXIX.}\quad \frac{\pi}{\sin b\pi} = 1^{b-1|1}.1^{-b|1},$$

also auch (nach XIV.)

$$\text{XXX.}\quad \frac{\pi}{\sin b\pi} = \Gamma_b \cdot \Gamma_{1-b},$$

wenn nur $b < 1$ und positiv ist. — Für $b = \frac{1}{2}$ wird

$$\text{XXXI.}\quad \pi = (\Gamma_{\frac{1}{2}})^2 \quad \text{oder} \quad \Gamma_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}.$$

Und da (nach V.)

$$1^{n+c-1|1} = 1^{c-1|1}.c^{n|1}$$

ist, so folgt hieraus noch (wegen XIV.)

$$\text{XXXII.}\quad \Gamma_{n+c} = \Gamma_c \cdot c^{n|1};$$

also auch (für $c = \frac{1}{2}$, wegen XXXI.)

$$\text{XXXIII.}\quad \Gamma_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1^{n|2}}{2^n} \cdot \sqrt{\pi},$$

welche Gleichungen besonders dann von Interesse sind, wenn man sich n positiv ganz denkt, weil dann $c^{n|1}$ und $1^{n|2}$ Producte von n Factoren vorstellen.

Setzt man ferner in der (XXX.) nach und nach statt b erst $\frac{1}{n}$, dann $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n}$ etc. etc., zuletzt $\frac{n-1}{n}$, — multiplicirt man alle entsprechenden Gleichungen mit einander und bedenkt man, dafs

$$\sin\frac{1}{n}\pi \cdot \sin\frac{2}{n}\pi \cdot \sin\frac{3}{n}\pi \ldots \sin\frac{n-1}{n}\pi = \frac{n}{2^{n-1}} \text{*)}$$

und

$$\Gamma_1 = 1$$

ist, so erhält man

$$\text{XXXIV.}\quad \Gamma_{\frac{1}{n}} \cdot \Gamma_{\frac{2}{n}} \cdot \Gamma_{\frac{3}{n}} \ldots \Gamma_{\frac{n-1}{n}} = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}}{\sqrt{n}}.$$

U. s. w. f.

---

*) Zerlegt man die durch $\frac{x^n-1}{x-1}$ ausgedrückte ganze Function vom $n-1$ten Grade in ihre $n-1$ einfachen Factoren (so dafs jeder Factor durch $x - \cos\frac{2\mu}{n}\pi - i \cdot \sin\frac{2\mu}{n}\pi$ vorgestellt ist, unter i die $\sqrt{-1}$ und unter μ die ganzen Zahlen 1, 2, 3, ... $n-1$ verstanden) und setzt man in der vorstehenden Gleichung 1 statt x, so erhält man

$$n = \prod_{\mu=1}^{\mu=n-1}\left(1 - \cos\frac{2\mu}{n}\pi - i \cdot \sin\frac{2\mu}{n}\pi\right).$$

Weil aber $1 - \cos\frac{2\mu}{n}\pi = 2\left(\sin\frac{\mu}{n}\pi\right)^2$ und $\sin\frac{2\mu}{n}\pi = 2\sin\frac{\mu}{n}\pi \cdot \cos\frac{\mu}{n}\pi$ ist, so geht

§. 12.

Zweites Beispiel. Man gehe nun von der sehr elementaren Wahrheit aus, dafs das Product von 2ν Factoren

$$a(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)\ldots\ldots(a+2\nu-1)$$

sich zerlegt in das Product der ν Factoren $a(a+2)(a+4)\ldots\ldots(a+2\nu-2)$, multiplicirt mit dem Producte der ν übrigen Factoren, d. h. also dafs ist

$$1.\quad a^{2\nu|1} = a^{\nu|2}\cdot(a+1)^{\nu|2}$$

oder (nach IX.)

$$= \left(\frac{a}{2}\right)^{\nu|1}\cdot 2^{\nu}\times\left(\frac{a+1}{2}\right)^{\nu|1}\cdot 2^{\nu};$$

d. h.

$$2.\quad \frac{a^{2\nu|1}}{\left(\frac{a}{2}\right)^{\nu|1}\cdot\left(\frac{a+1}{2}\right)^{\nu|1}} = 2^{2\nu},$$

dafs also der Quotient zur Linken (in N. 2.), von dem Werthe von a ganz unabhängig ist.

Setzt man nun hier herein statt der ganzen Factoriellen, die ihnen nach §. 10. (C) oder nach (VIII.) gleichen gebrochenen Factoriellen; denkt man sich gleichzeitig $\nu=\infty$, um (nach XIX.) statt der ***Factoriellen*** mit unendlich grofser Basis die ***Potenzen*** setzen zu können, so findet sich augenblicklich

$$3.\quad 2^{a-1}\cdot\frac{1^{\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}|1}\cdot 1^{\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}|1}}{1^{a-1|1}} = \frac{2^{\nu|2}}{1^{\nu|2}\cdot\nu^{\frac{1}{2}}}\quad\text{für}\quad \nu=\infty,$$

so dafs auch in (3.) der Ausdruck links, von a ganz unabhängig ist. Wird nun hier 1 statt a gesetzt, so erhält man mittelst der Gleichungen (XI. und XXXI.)

$$4.\quad \sqrt{\pi} = \frac{2^{\nu|2}}{1^{\nu|2}\cdot\nu^{\frac{1}{2}}}\ ^{*}).$$

---

der Ausdruck unter dem Producten-Zeichen Π, über in

$$2\sin\frac{\mu}{n}\pi\cdot\left(\sin\frac{\mu}{n}\pi-i\cdot\cos\frac{\mu}{n}\pi\right),$$

während das Product der $n-1$ eingeklammerten Factoren $\sin\frac{\mu}{n}\pi-i\cdot\cos\frac{\mu}{n}\pi$ deshalb $=1$ wird, weil dies mit dem Producte je zweier, vom Anfange und vom Ende gleich weit entfernter dieser Factoren der Fall ist; denn sie sind für $\mu=r$ und $\mu=n-r$ (weil $\sin(\pi-z)=\sin z$ aber $\cos(\pi-z)=-\cos z$ ist) bezüglich

$$\sin\frac{r}{n}\pi-i\cdot\cos\frac{r}{n}\pi\quad\text{und}\quad\sin\frac{r}{n}\pi+i\cdot\cos\frac{r}{n}\pi.$$

*) Multiplicirt man diese Gleichung mit $\frac{1}{\sqrt{2}}=\left(\frac{\nu}{2\nu+1}\right)^{\frac{1}{2}}$ für $\nu=\infty$, und quadrirt man sie dann, so erhält man (nach XXVII.)

$$\tfrac{1}{2}\pi = \frac{2^{\nu|2}\cdot 2^{\nu|2}}{1^{\nu|2}\cdot 3^{\nu|2}}\quad\text{für}\quad\nu=\infty,$$

und dies ist der bekannte Ausdruck des *Wallis* für π.

Die Gleichung (3.) geht daher über, wenn man noch $2a$ statt a setzt, in

$$5.\quad 2^{2a-1}\cdot\frac{1^{a-1|1}\cdot 1^{a-\frac{1}{2}|1}}{1^{2a-1|1}} = \sqrt{\pi}$$

und, wenn a positiv (nach XIV.), in

$$\text{XXXV.}\quad \Gamma_a\cdot\Gamma_{a+\frac{1}{2}} = \Gamma_{2a}\cdot 2^{-2a+1}\cdot\sqrt{\pi},$$

welche Gleichung ebenfalls eine bekannte Eigenschaft der Gamma-Functionen ist.

§. 13.

Drittes Beispiel. Man gehe von derselben Eigenschaft der Producte äqidifferenter Factoren aus, welche aber jetzt in der allgemeinern Gleichung

$$1.\quad b^{n\nu|1} = b^{\nu|n}\cdot(b+1)^{\nu|n}\cdot(b+2)^{\nu|n}\ldots(b+n-1)^{\nu|n}$$

ausgesprochen ist (nämlich, dafs sich solche Producte durch Versetzung ihrer Factoren am Werthe nicht ändern) und reducire (nach IX.) die Factoriellen mit der Differenz n auf solche mit der Differenz 1, so dafs die Gleichung (1.) übergeht, wenn man gleichzeitig na statt b schreibt, in

$$2.\quad \frac{(na)^{n\nu|1}}{a^{\nu|1}\cdot\left(a+\frac{1}{n}\right)^{\nu|1}\cdot\left(a+\frac{2}{n}\right)^{\nu|1}\ldots\left(a+\frac{n-1}{n}\right)^{\nu|1}} = n^{n\nu}.$$

Substituirt man nun hier herein wiederum statt der *ganzen* Factoriellen (nach §. 10. (C) oder nach VIII.) ihre Ausdrücke in gebrochene Factoriellen, so ergiebt sich, wenn gleichzeitig $\nu=\infty$ gedacht wird, augenblicklich

$$3.\quad n^{na}\cdot\frac{1^{a-1|1}\cdot 1^{a-1+\frac{1}{n}|1}\cdot 1^{a-1+\frac{2}{n}|1}\ldots 1^{a-1+\frac{n-1}{n}|1}}{1^{na-1|1}} = \frac{(1^{\nu|1})^n\cdot n^{n\nu+1}}{1^{n\nu|1}\cdot\nu^{\frac{1}{2}(n-1)}},$$

so dafs der Ausdruck links, von a unabhängig wird. Ist nun a positiv, so geht dieser Ausdruck zur Linken über in

$$4.\quad n^{na}\cdot\frac{\Gamma_a\cdot\Gamma_{a+\frac{1}{n}}\cdot\Gamma_{a+\frac{2}{n}}\ldots\Gamma_{a+\frac{n-1}{n}}}{\Gamma_{na}},$$

so dafs dieser letztere auch von a unabhängig ist. Weil solcher aber nach (XXXIV.) für $a=\frac{1}{n}$ den Werth $(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}:\sqrt{n}$ annimmt, so folgt hieraus

$$\text{XXXVI.}\quad \Gamma_a\cdot\Gamma_{a+\frac{1}{n}}\cdot\Gamma_{a+\frac{2}{n}}\ldots\Gamma_{a+\frac{n-1}{n}} = \Gamma_{na}\cdot n^{-na+\frac{1}{2}}\cdot(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)},$$

in welcher Formel die (XXXV.) (für $n=2$) als ein besonderer Fall enthalten ist.

Anmerkung. So sehen wir diese bekannten, aber bis jetzt ziemlich isolirt stehenden Eigenschaften der Gamma-Functionen, in einer so vernunftnothwendigen organischen Gliederung erscheinen, dafs sie nun als vollkommenes Gemeingut der ersten Elemente des Calculs angesehen werden können. — Diese letztere Behauptung rechtfertigt sich aber noch mehr, sobald man folgendes noch erwägt:

A. Die Formel

$$1.\quad b^{nc|1} = b^{c|n}\cdot(b+1)^{c|n}\cdot(b+2)^{c|n}\dots\dots(b+n-1)^{c|n}$$

und natürlich auch der besondere Fall von ihr, wo $n=2$, nämlich

$$2.\quad b^{2c} = b^{c|2}\cdot(b+1)^{c|2},$$

von welcher (oder von welchen) wir, indem wir c wie n, *positiv ganz* uns dachten, in den beiden vorhergehenden Paragraphen, als von der einfachsten Eigenschaft der Producte ausgegangen sind, — *gilt* (oder gelten) *auch noch, wenn c beliebig reell ist (ganz oder gebrochen, positiv oder negativ)*, wie die Anwendung der Formel (XXII.) unmittelbar auf das überzeugendste erkennen läfst.

B. Diese Formeln (1. und 2.), für *gebrochene* Werthe von c aufgefafst und für $b=1$, *sind* nichts anders als eben diese zwei zuletzt erwähnten Eigenschaften der Gamma-Functionen, wie solche in den Formeln (XXXVI. und XXXV.) zu finden sind. Die (1.) geht nämlich, sobald man $a-\frac{b}{n}$ statt c setzt, sogleich (nach XV.) über in

$$\frac{\Gamma_{na}}{\Gamma_b} = n^{na-b}\cdot\frac{\Gamma_a\cdot\Gamma_{a+\frac{1}{n}}\cdot\Gamma_{a+\frac{2}{n}}\dots\dots\Gamma_{a+\frac{n-1}{n}}}{\Gamma_{\frac{b}{n}}\cdot\Gamma_{\frac{b+1}{n}}\cdot\Gamma_{\frac{b+2}{n}}\dots\dots\Gamma_{\frac{b+n-1}{n}}}.$$

C. So wie also z. B. in der Eigenschaft

$$a^{m+n} = a^m\cdot a^n$$

der Producte *gleicher* Factoren, sobald man sich m und n *gebrochen* denkt, eine Eigenschaft der *Wurzeln* ausgesprochen ist, — dieselbe Gleichung aber Eigenschaften der *Sinus* und *Cosinus* ausdrückt, so oft man sich m und n imaginär und von der Form $x\cdot\sqrt{-1}$ und $z\cdot\sqrt{-1}$ denkt und $a=e$ nimmt, — eben so drückt jede einfache Gleichung zwischen Producten *äquidifferenter* Factoren, *sobald man sie in Factoriellen-Zeichen schreibt,* und statt der (anfänglich *ganz* gedachten) Exponenten nun *gebrochene* Zahlen sich denkt, — gleichzeitig Eigenschaften der Gamma-Functionen aus.

Dafs aber dieselbe Formel, die für *ganze* Exponenten gilt, auch noch für *gebrochene* Exponenten wahr sei, — mufs natürlich jedesmal besonders nachgewiesen werden.

Wir wollen nun noch einige andere Betrachtungen anstellen.

§. 14.

Setzt man in die Gleichung

$$(1+x)^a \cdot (1+x)^b = (1+x)^{a+b}$$

statt der Potenzen die, ihnen gleichen, nach ganzen Potenzen von x fortlaufenden Binomialreihen, — multiplicirt man die beiden Reihen zur Linken, und vergleicht man mit einander die Coëfficienten der $n$ten Potenz von x, so erhält man eine Vergleichung der Binomial-Coëfficienten, welche, wenn man mit $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots . n$ (welches Product wir der Kürze wegen stets durch $n!$ bezeichnen wollen) multiplicirt, zu einer Vergleichung zwischen Factoriellen mit der Differenz -1 führt, die aber in eine Vergleichung zwischen Factoriellen mit der beliebigen Differenz r übergeht, sobald man die Gleichung links und rechts mit $(-r)^n$ multiplicirt und, da es lauter *ganze* Factoriellen sind, die Formel (IX.) in Anwendung bringt.

Die so erhaltene Gleichung ist dann folgende:

$$\text{XXXVII.} \qquad (a+b)^{n|r} = \sum_{\mathfrak{b}=0}^{\mathfrak{b}=n} (n_{\mathfrak{b}} \cdot a^{n-\mathfrak{b}|r} \cdot b^{\mathfrak{b}|r}),$$

wo $n_0, n_1, n_2, n_3, \ldots . n_{\mathfrak{b}}, \ldots .$ die Binomial-Coëfficienten der $n$ten Potenz irgend eines Binomiums vorstellen. Dies ist der sogenannte binomische Lehrsatz für Factoriellen, der für $r=0$ in den gewöhnlichen binomischen Lehrsatz für Potenzen, übergeht. — In dieser Gleichung (XXXVII.) sind a und b ganz beliebig reell oder imaginär gedacht, aber n *positiv ganz* *).

---

*) Für $r=1$ und b, so wie a *positiv*, geht dieser Satz (nach XV.) über in

$$(A.) \qquad \frac{\Gamma_{a+b+n}}{\Gamma_{a+b}} = \sum_{\mathfrak{b}=0}^{\mathfrak{b}=n} \left(n_{\mathfrak{b}} \cdot \frac{\Gamma_{a+n-\mathfrak{b}} \cdot \Gamma_{b+\mathfrak{b}}}{\Gamma_a \cdot \Gamma_b} \right).$$

Zu derselben Gleichung wird man aber auch geführt, wenn man von dem *Eulerschen* Integral erster Classe

$$\varphi_{a,b} = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} \cdot dx$$

ausgeht, die Differential-Function zur Rechten aber mit

$$1 = [x+(1-x)]^n = \sum_{\mathfrak{b}=0}^{\mathfrak{b}=n} (n_{\mathfrak{b}} \cdot x^{n-\mathfrak{b}}(1-x)^{\mathfrak{b}})$$

multiplicirt. Man erhält dann sogleich

$$(B.) \qquad \varphi_{a,b} = \sum_{\mathfrak{b}=0}^{\mathfrak{b}=n} (n_{\mathfrak{b}} \cdot \varphi_{a+n-\mathfrak{b},\, b+\mathfrak{b}});$$

So wie man sich n nicht positiv ganz denkt, wird die Reihe zur Rechten (XXXVII.) (wenn nicht etwa b ein entgegengesetztes Vielfaches von r sein sollte, oder n negativ ganz und a ein directes Vielfaches von r) eine *unendliche*, da die Beschränkung $\mathfrak{b} = n$ nun wegfallen mufs; und es fragt sich nun, ob diese *unendliche* Reihe

$$(R.) \quad \ldots \quad \Sigma(n_{\mathfrak{b}} \cdot a^{n-\mathfrak{b}|r} \cdot b^{\mathfrak{b}|r}),$$

wo $\mathfrak{b}$ nach und nach 0 und *alle* positiven ganzen Zahlen vorstellt, — noch immer der Factorielle $(a+b)^{n|r}$ gleich sein wird, wie dies dann der Fall ist, wenn man n *positiv ganz* nimmt (weil dann die Binomial-Coëfficienten $n_{\mathfrak{b}}$ alle der Null gleich werden, so oft $\mathfrak{b} > n$ genommen wird, so dafs die *unendliche* Reihe (*R.*) sich nun auf die *endliche* der (XXXVII.) reducirt). — Wir werden aber finden:

1) dafs diese unendliche Reihe (*R.*) wirklich allemal $= (a+b)^{n|r}$ ist, so oft r *negativ* ist und die Reihe convergent, — welches letztere allemal und nur dann der Fall ist, wenn gleichzeitig mit der Differenz r auch $r-a-b$ *negativ* ist;

2) dafs dagegen dieselbe unendliche Reihe (*R.*)

$$= (a+b)^{n|r} \cdot \frac{\sin\frac{a}{r}\pi \cdot \sin\left(\frac{a+b}{r}+n\right)\pi}{\sin\left(\frac{a}{r}+n\right)\pi \cdot \sin\frac{a+b}{r}\pi}$$

sein wird, so oft r *positiv* ist, und wenn die unendliche Reihe (*R.*) convergirt, welches letztere allemal und nur dann der Fall ist, wenn zugleich mit r auch $r-a-b$ *positiv* sich findet.

Dieser letztere Ausdruck zieht sich aber auf seinen ersten Factor $(a+b)^{n|r}$ allemal zurück, so oft n *positiv oder negativ ganz ist, oder b ein positiv oder negativ Vielfaches von r.*

Die folgenden Paragraphen sollen dies alles aufser Zweifel stellen.

---

also für $n = 1, 2, 3,$ etc.

$$\varphi_{a,b} = \varphi_{a+1,b} + \varphi_{a,b+1};$$
$$\varphi_{a,b} = \varphi_{a+2,b} + 2\cdot\varphi_{a+1,b+1} + \varphi_{a,b+2};$$
$$\varphi_{a,b} = \varphi_{a+3,b} + 3\cdot\varphi_{a+2,b+1} + 3\cdot\varphi_{a+1,b+2} + \varphi_{a,b+3};$$

u. s. w.

Und diese Gleichung (*B.*) geht sogleich in die vorhergehende Gleichung (*A.*) über, sobald man die Eigenschaft der Function φ zu Hilfe nimmt, nach welcher

$$(C.) \qquad \varphi_{p,q} = \frac{\Gamma_p \cdot \Gamma_q}{\Gamma_{p+q}}$$

ist.

Von der Gleichung (*B.*) ausgehend, kann man also auch den binomischen Lehrsatz für Factoriellen erhalten, welches Verfahren jedoch nicht zu rühmen sein dürfte.

§. 15.

Stellen wir uns zunächst die Aufgabe:

Die Summe der unendlichen Reihe

$$(R.) \quad \ldots \quad \Sigma(n_{\mathfrak{b}}\cdot a^{n-\mathfrak{b}|r}\cdot b^{\mathfrak{b}|r})$$

in dem Falle zu finden, in welchem sie convergent ist *).

Man hat nach den vorher entwickelten Formeln, namentlich aber nach den wichtigsten derselben, nämlich nach der (V., VI. und XII.)

$$1. \quad a^{n-\mathfrak{b}|r} = a^{n|r}\cdot(a+nr)^{-\mathfrak{b}|r} = \frac{a^{n|r}}{(a+(n-1)\cdot r)^{\mathfrak{b}|-r}} = \frac{a^{n|r}}{(-1)^{\mathfrak{b}}\cdot(-a-(n-1)\cdot r)^{\mathfrak{b}|r}},$$

$$2. \quad n_{\mathfrak{b}} = \frac{n^{\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{b}!} = (-1)^{\mathfrak{b}}\cdot\frac{(-n)^{\mathfrak{b}|1}}{\mathfrak{b}!}, \quad \text{wo} \quad \mathfrak{b}! = 1^{\mathfrak{b}|1};$$

also wird die Reihe (*R.*) so:

$$3. \quad R = a^{n|r}\cdot\Sigma\left(\frac{(-n)^{\mathfrak{b}|1}}{\mathfrak{b}!}\cdot\frac{b^{\mathfrak{b}|r}}{(-a-(n-1)\cdot r)^{\mathfrak{b}|r}}\right),$$

oder, wenn man rechts Zähler und Nenner durch $r^{\mathfrak{b}}$ dividirt, dabei die Formel (IX.) anwendet (welches, da $\mathfrak{b}$ positiv *ganz* oder Null ist, geschehen kann) und noch

$$4. \quad -n = \alpha; \quad \frac{b}{r} = \beta, \quad \text{so wie} \quad -\frac{a}{r}-(n-1) = \gamma$$

setzt,

$$5. \quad R = a^{n|r}\cdot\Sigma\left(\frac{\alpha^{\mathfrak{b}|1}\cdot\beta^{\mathfrak{b}|1}}{\mathfrak{b}!\,\gamma^{\mathfrak{b}|1}}\right).$$

Nun ist aber diese letztere unendliche Reihe genau die von *Gaufs* in der oben bereits angeführten Abhandlung (1812) behandelte, und wir wissen aus dieser Behandlung, dafs sie nur dann, aber dann auch allemal convergent ist, so oft $\gamma-\alpha-\beta$ d. h. $1-\frac{a+b}{r}$ oder $\frac{r-a-b}{r}$ positiv ist, also *wenn r mit $r-a-b$ entweder zugleich negativ, oder zugleich positiv ist.*

§. 16.

Suchen wir nun die Summe

$$6. \quad S_{\gamma} \text{ der unendlichen Reihe } \Sigma\left(\frac{\alpha^{\mathfrak{b}|1}\cdot\beta^{\mathfrak{b}|1}}{\mathfrak{b}!\,\gamma^{\mathfrak{b}|1}}\right) = F_{\alpha,\beta,\gamma}.$$

---

*) Warum man hier (wie allemal, wo von Werthen die Rede ist, welche für specielle Werthe eines Buchstaben dadurch hervorgegangen sind, dafs man etwa $\frac{1}{\infty}=0$ oder dergl. gesetzt hat) die Bedingung der Convergenz stellen müsse, *die aufserdem sehr überflüssig ist*, geht aus pag. 20 N. 23. des „Geistes der Diff. und Integral-Rechnung etc. Erlangen 1846." hervor.

Da diese Summe dem allerersten Gliede 1 der Reihe sich desto mehr nähert, je gröfser γ gegen α und β ist, so kommt alles darauf an, S_γ in $S_{\gamma+1}$ auszudrücken, um mittelst dieser Relation auch S_γ in $S_{\gamma+\nu}$ ausdrücken zu können, während $S_{\gamma+\nu}=1$ wird für $\nu=\infty$. — Man thut aber gut, statt der *unendlichen* Reihe stets eine Reihe von μ Gliedern zu nehmen, für diesen Fall die Rechnungen zu machen, und zuletzt erst $\mu=\infty$ sich zu denken, um mit der Convergenz der Reihen nicht Schwierigkeiten zu haben, während die *endlichen* Reihen, wenn man sich der so höchst einfachen „Theorie der combinat. Aggregate" bedient, wie solche im 2ten Theile des „Versuchs eines etc. etc. Systems der Mathematik, 2te Auflage," entwickelt steht, dann genau dieselben bequemen Rechnungen geben, wie wenn die Reihen *unendliche* sind. — Wir wollen uns jedoch *hier* dieses Rechnungsvortheils begeben, bekommen aber dadurch an einer Stelle die Differenz zweier unendlichen Reihen, die beide unter den gemachten Voraussetzungen nicht nothwendig convergent sind. Der geneigte Leser wolle also, im Falle sich ihm Bedenken ergeben sollten, die Rechnungen mit *endlichen* Reihen wiederholen.

Man findet, indem die Glieder der Reihe $F_{\alpha,\beta,\gamma}$ mit $\gamma-\alpha-1 = (\gamma+\mathfrak{b}-1)-(\alpha+\mathfrak{b})$ multiplicirt werden, zunächst

$$7. \quad \frac{\gamma-\alpha-1}{\gamma-1}\cdot F_{\alpha,\beta,\gamma} = F_{\alpha,\beta-1,\gamma-1},$$

und, wenn man hier $\gamma-1$ statt γ und $\beta-1$ statt α, so wie α statt β schreibt, und wenn man bedenkt, dafs die beiden erstern Elemente in F stets mit einander vertauscht werden können,

$$8. \quad \frac{\gamma-\beta-1}{\gamma-2}\cdot F_{\alpha,\beta-1,\gamma-1} = F_{\alpha-1,\beta-1,\gamma-2};$$

folglich, wenn man diese beiden Gleichungen mit einander multiplicirt,

$$9. \quad \frac{(\gamma-\alpha-1)(\gamma-\beta-1)}{(\gamma-1)(\gamma-2)}\cdot F_{\alpha,\beta,\gamma} = F_{\alpha-1,\beta-1,\gamma-2}.$$

Ferner findet sich, wenn man die (6.) mit $\frac{\beta-1}{\gamma-1}$ multiplicirt, und das Product von der (7.) subtrahirt,

$$10. \quad \frac{\gamma-\alpha-\beta}{\gamma-1}\cdot F_{\alpha,\beta,\gamma} = F_{\alpha-1,\beta-1,\gamma-1}.$$

Wird nun in (9.) $\gamma+1$, statt γ gesetzt, und das Resultat mit der (10.) verglichen, so findet sich noch

$$11. \quad F_{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{(\gamma-\alpha)\cdot(\gamma-\beta)}{\gamma\cdot(\gamma-\alpha-\beta)}\cdot F_{\alpha,\beta,\gamma+1},$$

welches die wichtige von uns gesuchte Relation ist.

Setzt man nun in sie statt γ nach und nach $\gamma+1, \gamma+2, \ldots \gamma+\nu-1$, und multiplicirt man die entstehenden Gleichungen alle mit einander und mit

der (11.), nimmt man zuletzt $\nu = \infty$, damit $F_{\alpha,\beta,\gamma+\nu} = 1$ wird, so hat man

$$12. \quad F_{\alpha,\beta,\gamma} \quad \text{oder} \quad S_\gamma = \frac{(\gamma-\alpha)^{\nu|1}\cdot(\gamma-\beta)^{\nu|1}}{\gamma^{\nu|1}\cdot(\gamma-\alpha-\beta)^{\nu|1}} \quad \text{für} \quad \nu = \infty.$$

Diese *ganzen* Factoriellen kann man nun aber nach §. 10. (⊙) oder nach (VIII.) sogleich wieder in allgemeinere Factoriellen umformen, und man findet dann ohne Weiteres

$$\text{XXXVIII.} \quad \Sigma\left(\frac{\alpha^{b|1}\cdot\beta^{b|1}}{b!\,\gamma^{b|1}}\right) = \frac{(\gamma-\alpha)^{\alpha|1}}{(\gamma-\alpha-\beta)^{\alpha|1}} = \frac{(\gamma-\beta)^{\beta|1}}{(\gamma-\alpha-\beta)^{\beta|1}} \;{}^{*)}.$$

Dies Resultat in die (5.) substituirt, und wenn statt α, β, γ wieder ihre Werthe aus (4.) gesetzt werden, giebt dann unsere gesuchte Reihe (R.), nämlich

$$\text{XXXIX.} \quad \Sigma(n_b\cdot a^{n-b|r}\cdot b^{b|r}) = a^{n|r}\cdot\frac{\left(1-\frac{a}{r}\right)^{-n|1}}{\left(1-\frac{a+b}{r}\right)^{-n|1}} = \frac{\left(-\frac{a+b}{r}\right)^{n|-1}}{\left(-\frac{a}{r}\right)^{n|-1}} = \frac{\left(1-n-\frac{a+b}{r}\right)^{n|1}}{\left(1-n-\frac{a}{r}\right)^{n|1}},$$

welches in *allen* Fällen, wo r mit $r-a-b$ einerlei Vorzeichen hat, die Summe der vorgelegten (convergenten) Factoriellen- (Binomial-) Reihe ist.

§. 17.

Ist nun

1) r *negativ*, also $-r$ *positiv*, so kann man in dem zuletzt gefundenen Ausdrucke, Zähler und Nenner mit $(-r)^n$ multipliciren und die Formel (IX.) anwenden, und dann geht sogleich

$$\text{XL.} \quad \Sigma(n_b\cdot a^{n-b|r}\cdot b^{b|r}) = (a+b)^{n|r}$$

hervor.

Ist dagegen

2) r *positiv*, so gilt dieses Verfahren nicht mehr (weil die (IX.) nur gilt, so lange das dortige h positiv ist) und man kann dann die (XXXIX.) so schreiben:

---

*) Da (nach VII.) $(\gamma-\alpha)^{\alpha|1} = \frac{1^{\gamma-1|1}}{1^{\gamma-\alpha-1|1}}$ und $(\gamma-\alpha-\beta)^{\alpha|1} = \frac{1^{\gamma-\beta-1|1}}{1^{\gamma-\alpha-\beta-1|1}}$ ist, so kann man die so eben gefundene Summe auch so schreiben:

$$\frac{1^{\gamma-1|1}\cdot 1^{\gamma-\alpha-\beta-1|1}}{1^{\gamma-\alpha-1|1}\cdot 1^{\gamma-\beta-1|1}},$$

und dies stimmt genau mit dem von *Gaufs* in der angeführten Abhandlung für dieselbe Summe gefundenen Ausdruck

$$\frac{\Pi_{\gamma-1}\cdot\Pi_{\gamma-\alpha-\beta-1}}{\Pi_{\gamma-\alpha-1}\cdot\Pi_{\gamma-\beta-1}}$$

überein.

Sind γ, $\gamma-\alpha$ und $\gamma-\beta$ auch noch positiv, so geht dieselbe Summe nach §. 4. (XIV. oder XV.) über in

$$\frac{\Gamma_\gamma\cdot\Gamma_{\gamma-\alpha-\beta}}{\Gamma_{\gamma-\alpha}\cdot\Gamma_{\gamma-\beta}}.$$

$$\Sigma(n_b\cdot a^{n-b|r}\, b^{b|r}) = (a+b)^{n|r}\cdot\frac{a^{n|r}}{(a+b)^{n|r}}\cdot\frac{\left(1-\frac{a}{r}\right)^{-n|1}}{\left(1-\frac{a+b}{r}\right)^{-n|1}},$$

d. h. (nach IX.)

$$= (a+b)^{n|r}\cdot\frac{\left(\frac{a}{r}\right)^{n|1}\cdot\left(1-\frac{a}{r}\right)^{-n|1}}{\left(\frac{a+b}{r}\right)^{n|1}\cdot\left(1-\frac{a+b}{r}\right)^{-n|1}},$$

oder (nach XXIV.)

XLI. $$\Sigma(n_b\cdot a^{n-b|r}\cdot b^{b|r}) = (a+b)^{n|r}\cdot\frac{\sin\frac{a}{r}\pi\cdot\sin\left(\frac{a+b}{r}+n\right)\pi}{\sin\left(\frac{a}{r}+n\right)\pi\cdot\sin\frac{a+b}{r}\pi}.$$

Alles dieses ist aber im §. 14. behauptet worden und nun strenge erwiesen.

§. 18.

Namentlich ist also (für $r = -1$ und $r = +1$)

XLII. $$\Sigma(n_b\cdot a^{n-b|1}\cdot b^{b|1}) = (a+b)^{n|-1}$$

für jeden *beliebigen reellen* Werth von n, wenn nur, der Convergenz wegen, $a+b+1$ positiv ist; und ferner ist noch

XLIII. $$\Sigma(n_b\cdot a^{n-b|1}\cdot b^{b|1}) = (a+b)^{n|1}\cdot\frac{\sin a\pi\cdot\sin(a+b+n)\pi}{\sin(a+n)\pi\cdot\sin(a+b)\pi}$$

für jeden *beliebigen reellen* Werth von n, wenn nur, der Convergenz wegen, $1-a-b$ positiv ist. — Dieser Ausdruck zur Rechten ist aber wieder von $(a+b)^{n|1}$ nicht mehr verschieden, so oft b oder n positiv oder negativ *ganz* ist.

Diese Resultate (XLI. und XLIII.) irgend wo bereits gesehen zu haben, erinnern wir uns nicht. — *Kramp* hält die Gleichung (XL.) noch für allgemein wahr, eben sowohl für negative wie für positive Werthe von r, welches jedoch, wie wir so eben gesehen haben, ein Irrthum ist. — *Gauſs* endlich hat in seiner, oben angeführten trefflichen Abhandlung nur die einfachste Factorielle $1^{c|1}$ betrachtet, und diese nur aus dem Gesichtspuncte einer transcendenten Function Π_c von c. Von diesem Standpuncte aus konnte der binomische Lehrsatz für Factoriellen gar nicht in Untersuchung kommen, obgleich das Material dazu auch in dieser *Gauſs*ischen Abhandlung nicht vergebens gesucht wird, sobald man nur dazu den einfacheren und freieren Standpunct erwählt hat.

§. 19.

Zu den einfachsten Mitteln bestimmte Integrale auszuwerthen, gehört noch immer die Umformung der Differential-Function in Reihen, die nachfolgende Integration dieser letzteren zwischen den vorgegebenen Grenzen, und die endliche Summation der gewonnenen Resultate, um das Endresultat wie-

derum in endlicher Form zu erhalten. — Aus diesem Gesichtspuncte haben *Kramp* (1799) und *Gauſs* (1812) in den oben angeführten Abhandlungen eine Anzahl bestimmter Integrale, der erstere in die Binomialreihe für Factoriellen, der letztere in die von ihm behandelte Reihe $\Sigma\left(\frac{\alpha^{\mathfrak{b}|1}.\beta^{\mathfrak{b}|1}}{\mathfrak{b}!\,\gamma^{\mathfrak{b}|1}}\right)$ (auf welche sich die erstgedachte Binomialreihe zurückführen läſst) ausgedrückt, während bei beiden die Summation dieser Reihen zu gebrochenen Factoriellen führt, nur daſs sie *Gauſs* weder so nennt, noch so bezeichnet, als *Kramp* es gethan. — Wir berühren dies hier nur als etwas bekanntes, heben aber besonders hervor,

daſs auf diesem Wege eine gröſsere Anzahl bestimmter Integrale in gebrochene Factoriellen also auch in Gamma-Functionen ohne Weiteres sich ausdrücken läſst, und *daſs deshalb die Theorie der Factoriellen auch die wichtigsten Eigenschaften jener neuen Transcendenten in sich schlieſst, also z. B. auch die Eigenschaften des von uns oben durch* $\varphi_{a,b}$ *bezeichneten Euler'schen Integrals 1ter Klasse* $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}.dx$.

Auch die numerische Berechnung der Gamma-Functionen entwickelt sich am einfachsten und naturgemäſsesten, wenn man sie aus dem Gesichtspuncte der Factoriellen betrachtet.

Wir wollen jedoch dies alles, wie so vieles, was sich noch daran anreiht, hier nicht weiter verfolgen, sondern eine ausführlichere Behandlung einer eigenen Schrift aufbewahren. Unser gegenwärtiger Zweck ist erreicht, wenn diese kleine Abhandlung beiträgt, das Vorurtheil zu entfernen, nach welchem die Behandlung der allgemeineren Factoriellen, als aggregirender Bestandtheil der Elemente der Analysis deshalb erlassen werden könne weil sich alle Factoriellen auf die einfachste derselben $1^{c|1}$ oder Π_c zurückführen lassen, d. h. auf eine Function eines *einzigen* Veränderlichen. — Mit gröſserem Rechte könnte man aber dann aus den Elementen auch den Gebrauch der Potenz x^x entfernen, weil sich alle Potenzen auf die *natürliche* e^y zurückführen lassen, d. h. auf die Function eines einzigen Veränderlichen, in so fern e als Basis der natürlichen Logarithmen ein bestimmter Ziffernwerth ist.

Je mehr die Wissenschaften mit der Zeit aus einander gehen und sich vereinzeln, desto mehr thut es Noth, daſs von Zeit zu Zeit der Versuch gemacht werde, ob sich nicht das scheinbar Vereinzelte und Getrennte auch wieder einem organisch gegliederten Ganzen anreihen lasse. Erst nachdem dieses geglückt ist, kann man sich des sicheren und bleibenden Besitzes desselben erfreuen.

Berlin, im März 1848.

18.

Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

(Von Hrn. Dr. *Öttinger*, Prof. ord. an der Universität zu Freiburg im Br.)

(Schlufs des Aufsatzes No. 16. und No. 21. im 26ten, No. 17. und 22. im 30ten, No. 8. im 34ten und No. 14. in diesem Bande.)

---

§. 46.

Die in dem vorigen Paragraph gefundenen Gleichungen geben das Mittel, die Frage zu entscheiden: Ist es vortheilhaft eine Summe S, die im günstigen Fall bei der Wahrscheinlichkeit $w_1 = \frac{p}{q}$ gewonnen und im ungünstigen Fall bei der Wahrscheinlichkeit $w_2 = \frac{r}{q}$ verloren werden kann, um deren Besitz oder Nicht-Besitz es sich also handelt, an ein einzelnes Unternehmen zu wagen, oder sie auf mehrere (n), unter den nämlichen Bedingungen des Gelingens und Mifslingens, zu vertheilen?

Der jedem einzelnen Unternehmen zuzuweisende Theil sei $x = \frac{S}{n}$. Die auf einmal zu wagende Summe ist also $S = nx$. Um nun die Frage zu beantworten, ist nöthig, den Werth der subjectiven Hoffnung für beide Fälle zu ermitteln und unter sich zu vergleichen.

Setzt man die Summe auf einmal, so hat man die Aussicht, entweder nx, oder Nichts zu erhalten. Der Werth der subjectiven Hoffnung in Beziehung auf den Besitz K ist demnach, wenn man die Gleichung (1.) §. 45. nimmt:

$$1. \quad H = w_1 \int \frac{\partial x}{K+nx}.$$

Vertheilt man die Summe $S = nx$ auf n Fälle, so können entweder alle, oder $n-1$, oder $n-2$, ... 3, 2, 1 günstig sein. Man kann also entweder n, oder $n-1$, oder $n-2$, ..., oder 1mal die Summe x, oder Nichts erhalten. Die Wahrscheinlichkeiten, diese Gewinne zu erlangen, sind

$$w_1^n, \quad n w_1^{n-1} w_2, \quad \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} w_1^{n-2} w_2^2, \quad \dots \quad n w_1 w_2^{n-2}.$$

Hieraus ergiebt sich, auf dieselbe Weise wie in (1.), für den Werth der subjectiven Hoffnung in den aufgezählten Fällen:

$$H_1 = w_1^n \int \frac{\partial x}{K+nx} + n w_1^{n-1} w_2 \int \frac{\partial x}{K+(n-1)x} + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} w_1^{n-2} w_2^2 \int \frac{\partial x}{K+(n-2)x} + \dots$$
$$\dots + \frac{n^{n-2|-1}}{1^{n-2|1}} w_1^2 w_2^{n-2} \int \frac{\partial x}{K+2x} + n w_1 w_2^{n-1} \int \frac{\partial x}{K+x},$$

oder, anders ausgedrückt:

$$2.\quad H_1 = w_1 \int \frac{\partial x}{K+nx} \Big[w_1^{n-1} + n w_1^{n-2} w_2 \frac{K+nx}{K+(n-1)x} + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} w_1^{n-3} w_2^2 \frac{K+nx}{K+(n-2)x} + \dots$$

$$\dots + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} w_1 w_2^{n-1} \frac{K+nx}{K+2x} + n w_2^{n-1} \frac{K+nx}{K+x} \Big].$$

Der Werth der in den Klammern (Nr. 2.) eingeschlossenen Reihe ist offenbar gröfser als $(w_1+w_2)^{n-1} = 1$, folglich ist auch der Werth von (2.) gröfser als der von (1.). Dasselbe hätte sich ergeben, wenn man die Ausdrücke (5. und 6. §. 45.) zu Grund gelegt hätte. Für diesen Fall ist der Werth der subjectiven Hoffnung in Beziehung auf den Besitz K:

$$3.\quad H = w_1 \log(K+nx) \quad \text{und}$$

$$4.\quad H = w_1^n \log(K+nx) + n w_1^{n-1} w_2 \log(K+(n-1)x)$$

$$\dots + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} w_1^{n-2} w_2^2 \log(K+(n-2)x) + \dots$$

$$+ \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} w_1^2 w_2^{n-2} \log(K+2x) + n w_1 w_2^{n-1} \log(K+x).$$

Werden die Ausdrücke (3. und 4.) in Reihen entwickelt, summirt und verglichen, so ergiebt sich auf gleiche Weise, dafs der Werth von (4.) gröfser als der von (3.) ist. Es ist einleuchtend, dafs der Werth von (2.) den von (1.) um so mehr übertrifft, je gröfser n ist. Dies rechtfertigt folgende Behauptung:

5. Der Werth der subjectiven Hoffnung ist gröfser, wenn eine zu wagende Summe auf mehrere Fälle vertheilt, als wenn sie auf einen einzigen gewagt wird; vorausgesetzt, dafs nach den obigen Bedingungen die Wahrscheinlichkeit des Gelingens im einzelnen Falle unverändert dieselbe bleibt.
6. Der Werth der subjectiven Hoffnung ist um so gröfser, je gröfser die Anzahl der Fälle ist, auf welche die zu wagende Summe vertheilt wird.

Es ist demnach rathsam, grofse Summen nicht auf einmal zu wagen, und seinen Besitz nicht auf einen Punct zu concentriren. Ein Speculant wird es vorzuziehen haben seinen Besitz, oder einen grofsen Theil davon, nicht auf einmal aufs Spiel zu setzen, sondern nach einander, oder gleichzeitig, auf verschiedene Weise.

Diese Resultate unterscheiden sich wieder wesentlich von denen in (§. 41.). Der Werth der *objectiven* Hoffnung kennt keinen Unterschied.

Es läfst sich nun auch die Frage entscheiden, ob es rathsam sei, in Assecuranz-Gesellschaften zu treten, um sich durch eine bestimmte Einlage gegen künftigen Schaden zu sichern.

Ist K der Besitz einer Person, welche die Summe S sicher gewinnen kann, wenn sie sich durch Einzahlung der Summe B in eine Versicherungsgesellschaft gegen möglichen Schaden schützt, so ist der künftige sichere Besitz

$$1.\quad K+S-B.$$

Ist die Aussicht vorhanden, die Summe S mit der Wahrscheinlichkeit w_1 zu gewinnen und mit der Wahrscheinlichkeit $1-w_1=w_2$ zu verlieren, so ist der Werth der subjectiven Hoffnung nach (7. und 8. §. 45.)

$$2.\quad H = w_1 \log(K+S)+w_2\log(K-S)$$

oder, nach (10. §. 45.),

$$3.\quad H = \log K+(w_1-w_2)\frac{S}{K}-(w_1+w_2)\frac{S^2}{2K}+(w_1-w_2)\frac{S^3}{3K^3}-$$

Der Werth von (1.), durch Logarithmen ausgedrückt, ist

$$4.\quad H_1 = \log K+\frac{S-B}{K}-\frac{(S-B)^2}{2K^2)}+\frac{(S-B)^3}{3K^3}-\dots.$$

Wird der Werth von B nach der Gefahr, die zu versichernde Summe S zu verlieren, bestimmt, so ist nach (3. §. 38.) $B=w_2S$. Wird dieser Werth statt B in (4.) gesetzt, so geht dieser Ausdruck über in

$$5.\quad H_1 = \log K+\frac{w_1S}{K}-\frac{w_1^2S^2}{2K^2}+\frac{w_1^3S^3}{3K^3}-\dots.$$

Der Werth von (5.) ist offenbar gröfser als der von (3.). Es zeigt sich also, dafs der Eintritt in Versicherungsgesellschaften zum Schutze gegen möglichen Schaden *vortheilhaft* ist.

§. 47.

So wie der Werth der subjectiven Hoffnung in Beziehung auf Individuen ermittelt wurde, kann er auch in Beziehung auf Versicherungsgesellschaften, den Theilnehmern gegenüber, untersucht werden.

Das Vermögen einer Gesellschaft sei K, die zu versichernde Summe S; w_1 die Wahrscheinlichkeit, dafs das Unternehmen glücklich ausfalle, oder die Einlage zu behalten, $w_2=1-w_1$ die entgegengesetzte, oder die, dafs das Unternehmen mifslinge und die Summe ausgezahlt werden müsse. Die Einlage, welche der Einkäufer der Gesellschaft zu zahlen hat, sei $B=w_2S$; nach dem Maafse der objectiven Hoffnung (3. §. 38.).

Endet das Unternehmen günstig, so kommt die Gesellschaft in den Besitz $K+B=K+w_2S$. Endet es ungünstig, so hat sie die Summe S zu zahlen und ihr Besitz wird $B-(S-B)=K-(S-w_2B)=K-w_1S$. Demnach ist der Werth der subjectiven Hoffnung für die Gesellschaft

$$H = (K+B)^{w_1}(K-(S-B))^{w_2} = (K+w_2S)^{w_1}(K-w_1S)^{w_2}.$$

Nun ist unter diesen Voraussetzungen, nach (11. §. 45.), der Werth der subjectiven Hoffnung kleiner als der ursprüngliche Besitz. Soll daher eine Gesellschaft nicht zurückkommen, so mufs dieser Unterschied zu der oben bezeichneten Einlage, welche durch die objective Hoffnung bedingt wird, aufgehoben werden. Nennt man diesen Zuschufs D, so ist

$$1.\qquad D = K-(K+w_2S)^{w_1}(K-w_1S)^{w_2}.$$

Hieraus ergiebt sich für die Gröfse des Einkaufspreises M:

$$2.\qquad M = B+D = w_2S+K-(K+w_2S)^{w_1}(K-w_1S)^{w_2}.$$

Entwickelt man das Product rechts in der Gleichung (1.) in Logarithmen und vergleicht das Resultat der Entwicklung mit $\log K$, so findet sich

$$3.\qquad w_1\log(K+w_2S)+w_2\log(K-w_1S)$$
$$= \log K-\frac{(w_1w_2^2+w_2w_1^2)S^2}{2K^2}+\frac{(w_1w_2^3-w_2w_1^3)S^3}{3K^3}-\frac{(w_1w_2^4+w_2w_1^4)S^4}{4K^4}+\dots$$

Daraus folgt, dafs sich der Werth von $(K+w_2S)^{w_1}(K-w_1S)^{w_2}$ der Gröfse K um so mehr nähert, je stärker die Reihe (3.) convergirt. Die Convergenz von (3.) ist bei unverändertem w_1 und w_2 um so gröfser, je gröfser K im Verhältnisse zu S ist. Je näher aber der Werth von $(K+w_1S)^{w_1}(K-w_1S)^{w_2}$ der Gröfse K liegt, desto kleiner wird D in (1.) sein. Dies führt zu folgendem Satze:

4. Eine Gesellschaft kann um so leichter die Versicherung einer Summe übernehmen, je gröfser ihr Besitz im Verhältnifs zu der versicherten Summe, oder je kleiner die versicherte Summe ist.

5. Der Einkaufspreis, welchen eine Gesellschaft fordert, kann um so niedriger gestellt werden, je gröfser der Besitz der Versicherungsbank ist.

Für Jeden, der eine bestimmte Summe versichern will, ist es daher vortheilhaft, mit einer Gesellschaft von nicht geringen Mitteln in Verbindung zu treten.

Keine Gesellschaft wird eine Versicherung ohne Aussicht auf Gewinn oder Lohn für ihre Mühe übernehmen. Macht sie denselben von bestimmten Procenten (0,0p) der zu versichernden Summe S abhängig, so ist der Einkaufspreis sammt diesen Procenten:

$$6.\qquad M_1 = m+S.0{,}0p = w_2S+K-(K+w_2S)^{w_1}(K-w_1S)^{w_2}+0{,}0p.S.$$

Die Summe 20 000 z. B. soll bei einer Gesellschaft, die ein Vermögen von 100 000 G. besitzt, versichert werden. Die Wahrscheinlichkeit, dafs das Unternehmen glücklich ausfalle, ist $\frac{1}{2}$. Nach (2.) ist die Gröfse des Einkaufspreises

$$M = 100000-\sqrt{9900000000}+10000 = 10502.$$

Hätte die Gesellschaft ein Vermögen von 200000 G., so wäre der Preis nach (2.) 10251.

Endlich kann man fragen, ob es vortheilhafter sei, sich mit Andern zu verbinden, um eine Summe zu wagen, oder ob besser, allein aliquote Theile dieser Summe einzusetzen.

n Personen treten zu einer gemeinschaftlichen Unternehmung zusammen. Jede giebt das Capital K her, so dafs das Gesammtcapital nK ist. Die Summe S kann mit der Wahrscheinlichkeit w_1 gewonnen und mit $w_2 = 1 - w_1$ verloren werden. Wie grofs ist der Werth der subjectiven Hoffnung für den Einzelnen?

Aus (13. §. 45.) ergiebt sich für den Werth der subjectiven Hoffnung in Beziehung auf das Gesammt-Capital:

$$H = (nK+S)^{w_1}(nK-S)^{w_2},$$

und hieraus folgt für jeden einzelnen Theilnehmer

$$7. \quad H_1 = \frac{(nK+S)^{w_1}(nK-S)^{w_2}}{n} = \frac{(nK+S)^{w_1}(nK-S)^{w_2}}{n^{w_1}.n^{w_2}} = \left(K+\frac{S}{n}\right)^{w_1}\left(K-\frac{S}{n}\right)^{w_2}.$$

Der Werth der subjectiven Hoffnung *einer* Person, die mit einem Capitale K die Summe $\frac{S}{n}$ unter den nämlichen Bedingungen gewinnen oder verlieren kann, ist

$$8. \quad H_1 = \left(K+\frac{S}{n}\right)^{w_1}\left(K-\frac{S}{n}\right)^{w_2}.$$

Es ist also zwischen (7. und 8.) kein Unterschied, und die Verbindung mit mehreren Personen zur Ausführung eines gemeinschaftlichen Unternehmens hat weder Vortheil noch Nachtheil.

Das Zusammentreten zu Gesellschaften kann aber dann einen entschiedenen Vortheil haben, wenn die Mittel des Einzelnen zur Ausführung eines Unternehmens nicht hinreichen. Reichen sie hin, so kann es aus andern leicht begreiflichen Gründen vortheilhaft sein, nicht einer Gesellschaft beizutreten, sondern das Unternehmen allein auszuführen.

§. 48.

Hierher gehört endlich ein Problem, welches *Nicolaus Bernoulli* in einem an *Montmort* gerichteten Briefe vom 9ten Sept. 1713 aufstellte, der in *Montm.* Essai d'anal. s. l. jeux d. haz. II éd. Par. 1704 pg. 401 abgedruckt ist. Es hat die Aufmerksamkeit der Mathematiker erregt. *Dan. Bernoulli* (Comment. Academ. scient. imperial. petropolit. T. V ad annos 1730 et 1731 pg. 181 seqq. specim. theoriae novae d. mensura sortis), *Kramer* (a. a. O. pg. 189), *Laplace*

(Théor. anal. d. probab. pg. 239 3me éd.), *Lacroix* (Wahrscheinlichkeits-Rechnung §. 76.) haben es behandelt. Es ist auch unter dem Namen „Das Petersburger Problem" bekannt (*Lacr.* a. a. O.). Dasselbe wird gegenwärtig unter folgender Form gegeben.

A und *B* spielen mit einander. *A* wirft eine Münze in die Höhe, die mit Kopf und Wappen bezeichnet ist und zahlt an *B* zweimal eine bestimmte Einlage, wenn das Wappen beim ersten Wurfe, viermal wenn es beim zweiten, achtmal wenn es beim dritten Wurfe fällt u. s. w. Welches ist der Werth der Erwartung für *B*, oder wie viel hat er einzulegen, wenn er das Spiel annehmen will? Die Form des Problems, unter welcher *N. Bernoulli* es a. a. O. gab, ist folgende:

IV. Probl. *A* promet de donner un écu à *B*, si avec un dé ordinaire il amène au premier coup six points; deux écus, s'il amène le six au second, trois écus, s'il amène ce point au troisième, et ainsi de suite. On demande: quelle est l'espérance de *B*.

V. Probl. On demande la même chose, si *A* promet à *B*, de lui donner des écus en cette progression 1, 2, 4, 8, 16, ... ou 1, 3, 9, 27, ... ou 1, 4, 9, 16, ... ou 1, 8, 27, 64, ... au lieu de 1, 2, 3, 4, ..., comme auparavant.

Die Aufgabe ist nach unserer Ansicht unbestimmt und daher in dieser Form unzulässig, denn sie hat keine bestimmte Bedeutung, wie es bei einer richtig gestellten Aufgabe immer der Fall sein mufs. Es findet eine doppelte Unbestimmtheit Statt, denn es ist nicht angegeben, wie lange das Spiel dauern soll, und nicht angegeben, in welchem Zusammenhange die einzelnen Fälle untereinander stehen. Wie soll aber der Calcul an eine unbestimmte Aufgabe gelegt werden? und wer wird sich in ein Spiel einlassen, dessen Ende unbestimmt ist.

Um diese Frage zu behandeln, ist es nöthig, ihr, dem eben Gesagten gemäfs, einen bestimmten Inhalt zu geben. Wir entnehmen folgende verschiedene Bedeutungen aus ihr:

a) *A* und *B* spielen mit einander. Eine Münze wird $n$mal in die Höhe geworfen. *B* erhält zwei Stücke einer Münze, wenn das Wappen gerade beim ersten, vier wenn es gerade beim zweiten, acht wenn es gerade beim dritten Wurfe u. s. w., 2^n Stücke wenn es gerade beim $n$ten Wurfe fällt. Das Wappen darf nur einmal fallen. Welches ist der Werth der Erwartung?

b) *A* und *B* spielen auf den Wurf einer Münze. *B* erhält zwei Stücke, wenn das Wappen gerade beim ersten, vier wenn es gerade beim zweiten,

acht wenn es gerade beim dritten Wurfe fällt u. s. w. So oft das Wappen fällt, wird ihm die Summe aller zugeordneten Stücke eingehändigt. n Würfe werden gemacht. Welches ist der Werth der Erwartung für B?

c) A und B spielen auf den Wurf einer Münze. B erhält zwei Stücke, wenn das Wappen beim ersten, vier wenn es beim zweiten Wurfe fällt u. s. w., n Würfe werden ausbedungen. Das Spiel endet, wenn das Wappen gefallen ist. Welches ist der Werth der Erwartung für B.

Auflösung der ersten Aufgabe.

Nach dem Sinne dieser Aufgabe werden n Würfe (nicht mehr, nicht weniger) gemacht. n günstige Fälle sind für B möglich: Entweder fällt das Wappen gerade beim ersten, oder gerade beim zweiten u. s. f., oder gerade beim $n$ten Wurfe. Hiebei wird vorausgesetzt, dafs das Wappen weder bei einem frühern, noch bei einem spätern Wurfe fallen werde. Ist nun die Wahrscheinlichkeit, dafs das Wappen beim einzelnen Wurfe fallen werde, $\frac{1}{2}$, so ist die Wahrscheinlichkeit für jeden von den genannten günstigen Fällen $\frac{1}{2^n}$ und der Werth der Erwartung ergiebt sich, wenn der Satz (2. §. 35.) auf jeden einzelnen Fall angewendet wird und die erhaltenen Werthe zusammengezählt werden. Wird der Werth des zu erhaltenden Silberstücks durch G angedeutet, so ist der Werth der Erwartung

$$1. \quad E = \frac{2G}{2^n} + \frac{2^2 G}{2^n} + \frac{2^3 G}{2^n} + \ldots \frac{2^n}{2^n} G = 2G - \frac{G}{2^{n-1}}.$$

Auflösung der zweiten Aufgabe.

Es werden n Würfe gemacht und folgende Fälle können eintreten. Das Wappen fällt $n$mal, oder $(n-1)$mal und der Kopf 1mal, oder $(n-2)$mal und der Kopf 2mal u. s. w., oder 1mal und der Kopf $(n-1)$mal.

a) Das Wappen fällt $n$mal. Die Wahrscheinlichkeit hiefür ist $\frac{1}{2^n}$. In diesem Falle ist der Gewinn $(2+2^2+2^3+\ldots 2^n)G = (2^{n+1}-2)G$. Der Werth der Erwartung ist

$$E_1 = \frac{2^{n+1}-2}{2^n} G = 2G - \frac{G}{2^{n-1}}.$$

b) Das Wappen fällt $(n-1)$mal und der Kopf einmal. Letzteres kann beim ersten, zweiten oder dritten Wurfe u. s. w. geschehen. Die Gewinne fehlen der Reihe nach einmal. Die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen der einzelnen Fälle sind gleich, und $\frac{1}{2^n}$. Demnach ist der Werth der Erwartung

$$E_2 = \frac{1}{2^n}(n-1)(2^{n+1}-2)G = (n-1)2G - \frac{(n-1)G}{2^{n-1}}.$$

c) Das Wappen fällt $(n-2)$mal und der Kopf zweimal. Die Wahrscheinlichkeiten sind auch hiefür $\frac{1}{2^n}$. Je zwei Gewinne fehlen. Es kommt daher jeder Gewinn so oft vor, als sich zwei Gewinne in $n-1$ Fächer vertheilen lassen. Danach ist der Werth der Erwartung

$$E_3 = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{(n-1)^{2|-1}}{1^{2|1}}(2^{n+1}-2) = \frac{(n-1)^{2|-1}}{1^{2|1}} 2G - \frac{(n-1)^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot \frac{G}{2^{n-1}}.$$

Wird diese Schlufsweise weiter fortgesetzt, so ergiebt sich folgende Zusammenstellung:

$$E = G\left[2+(n-1)2+\frac{(n-1)^{2|-1}}{1^{2|1}}2+\frac{(n-1)^{3|-1}}{1^{3|1}}2+\ldots\frac{(n-1)^{n-1|-1}}{1^{n-1|1}}\right]$$
$$-G\left[\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{n-1}{2^{n-1}}+\frac{(n-1)^{2|-1}}{1^{2|1}2^{n-1}}+\ldots\frac{1}{2^{n-1}}\right].$$

Reducirt man das in diesen Reihen enthaltene Binomium, so ergiebt sich für den Werth der Erwartung

$$2. \quad E = (2^n-1)G.$$

Diese Aufgabe läfst sich auch auf nachstehende ganz einfache Weise lösen, wenn folgende, mit ihr gleich geltende Aufgabe an ihre Stelle gesetzt wird.

B spielt mit *n* Personen, und zwar mit jeder besonders. Mit A_1 unter der Bedingung, zwei Stücke $(2G)$ zu erhalten, wenn das Wappen fällt, von A_2 vier, von A_3 acht u. s. w. *B* wirft eine Münze für jede Person, also *n*mal in die Höhe; der erste Wurf gilt für A_1, der zweite für A_2 u. s. w. Ehe das Spiel beginnt, soll jeder seine Einlage aussetzen und *B* die seinige ihr entgegen. Wie viel hat jeder Theilnehmer und wie viel hat *B* Allen zusammen entgegen zu setzen?

Die Wahrscheinlichkeit, im einzelnen Falle zu gewinnen, ist $\frac{1}{2}$, wenn *ein* Theilnehmer zum Spiele gelangt ist. Das Gelangen zum Spiele unterliegt keinen Zweifel. Die Gröfse der Einlage findet sich nach (2. §. 25.). Alle Theilnehmer zusammen machen daher die Einlage

$$3. \quad E = \tfrac{1}{2}(2G+2^2G+2^3G+2^4G+\ldots 2^nG) = (2^n-1)G.$$

Die gleiche Einlage hat *B* entgegenzustellen. Sie kommt mit dem Werthe seiner Erwartung überein. Die Gleichungen (2. und 3.) geben einerlei Resultat.

Auflösung der dritten Aufgabe.

Nach den Bedingungen der dritten Aufgabe kann nur einmal gewonnen werden, und zwar entweder im 1ten, oder im 2ten, oder 3ten Wurfe u. s. w. Die Wahrscheinlichkeit, in einem *bestimmten* Wurfe zu gewinnen, setzt vor-

aus, dafs in keinem der vorhergehenden gewonnen werde. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten sind:

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \frac{1}{2^4},\ \ldots\ \frac{1}{2^n}.$$

Hieraus ergiebt sich leicht nach (2. §. 35) für den Werth der Erwartung für *B*:

$$4.\quad E = \frac{2G}{2} + \frac{2^2G}{2^2} + \frac{2^3G}{2^3} + \ldots \frac{2^nG}{2^n} = nG.$$

Die Probleme (*a*, *b*, *c*) gelten, wenn $w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$ ist. Sie lassen sich leicht ins Allgemeine und auf den Fall ausdehnen, wenn $w_1 = 1 - w_2$ ist. Es ergeben sich dann aus (1., 2. und 4.) folgende Ausdrücke:

$$5.\quad E = w_1 w_2^{n-1}(G_1 + G_2 + G_3 + \ldots G_n),$$

$$6.\quad E = w_1(G_1 + G_2 + G_3 + \ldots G_n),$$

$$7.\quad E = w_1(G_1 + w_2 G_2 + w_2^2 G_3 + w_2^3 G_4 \ldots + w_2^{n-1} G_n).$$

Hier haben G_1, G_2, G_3, ... G_n ganz willkürliche Werthe.

Diese Erörterungen werden gezeigt haben, inwiefern das von *N. Bern.* aufgestellte Problem unbestimmt und unzuläfslich genannt werden kann. Drei Fälle wurden aus ihm abgeleitet, deren jeder einen bestimmten Inhalt und Bedeutung hatte. Welches ist nun der richtige? Keine Bemerkung ist im Probleme enthalten, woraus sich dies entscheiden liefse. *Bern.* selbst hat keine Auflösung gegeben, woraus es gefolgert werden könnte. Vielleicht hat er den Fall (*c*) im Auge gehabt. Danach hat wenigstens *Kramer* a. a. O. die Aufgabe behandeln zu müssen geglaubt; er liefs jedoch die Beschränkung auf eine bestimmte Zahl von Versuchen aufser Acht. Da er jedoch die Nothwendigkeit davon fühlte, so wollte er die Vorfrage erörtern, nach welchem Versuche das Spiel geendet sein würde, übersah aber dabei den Begriff und Zweck der Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche die Frage nie zur Entscheidung bringen kann. Er nahm für die wahrscheinliche Dauer des Spieles 24 Würfe an. Dieser Annahme, die ganz willkürlich ist, könnte die Laune des Zufalls mit Erfolg spotten. Zudem pafst die Annahme nur für den besondern Fall (4.), nicht für den allgemeinen (7.). *Dan. Bern.* nimmt die Zahl der Würfe unendlich grofs an. Dies thut auch *Laplace*, bemerkt jedoch, dafs Niemand von einiger Überlegung eine auch nur mäfsige Summe in einem solchen Spiele wagen und die Rolle des Gebers übernehmen werde. Alle, welche die Aufgabe behandelten, fanden Ungereimtes in ihr, und wohl nur aus dem Grunde, weil es in ihr liegt. Die Unbestimmtheit fällt weg, wenn man die Bemerkungen (*a*, *b*, *c*) beachtet. Nimmt man die Zahl der Würfe in (*c*) sehr grofs, oder gar unendlich grofs

an, so müfste der Spieler B 32768G erhalten, wenn er gerade im 15ten, 65536 G, wenn er gerade im 16ten Wurfe gewänne u. s. w. Wäre die Zahl der Würfe unbegrenzt, so wäre $n = \infty$ und der Werth der Erwartung oder die Einlage von B wäre

$$8. \quad E = \infty G,$$

aber Niemand könnte eine unendlich grofse Summe als Einlage bieten.

Diese Bemerkungen gelten nicht blofs von der *objectiven*, sondern auch von der *subjectiven* Hoffnung. Man betrachte zuerst den Werth der subjectiven Hoffnung von A (dem Gegner von B) für den Fall wo n Würfe gemacht werden.

Um diesen Werth zu finden, ist zu bemerken, dafs die Einlage, welche B zu machen hat, dem Werthe seiner objectiven Hoffnung nG gleichkommt. Der hieraus sich ergebende Besitz von A ist $K+nG$. Wird nun geworfen, so kann A im ersten, zweiten oder dritten Wurfe u. s. w., oder auch gar nicht verlieren. Danach ist der Werth der subjectiven Hoffnung

$$9. \quad H = (K-2G)^{\frac{1}{2}}(K-2^2G)^{\frac{1}{2^2}}(K-2^3G)^{\frac{1}{2^3}}\dots(K-2^nG)^{\frac{1}{2^n}}(K+nG)^{\frac{1}{2^n}}.$$

Die Aufgabe hat also einen Sinn, so lange $K-2^kG>0$ ist. Wird dagegen $K-2^kG$ eine negative Gröfse, so ist der Werth von (9.) imaginär, denn

$$\sqrt[2^k]{(K-2^kG)}$$

ist in diesem Fall imaginär und die Aufgabe ist ungereimt. Aus (9.) zeigt sich, dafs das Spiel für A unter jeder Bedingung nachtheilig und bei unendlich grofsem n, oder bei unbestimmter Fortsetzung, unmöglich ist. Das Spiel ist um so weniger nachtheilig, je kleiner n ist. So ist der Werth der subjectiven Hoffnung für A, wenn $n=1$, $K=100$ ist, $H=99,4887\dots$; für $n=2$ ist $H=98,476\dots$

Der Werth der subjectiven Hoffnung für B ist, wenn er die Einlage nG gemacht hat, da er entweder im ersten, oder zweiten, oder dritten u. s. w., oder $n$ten Wurfe, oder auch gar nicht gewinnen kann:

$$10. \quad H = (K-nG+2G)^{\frac{1}{2}}(K-nG-2^2G)^{\frac{1}{4}}\dots(K-nG+2^nG)^{\frac{1}{2^n}}(K-nG)^{\frac{1}{2^n}}$$

$$= K\left(1-\frac{n-2}{K}G\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{n-2^2}{K}G\right)^{\frac{1}{4}}\dots\left(1-\frac{n-2^n}{K}G\right)^{\frac{1}{2^n}}\left(1-\frac{nG}{K}\right)^{\frac{1}{2^n}}.$$

Vergleicht man hier die Werthe zweier Nachbarglieder, so findet sich

$$(K-nG+2^kG)^{\frac{1}{2^k}} : (K-nG+2^{k+1}G)^{\frac{1}{2^{k+1}}}.$$

Werden beide in die 2^{k+1} Potenz erhoben, so ergiebt sich

$$(K-nG+2^k)^2:(K-nG+2^{k+1}G)$$
$$=(K-nG)^2+2(K-nG)2^kG+2^{2k}G^2:K-nG+2^{k+1}G,$$

und es zeigt sich, dafs die Werthe der Glieder abnehmen. Der Werth von (10.) ist so lange möglich, als $1-\frac{nG}{K}>0$ ist. Wird $\frac{nG}{K}>1$, so liegt in der Aufgabe eine Unmöglichkeit.

Berechnet man in (10.) den Werth der subjectiven Hoffnung für B, so findet sich, wenn $K=100$ und $n=1$ ist, $H=99{,}995\ldots$; für $n=2$ ist $H=99{,}9900,\ldots$; für $n=3$ ist $H=99{,}9753\ldots$. Man sieht hieraus, dafs unter gleichen Bedingungen dies Spiel für den Bankhalter viel nachtheiliger ist, als für den Spieler.

Mit diesen Erörterungen stimmen theilweise die Bemerkungen überein, welche *Fries* in seiner Critik der Principien der Wahrscheinlichkeits-Rechnung (Braunschweig 1842) macht. Doch dürften die von ihm aufgestellten Behauptungen nicht allgemein und überall gelten; denn sonst würden die nämlichen Bemerkungen auch gegen den Begriff der mathematischen Hoffnung gerichtet werden können. Aus ihr können zuletzt auch nur leitende Rathschläge gegeben werden, und es ist auch hier zu merken, dafs zu weit geführte Schlüsse nicht immer das Richtige geben.

Bemerkung zu §. 8.

Die in diesem Paragraph mitgetheilten Formeln für die Summen der Verbindungen mit und ohne Wiederholungen aus jeder Art von Elementen, welche in der angeführten Schrift entwickelt sind, beruhen zum Theil selbst wieder auf der Darstellung der Summen-Ausdrücke für die Verbindungen aus den Elementen $1, 2, 3, \ldots q$. Für diese ist daher eine unabhängige Darstellung nöthig. Eine solche ist, aufser den angegebenen, schon in meinem Differenzen-Calcul S. 224 u. ff. gegeben, die sich ganz besonders zur leichten Darstellung der erforderlichen Summen-Ausdrücke eignet. Da sie dort in einer nicht ganz zweckmäfsigen Form gegeben ist, so stellen wir sie unter folgender zweckmäfsigeren auf:

$$1. \quad SC'(1,2,\ldots q)^m \frac{1^{m+q|1}}{1^{q|1}} P'\left(s(m+q); \frac{1}{1^{1|1}}, \frac{1}{1^{2|1}}, \frac{1}{1^{3|1}}, \ldots \frac{1}{1^{m+1|1}}\right)^q.$$

Hiebei ist zu bemerken, dafs die Versetzungen mit Wiederholungen zur Summe $(m+q)$ in der $q$ten Classe aus den angedeuteten Facultäten, deren Exponenten als Elemente dienen, gebildet werden müssen. Die vorliegende Aufgabe

scheint eine unbestimmte zu sein, ist es aber nicht, wenn man den in 32. S. 28 der Comb. Lehre aufgestellten Satz in Anwendung bringt, dann die Versetzungen mit Wiederholungen zu einer bestimmten Summe auf die Verbindungen mit Wiederholungen zu verschiedenen Summen zurückführt und die Anzahl der Versetzungen, wie oft die fraglichen Wiederholungen vorkommen sollen, angiebt. Die hiedurch nöthig werdenden Untersuchungen und Veränderungen führen zu folgendem entwickelten, ganz allgemeinen Ausdruck:

$$2.\quad SC'(1,2,\ldots q)^m$$

$$= (q+1)^{m|1}\Big[\frac{q}{1^{m+1|1}} + q^{2|-1}\Big(\frac{1}{1^{m|1}.1^{2|1}} + \frac{1}{1^{m-1|1}.1^{3|1}} + \frac{1}{1^{m-2|1}.1^{4|1}} + \ldots\Big)$$

$$+ q^{3|-1}\Big(\frac{1}{1^{m-1|1}1^{2|1}1^{2|1}\times 1^{3|1}} + \frac{1}{1^{m-2|1}1^{4|1}1^{2|1}} + \frac{1}{1^{m-3|1}1^{4|1}1^{2|1}} + \ldots\Big)$$

$$+ q^{4|-1}\Big(\frac{1}{1^{m-2|1}1^{2|1}1^{2|1}1^{2|1}\times 1^{3|1}} + \frac{1}{1^{m-3|1}1^{3|1}1^{2|1}1^{2|1}\times 1^{2|1}} + \ldots\Big)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ q^{m-1|-1}\frac{1}{1^{3|1}(1^{2|1})^{m-2}\times 1^{m-2|1}}$$

$$+ q^{m|-1}\frac{1}{(1^{2|1})^m\times 1^{m|1}}.$$

Hier sind die Verbindungen mit Wiederholungen zur 1ten, 2ten, 3ten, ... $m$ten Classe aus den Elementen $\frac{1}{1^{2|1}}$, $\frac{1}{1^{3|1}}$, $\frac{1}{1^{4|1}}$, ... $\frac{1}{1^{m+1|1}}$ nöthig; der Reihe nach zur Summe $m+1$, $m+2$, $m+3$, ... $2m$. Kommt eine Facultät mit dem nämlichen Exponenten mehreremal vor, so mufs dies bei dem Aufzählen der Anzahl der Versetzungen in Rechnung gebracht werden. Dies ist durch das Zeichen ($\times$) geschehen. Setzt man nun der Reihe nach 1, 2, 3, ... statt m in (2.), so hat man, ohne alle schwierige Rechnung oder grofse Vorbereitung, folgende Ausdrücke:

$$3.\quad \begin{cases} SC'(1,2,3,\ldots q)^1 = \frac{q^{2|1}}{1^{2|1}}, \\ SC'(1,2,3,\ldots q)^2 = [1+\frac{1}{2}(q-1)]\frac{q^{3|1}}{1^{3|1}}, \\ SC'(1,2,3,\ldots q)^3 = [1+2(q-1)+\frac{1}{2}(q-1)^{2|-1}]\frac{q^{4|1}}{1^{4|1}}, \\ SC'(1,2,3,\ldots q)^4 = [1+\frac{35}{6}(q-1)+\frac{5}{2}(q-1)^{2|-1}+\frac{5}{16}(q-1)^{3|-1}]\frac{q^{5|1}}{1^{5|1}}, \\ SC'(1,2,3,\ldots q)^5 = [1+8(q-1)+\frac{35}{4}(q-1)^{2|-1}+\frac{5}{2}(q-1)^{3|-1}+\frac{3}{16}(q-1)^{4|-1}]\frac{q^{6|1}}{1^{6|1}}, \end{cases}$$

$$3.\quad\begin{cases} SC'(1,2,3,\ldots q)^6 = [1+\frac{119}{8}(q-1)+\frac{969}{36}(q-1)^{2|-1}+\frac{106}{8}(q-1)^{3|-1}+\frac{35}{6}(q-1)^{4|-1} \\ \qquad \frac{7}{64}(q-1)^{5|-1}]\,\frac{q^{7|1}}{1^{7|1}}, \\ SC'(1,2,3,\ldots q)^7 = [1+\frac{82}{3}(q-1)+\frac{455}{6}(q-1)^{2|-1}+\frac{518}{9}(q-1)^{3|-1}+\frac{385}{36}(q-1)^{4|-1} \\ \qquad +\frac{7}{4}(q-1)^{5|-1}+\frac{1}{16}(q-1)^{6|-1}]\,\frac{q^{8|1}}{1^{8|1}}, \\ SC'(1,2,3,\ldots q)^8 = [1+\frac{561}{10}(q-1)+\frac{427}{2}(q-1)^{2|-1}+\frac{5509}{24}(q-1)^{3|-1}+\frac{763}{8}(q-1)^{4|-1} \\ \qquad +\frac{273}{16}(q-1)^{5|-1}+\frac{21}{16}(q-1)^{6|-1}+\frac{9}{256}(q-1)^{7|-1}]\,\frac{q^{9|1}}{1^{9|1}}, \\ SC'(1,2,3,\ldots q)^9 = [1+92(q-1)+563(q-1)^{2|-1}+\frac{2646}{3}(q-1)^{3|-1}+\frac{6055}{12}(q-1)^{4|-1} \\ \qquad +\frac{385}{3}(q-1)^{5|-1}+\frac{945}{32}(q-1)^{6|-1}+\frac{16}{16}(q-1)^{7|-1}+\frac{5}{256}(q-1)^{8|-1}]\,\frac{q^{10|1}}{1^{10|1}} \end{cases}$$

u. s. w., oder in einer andern Entwicklung:

$$4.\quad\begin{cases} SC'(1,2,3,\ldots q)^1 = \frac{q^{2|1}}{1^{2|1}}, \\ SC'(1,2,3,\ldots q)^2 = \frac{3q+1}{4}\cdot\frac{q^{3|1}}{1^{3|1}}, \\ SC'(1,2,3,\ldots q)^3 = \frac{q^{2|1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{q^{4|1}}{1^{4|1}}, \\ SC'(1,2,3,\ldots q)^4 = \frac{15q^3+30q^2+5q-2}{48}\cdot\frac{q^{5|1}}{1^{5|1}}, \\ SC'(1,2,3,\ldots q)^5 = \frac{3q^4+10q^3+5q^2-2q}{16}\cdot\frac{q^{6|1}}{1^{6|1}}, \\ SC'(1,2,3,\ldots q)^6 = \frac{63q^5+315q^4+315q^3-91q^2-42q+16}{1^{4|1}\,1^{4|1}}\cdot\frac{q^{7|1}}{1^{7|1}}, \\ SC'(1,2,3,\ldots q)^7 = \frac{9q^6+63q^5+105q^4-7q^3-42q+16q}{1^{3|1}\,1^{4|1}}\cdot\frac{q^{8|1}}{1^{8|1}}, \\ SC'(1,2,3,\ldots q)^8 = \frac{135q^7+1260q^6+3150q^5+840q^4-2345q^3+540q^2+404q-144}{1^{5|1}\,2^5}\cdot\frac{q^{9|1}}{1^{9|1}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Wir theilen jetzt folgenden, für die Summirung der Verbindungen mit und ohne Wiederholungen wichtigen Satz mit, der sich aus der Vergleichung der in meinen „Forschungen in der Analysis" aufgefundenen, hierhergehörigen Gleichungen ergiebt, und der sich aufserdem auch auf eine ganz einfache Art beweisen läfst. Es ist nämlich

$$5.\quad SC(1,2,3,\ldots q-1)^m = SC'(1,2,3,\ldots q)^m,$$

wenn auf der einen Seite $(-q)$ statt $(+q)$ gesetzt wird. Dieser Satz bezieht sich nicht etwa auf die Ableitung oder Entwicklung der Verbindungen, son-

dern auf die für sie gefundenen Summen-Ausdrücke, und ist reciprok. Er hat folgende Bedeutung:

6. Ist der Summen-Ausdruck für die Verbindungen mit Wiederholungen aus q Elementen zu irgend einer Classe gefunden, so ergiebt sich derjenige für die Verbindungen ohne Wiederholungen aus $(q-1)$ Elementen zur nämlichen Classe, wenn darin $(-q)$ statt $(+q)$ gesetzt wird; und umgekehrt.

7. Ist der Summen-Ausdruck für die Verbindungen ohne Wiederholungen aus $(q-1)$ Elementen zu irgend einer Classe gefunden, so ergiebt sich der Ausdruck für die Verbindungen mit Wiederholungen aus q Elementen zur nämlichen Classe, wenn darin $(-q)$ statt $(+q)$ gesetzt wird.

Hiernach ist es nur nöthig, den Summen-Ausdruck für die eine Art dieser Verbindungen aufzusuchen, weil dadurch zugleich der für die andere Art gegeben ist. Wenden wir das Gesagte auf die in (3. und 4.) gefundenen Ausdrücke an, so findet sich:

8.
$$\begin{cases} SC(1,2,\ldots q-1)^1 = \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}, \\ SC(1,2,\ldots q-1)^2 = \left[-1+\frac{3}{4}(q+1)\right]\frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}, \\ SC(1,2,\ldots q-1)^3 = \left[1-2(q+1)+\frac{(q+1)^{2|1}}{1^{2|1}}\right]\frac{q^{4|-1}}{1^{4|1}}, \\ SC(1,2,\ldots q-1)^4 = \left[-1+\frac{25}{6}(q+1)-\frac{5}{2}(q+1)^{2|1}+\frac{5}{16}(q+1)^{3|1}\right]\frac{q^{5|-1}}{1^{5|1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

9.
$$\begin{cases} SC(1,2,\ldots q-1)^1 = \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}, \\ SC(1,2,\ldots q-1)^2 = \frac{3}{4}(q-1)\cdot\frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}, \\ SC(1,2,\ldots q-1)^3 = \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{q^{4|-1}}{1^{4|1}}, \\ SC(1,2,\ldots q-1)^4 = \frac{15q^3-30q^2+5q+2}{1^{2|1}\,1^{4|1}}\cdot\frac{q^{5|-1}}{1^{5|1}}, \\ SC(1,2,\ldots q-1)^5 = \frac{3q^4-10q^3+5q^2+2q}{16}\cdot\frac{q^{6|-1}}{1^{6|1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Diese Gleichungen haben eine vielseitige Anwendung in der Analysis und verdienen deswegen Aufmerksamkeit. Wir gedenken, um dies zu zeigen, ein andermal auf sie zurückzukommen.

Wir theilen noch eine zurücklaufende Bildungsweise mit; besonders auch weil sie sich so einfach ergiebt. Es ist bekanntlich

$$10.\quad SC(1,2,\ldots q)^m = q\,SC(1,2,\ldots q-1)^{m-1} + (q-1)\,SC(1,2,\ldots q-2)^{m-1} + (q-2)\,SC(1,2,\ldots q-3)^{m-1} + \ldots$$

Bezeichnen wir den Summen-Ausdruck für diese Verbindungen zur $x$ten Classe durch $f(q^x)$, so ist aus (10.)

$$11.\quad SC(1,2,\ldots q)^m = \Sigma q.f((q-1)^{m-1}).$$

Zur Auffindung der nöthigen Summen-Ausdrücke benutzen wir folgende Gleichung, die sich leicht rechtfertigen läfst:

$$12.\quad \Sigma(R+q)\frac{q^{n|1}}{1^{n|1}} = (R+1)\frac{q^{n+1|1}}{1^{n+1|1}} + (n+1)\frac{(q-1)^{n+2|1}}{1^{n+2|1}}.$$

Nun ist bekanntlich $SC(1,2,\ldots q)^1 = \frac{q^{2|1}}{1^{2|1}}$, also nach (10. und 11.)

$$SC(1,2,3,\ldots q)^2 = \Sigma q\cdot\frac{(q-1)^{2|1}}{1^{2|1}}.$$

Wird $q-1$ statt q, $R=1$ und $n=2$ in (12.) gesetzt, so ergiebt sich

$$SC(1,2,3,\ldots q)^2 = 2\cdot\frac{(q-1)^{3|1}}{1^{3|1}} + 3\cdot\frac{(q-2)^{4|1}}{1^{4|1}}.$$

Aus (11.) erhält man

$$SC(1,2,3,\ldots q)^3 = 2\Sigma q\cdot\frac{(q-2)^{3|-1}}{1^{3|1}} + 3\Sigma q\cdot\frac{(q-3)^{4|1}}{1^{4|1}}.$$

Wird $q-2$ statt q, $R=2$, $n=3$, dann $q-3$ statt q, $R=3$, $n=4$ in (3.) gesetzt, so entstehen vier Ausdrücke und es ist

$$SC(1,2,3,\ldots q)^3 = 2\cdot3\cdot\frac{(q-2)^{4|1}}{1^{4|1}} + \begin{array}{c|}4\cdot2\\4\cdot3\end{array}\frac{(q-3)^{5|1}}{1^{5|1}} + 5\cdot3\cdot\frac{(q-4)^{6|1}}{1^{6|1}}$$

$$= 6\cdot\frac{(q-2)^{4|1}}{1^{4|1}} + 20\cdot\frac{(q-3)^{5|1}}{1^{5|1}} + 15\cdot\frac{(q-4)^{6|1}}{1^{6|1}}.$$

Wird in dieser Weise fortgefahren, so läfst sich leicht das Gesetz für die zurücklaufende Bildungsweise der Vorzahlen erkennen. Das Gesetz für die Facultäten liegt klar vor. Die Ableitung der $r$ten Vorzahl in der $m$ten Classe ist durch folgende Gleichung gegeben:

$$13.\quad A_r^m = (m+r-1)(A_{r-1}^{m-1} + A_r^{m-1}).$$

Hieraus gewinnt man folgende Darstellungen:

$$14.\quad \begin{cases} SC(1,2,\ldots q)^4 = 24\cdot\frac{(q+1)^{5|-1}}{1^{5|1}} + 130\cdot\frac{(q+1)^{6|-1}}{1^{6|1}} + 210\cdot\frac{(q+1)^{7|-1}}{1^{7|-1}} + 105\cdot\frac{(q+1)^{8|-1}}{1^{8|1}}, \\ SC(1,2,\ldots q)^5 = 120\cdot\frac{(q+1)^{6|-1}}{1^{6|1}} + 924\cdot\frac{(q+1)^{7|-1}}{1^{7|1}} + 2380\cdot\frac{(q+1)^{8|-1}}{1^{8|1}} \\ \qquad + 2520\cdot\frac{(q+1)^{9|-1}}{1^{9|1}} + 945\cdot\frac{(q+1)^{10|-1}}{1^{10|1}}, \end{cases}$$

$$14.\quad\begin{cases} SC(1,2,\ldots.q)^6 = 720\cdot\frac{(q+1)^{7|-1}}{1^{7|1}} + 7308\cdot\frac{(q+1)^{8|-1}}{1^{8|1}} + 26432\cdot\frac{(q+1)^{9|-1}}{1^{9|1}} \\ \qquad + 44100\cdot\frac{(q+1)^{10|-1}}{1^{10|1}} + 34658\cdot\frac{(q+1)^{11|-1}}{1^{11|1}} + 10395\cdot\frac{(q+1)^{12|-1}}{1^{12|1}}, \\ SC(1,2,\ldots.q)^7 = 5040\cdot\frac{(q+1)^{8|-1}}{1^{8|1}} + 64224\cdot\frac{(q+1)^{9|-1}}{1^{9|1}} + 303660\cdot\frac{(q+1)^{10|-1}}{1^{10|1}} \\ \qquad + 705320\cdot\frac{(q+1)^{11|-1}}{1^{11|1}} + 866250\cdot\frac{(q+1)^{12|-1}}{1^{12|1}} \\ \qquad + 540540\cdot\frac{(q+1)^{13|-1}}{1^{13|1}} + 135135\cdot\frac{(q+1)^{14|-1}}{1^{14|1}}, \\ SC(1,2,\ldots.q)^8 = 40320\cdot\frac{(q+1)^{9|-1}}{1^{9|1}} + 623376\cdot\frac{(q+1)^{10|-1}}{1^{10|1}} + 3678840\cdot\frac{(q+1)^{11|-1}}{1^{11|1}} \\ \qquad + 11098780\cdot\frac{(q+1)^{12|-1}}{1^{12|1}} + 18858840\cdot\frac{(q+1)^{13|-1}}{1^{13|1}} + 18288270\cdot\frac{(q+1)^{14|-1}}{1^{14|1}} \\ \qquad + 9459450\cdot\frac{(q+1)^{15|-1}}{1^{15|1}} + 2027025\cdot\frac{(q+1)^{16|-1}}{1^{16|1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Nach (5.) ergiebt sich hieraus unmittelbar für die Summen der Verbindungen mit Wiederholungen:

$$15.\quad\begin{cases} SC'(1,2,\ldots.q)^1 = +\frac{q^{2|1}}{1^{2|1}}, \\ SC'(1,2,\ldots.q)^2 = -\ 2\cdot\frac{q^{3|1}}{1^{3|1}} + 3\cdot\frac{q^{4|1}}{1^{4|1}}, \\ SC'(1,2,\ldots.q)^3 = +\ 6\cdot\frac{q^{4|+1}}{1^{4|1}} - 20\cdot\frac{q^{5|1}}{1^{5|1}} + 15\cdot\frac{q^{6|1}}{1^{6|1}}, \\ SC'(1,2,\ldots.q)^4 = -24\cdot\frac{q^{5|1}}{1^{5|1}} + 130\cdot\frac{q^{6|1}}{1^{6|1}} - 210\cdot\frac{q^{7|1}}{1^{7|1}} + 105\cdot\frac{q^{8|1}}{1^{8|1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Eben so leicht lassen sich nach der nämlichen Methode die Summen-Ausdrücke für die Verbindungen ohne Wiederholungen finden. Für diese Verbindungen gilt bekanntlich folgende zurücklaufende Bildungsweise:

$$16.\quad SC'(1,2,\ldots.q)^m = qSC'(1,2,\ldots.q)^{m-1} + (q-1)SC'(1,2,\ldots.q-1)^{m-1} + (q-2)SC'(1,2,\ldots.q-2)^{m-1} + \ldots.,$$

also auch

$$17.\quad SC'(1,2,\ldots.q)^m = \Sigma q.f(q^m).$$

Werden nun die gehörigen Werthe statt q, R und n nach (16. und 17.) in (12.) bei jedem besondern Falle eingeführt, so ergeben sich, nach gehöriger Ordnung und Reduction, folgende Summen-Ausdrücke:

$$18.\left\{\begin{aligned}
&SC'(1,2,\ldots q)^1=\frac{q^{2|1}}{1^{2|1}},\\
&SC'(1,2,\ldots q)^2=\frac{q^{3|1}}{1^{3|1}}+3\cdot\frac{(q-1)^{4|1}}{1^{4|1}},\\
&CS'(1,2,\ldots q)^3=\frac{q^{4|1}}{1^{4|1}}+10\cdot\frac{(q-1)^{5|1}}{1^{5|1}}+15\cdot\frac{(q-2)^{6|1}}{1^{6|1}},\\
&SC'(1,2,\ldots q)^4=\frac{q^{5|1}}{1^{5|1}}+25\cdot\frac{(q-1)^{6|1}}{1^{6|1}}+105\cdot\frac{(q-2)^{7|1}}{1^{7|1}}+105\cdot\frac{(q-3)^{8|1}}{1^{8|1}},\\
&SC'(1,2,\ldots q)^5=\frac{q^{6|1}}{1^{6|1}}+56\cdot\frac{(q-1)^{7|1}}{1^{7|1}}+490\cdot\frac{(q-2)^{8|1}}{1^{8|1}}+1260\cdot\frac{(q-3)^{9|1}}{1^{9|1}}\\
&\qquad\qquad+945\cdot\frac{(q-4)^{10|1}}{1^{10|1}},\\
&SC'(1,2,\ldots q)^6=\frac{q^{7|1}}{1^{7|1}}+119\cdot\frac{(q-1)^{8|1}}{1^{8|1}}+1918\cdot\frac{(q-2)^{9|1}}{1^{9|1}}+9450\cdot\frac{(q-3)^{10|1}}{1^{10|1}}\\
&\qquad\qquad+17325\cdot\frac{(q-4)^{11|1}}{1^{11|1}}+10395\cdot\frac{(q-5)^{12|1}}{1^{12|1}},\\
&SC'(1,2,\ldots q)^7=\frac{q^{8|+1}}{1^{8|1}}+246\cdot\frac{(q-1)^{9|1}}{1^{9|1}}+6825\cdot\frac{(q-2)^{10|1}}{1^{10|1}}+56980\cdot\frac{(q-3)^{11|+1}}{1^{11|1}}\\
&\qquad\qquad+190575\cdot\frac{(q-4)^{12|1}}{1^{12|1}}+270270\cdot\frac{(q-5)^{13|1}}{1^{13|1}}+135135\cdot\frac{(q-6)^{14|1}}{1^{14|1}},\\
&SC'(1,2,\ldots q)^8=\frac{q^{9|1}}{1^{9|1}}+501\cdot\frac{(q-1)^{10|1}}{1^{10|1}}+22935\cdot\frac{(q-2)^{11|1}}{1^{11|1}}+302995\cdot\frac{(q-3)^{12|1}}{1^{12|1}}\\
&\qquad\qquad+1636635\cdot\frac{(q-4)^{13|1}}{1^{13|1}}+4099095\cdot\frac{(q-5)^{14|1}}{1^{14|1}}\\
&\qquad\qquad+4729725\cdot\frac{(q-6)^{15|1}}{1^{15|1}}+2027025\cdot\frac{(q-7)^{16|1}}{1^{16|1}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Wird auch hierauf der Satz (5.) angewendet, so ergiebt sich

$$19.\left\{\begin{aligned}
&SC(1,2,\ldots q-1)^1=+\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}},\\
&SC(1,2,\ldots q-1)^2=-\frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}+3\cdot\frac{(q+1)^{4|-1}}{1^{4|1}},\\
&SC(1,2,\ldots q-1)^3=+\frac{q^{4|-1}}{1^{4|1}}-10\cdot\frac{(q+1)^{5|-1}}{1^{5|1}}+15\cdot\frac{(q+2)^{6|-1}}{1^{6|1}},\\
&SC(1,2,\ldots q-1)^4=-\frac{q^{5|-1}}{1^{5|1}}+25\cdot\frac{(q+1)^{6|-1}}{1^{6|1}}-105\cdot\frac{(q+2)^{7|-1}}{1^{7|1}}+150\cdot\frac{(q+3)^{8|-1}}{1^{8|1}},\\
&SC(1,2,\ldots q-1)^5=+\frac{q^{6|-1}}{1^{6|1}}-56\cdot\frac{(q+1)^{7|-1}}{1^{7|1}}+490\cdot\frac{(q+2)^{8|-1}}{1^{8|1}}\\
&\qquad\qquad-1260\cdot\frac{(q+3)^{9|-1}}{1^{9|1}}+945\cdot\frac{(q+4)^{10|-1}}{1^{10|1}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Die in (14. und 18.) entwickelten Gleichungen, und aufserdem noch zwei unabhängige Bildungsweisen für die Summen der Verbindungen, hat *Kramp* in seiner „Analyse d. réfract. pg. 84 u. ff." mitgetheilt. Letztere sind von geringer Brauchbarkeit, weil sie für jeden besondern Fall auch eine besondere Auflösung nöthig haben. Die in No. 14. bis 18. mitgetheilten Formeln haben bei höhern Classen sehr grofse Coëfficienten nöthig; wodurch sie selbst wieder unbrauchbar werden und in jedem Fall den in (3, 4, 8 und 9) mitgetheilten Ausdrücken, wie man sich leicht überzeugt, nachstehen. Der Satz (5.) läfst sich auch noch auf die übrigen in meiner Comb. Lehre gegebenen Formeln anwenden; und überhaupt auf die in den Schriften Anderer, wie in der Analysis von *Eytelwein* u. a., entwickelten, hieher gehörigen Darstellungen, wenn der Summen-Ausdruck für die Verbindungen eine Function von q ist. In dem 5ten Coëfficienten des Summen-Ausdrucks für die Verbindungen ohne Wiederholungen zur 7ten Classe ($G_5 = A_5^7$) ist in dem angeführten Werke von *Kramp* ein Druckfehler stehen geblieben. *Kramp* hat die Summen-Ausdrücke für die Verbindungen ohne Wiederholungen nur bis zur siebenten, und die für die Verbindungen mit Wiederholungen nur bis zur sechsten Classe mitgetheilt. Hier sind sie bis zur achten Classe gegeben. Man kann die Rechnung leicht fortsetzen, wird aber dabei, wie die vorstehenden Fälle zeigen, auf ganz ungewöhnlich grofse, der Unbeweglichkeit sich nähernde Zahlen geführt.

Schlufsbemerkung.

Die Wahrscheinsichkeitsrechnung beschäftigt sich nach ihrem gegenwärtigen Stande mit Folgendem: Mit Darstellung der allgemeinen Grundsätze, welche bei der Behandlung ihrer einzelnen Zweige gelten; mit Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten des einmaligen oder wiederholten Eintreffens von Ereignissen, wenn die dasselbe bedingenden Ursachen bekannt sind; mit Ermittlung des Werths von Gütern, welche von dem möglichen Eintreffen künftiger Ereignisse abhangen und des Werths der Erwartung oder der ob- und subjectiven Hoffnung; mit Betrachtung der Zufälligkeiten bei den Spielen und Lotterieen; mit Berechnung der Lotterie-Anlehen; mit Bestimmung der Sterblichkeits-Verhältnisse und der menschlichen Lebensdauer, für einzelne Personen, so wie für das Zusammenleben mehrerer Personen und der darauf sich gründenden Werthbestimmung mancher Art von Gütern, wie Leibrenten, Lebensversicherungen u. s. w., so wie mit den darauf gegründeten Versicherungs- und Rentengesellschaften, Tontinen, Annuitäten, Wittwen- und Waisen-Pensions-Versorgungs-Anstalten u. s. w.; mit Ermittlung der Glaubwürdigkeit der Zeugen-Aussagen, der

Zuverlässigkeit der Urtheile in politischer und juridischer Beziehung, die von einem Vereine mehrerer Personen gefällt werden; mit Bestimmung der Wahrscheinlichkeit aus Beobachtungen, Erschliefsung der Ursachen aus den durch dieselben hervorgebrachten Erscheinungen, und des Übergangs von ihnen auf das Eintreffen künftiger Ereignisse; mit Ermittlung der Gröfse und Bedeutung der Fehler bei Beobachtungen und der hiernach nöthigen Verbesserungen u. s. w.

Laplace hat die Wahrscheinlichkeitsrechnung in seinem oben angeführten Werke in 11 Abschnitten am vollständigsten behandelt. Indessen sind einzelne Zweige derselben ziemlich wenig bedacht. Z. B. das 8te Capitel. Anderes, wie die Spiele, Lotterieen, Lotterie-Anlehen, sind übergangen; wieder Anderes verdankt seine Berücksichtigung nur Zufälligkeiten; wie die im 3ten Capitel behandelte Aufgabe (Des lois de la probabilité, qui résultent de la multiplication indéfinie des événements), die eigentlich dem zweiten Capitel angehört. Die weiter oben genannten Werke enthalten die Bearbeitung einzelner Zweige der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Die vorliegenden Untersuchungen beschäftigen sich mit der Feststellung der allgemeinen Grundsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung (1ter Abschnitt §. 1—3.); mit Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten bei Ereignissen, deren Ursachen bekannt sind (2ter und 3ter Abschnitt §. 4—34.); und zwar im 2ten Abschnitte (§. 4—24.), wenn das Eintreffen des fraglichen Ereignisses als ein einfaches zu betrachten ist, oder wenn es nur einmal eintritt; im 3ten Abschnitte (§. 25—34.), wenn dasselbe wiederholt, oder in einer bestimmten Reihenfolge eintreffen soll; und endlich im 4ten Abschnitte (§. 35—48.) mit Bestimmung des Werths der Erwartung oder der ob- und subjectiven Hoffnung.

Man sieht, dafs dies der kleinere Theil der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist. Der übrige Theil soll nachfolgen, sobald mir Mufse zu der weitern Bearbeitung wird.

Über den Inhalt der einzelnen Abschnitte ist Folgendes zu bemerken.

Die Aufstellung der allgemeinen Grundsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung (§. 1—3.) weicht von derjenigen ab, die in den hieher gehörigen Schriften, namentlich von *Laplace,* gegeben wird. Es sind darunter nach meinem Dafürhalten nur diejenigen Sätze aufzunehmen, die sich als allgemein characterisiren, dagegen alle die auszuschliefsen, welche nur für die einzelnen Theile dieser Wissenschaft als maafsgebend sich geltend machen. Die Gründe, welche diese Ansicht rechtfertigen sollen, sind mit Rücksichtnahme auf die von *Laplace* aufgestellten allgemeinen Grundsätze in §. 3. entwickelt; worauf ich also verweise. Auf das Werk von *Poisson,* welches theils die von *Laplace*

aufgestellten Grundsätze annimmt, theils andere hinzufügt, denen gleichfalls jene Eigenschaft abgeht, besonders zurückzukommen, schien deshalb nicht nöthig.

Der *zweite und dritte Abschnitt* umfaſst ein ziemlich weites Feld, welches sich mit dem Fortschreiten der Wissenschaft noch mehr erweitern wird. Es sind nicht nur diejenigen Probleme aufgenommen, welche von *Pascal, Jac.* und *Nic. Bernoulli, Euler, Lagrange, Trembley* u. A. aufgestellt und behandelt wurden, die auch *Laplace* in sein Werk (2tes und 3tes Cap.) aufnahm und denen er noch andere hinzufügte, sondern ihre Zahl ist auch noch durch neue vermehrt; wie sich aus einer einfachen Vergleichung der beigefügten geschichtlichen Notizen ergiebt. Dabei sind die meisten früher schon aufgestellten Probleme auf einen allgemeineren Standpunct zurückgeführt und von ihm aus beantwortet worden. Zahlen werden am einfachsten diese Behauptung rechtfertigen. Es ist der Inhalt der §§. 4, 8, 11, 13—18, 20, 22—24, 39, 30 und 33 mit dem Werke von *Laplace* zu vergleichen; ferner ist der Inhalt der §§. 4, 6, 7, 9, 10, 11 und gröſstentheils derer 15—18, 19, 21, 25—28, 31, 32 und 34 nachzusehen; wo nicht bloſs einzelne, sondern eine Reihe von Problemen behandelt sind, die bei *Laplace* nicht vorkommen.

Ein ähnliches Verhältniſs ergiebt sich aus der Vergleichung des vierten Abschnitts mit dem X. Cap. des *Laplace*schen Werkes, wo dieser Gegenstand ziemlich karg bedacht ist.

Bei der Entwicklung der Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung war es ein Hauptzweck, sie so viel nur möglich auf ganz elementarem Wege zu geben. Hiedurch dürfte jeder Wissenschaft am meisten gedient sein; denn so wird verhütet, daſs sich die Methodik zu sehr erhebe und an die Stelle der Wissenschaftlichkeit setze. Die *Methode* kann immer nur formelle Dienste leisten und nur in so weit Berücksichtigung verdienen, als sie am schnellsten fördert. Namentlich läſst sich die Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht aus einer bestimmten Methode oder Form entwickeln. Es widerspricht dies ihrer Natur. Man hat indessen bei ihr dieses Mittel angewendet. *Lagrange* und *Trembley* haben mehrere der im 2ten und 3ten Abschnitte entwickelten Sätze durch die Methode der zurücklaufenden Reihen gelöset; *Laplace* hat sie auf die von ihm benannten „Fonctions génératrices" und beinahe mit gänzlicher Umgehung der Combinationslehre, gewiſs nicht zum Frommen dieses Theils der Wahrscheinlichkeitsrechnung, zurückgeführt; denn dadurch, daſs man die Begründung ihrer Sätze in die weniger betretenen Pfade des höhern Calculs verwies und diesem wie mit einem Zauberstabe neue Gesetze entlockte, entrückte man sie ihrer

natürlichen Bildsamkeit und entzog die in den 2ten und 3ten Abschnitt gehörigen Probleme ihrem natürlichen und heimischen Boden, der Combinationslehre. Schon *Euler* hat die von ihm gelöseten Probleme auf die Combinationen zurückgebracht, und *Trembley* hat Dasselbe bei einigen andern (§. 33. und 34.) in Comment. Soc. reg. scient. Gotting. ad ann. 1793 et 1794 gethan.

Der 2te und 3te Abschnitt macht es sich zur Haupt-Aufgabe, diese Ansicht durchzuführen, und zu zeigen, dafs man mit Unrecht die Combinationslehre von diesem Felde ausschlofs; denn man wird, wenn man anders nicht mit vorgefafster Meinung die hier vorgetragenen Untersuchungen betrachtet, aus einer Vergleichung des hier Gegebenen mit dem früher Gewonnenen die Überzeugung entnehmen, dafs die Combinationslehre nicht nur allgemeinere Methoden und Entwicklungen an die Hand giebt, als die bisher eingeschlagenen Wege, sondern dafs sie überhaupt eine gröfsere Anzahl von Problemen lösen lehrt; wegen ihrer ungemeinen Bildsamkeit und reichhaltigen Anwendungsfähigkeit.

Aus diesem Grunde ist auch noch auf den weitern Zweck des Vorliegenden aufmerksam zu machen. Er besteht darin, durch die im 2ten und 3ten Abschnitt angestellten Untersuchungen zugleich der *Combinationslehre* zu dienen. Jedes hiehergehörige Problem der Wahrscheinlichkeitsrechnung löset auch ein Problem der Combinationslehre auf; denn beide Disciplinen stehen in Wechselwirkung. Dies wurde entweder bei der Aufstellung der einzelnen Aufgaben schon zum Voraus angekündigt, oder, wo es nicht der Fall war, wurde gehörigen Orts bemerkt, welches Problem der Combinationslehre zur Frage komme, und wo ihm seine Stelle anzuweisen sei. Man kann daher den 2ten und 3ten Abschnitt zugleich als eine Erweiterung der Combinationslehre betrachten; wie es die gefundenen Sätze nachweisen.

Der *vierte Abschnitt* handelt von der Ermittlung des *Werths der Erwartung* oder der *ob-* und *subjectiven Hoffnung,* von *Laplace* „Espérance morale" genannt. Zuerst sind Begriff und Bedeutung eines zu erwartenden Gutes und die daraus sich ergebenden mathematischen Bestimmungen festgestellt; dann ist der Einflufs angegeben, welchen die Ordnung auf die einzelnen Theilnehmer bei bestimmten Wahrscheinlichkeiten äufsert; hierauf das Verhältnifs der Einlage zu dem zu erwartenden Gewinn, u. s. w. Endlich sind, nach dem Vorgange von *Dan. Bernoulli,* die Gesetze der subjectiven Hoffnung entwickelt.

Schliefslich ist zu bemerken, dafs diese Arbeit schon im Jahre 1842 niedergeschrieben war.

Freiburg i. B. im Februar 1848.

19.

Über Projectivität der Kegelschnitte als krummer Gebilde*).

(Von dem zu Berlin verstorbenen Herrn Dr. *Göpel*.)

Einleitung.

Der Aufschwung, den die betrachtende Geometrie in den neuesten Zeiten genommen, hat unter den Händen des Herrn *Steiner* seinen Höhenpunct erreicht. In dem bewunderungswürdigen Buche „Über die Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander" sind die einfachen Grund-Eigenschaften der räumlichen Elementargebilde enthüllt, aus denen, wie aus einem organischen Keime, nicht nur die zahllose Menge der von den frühern Geometern entdeckten vereinzelten Lehrsätze und Aufgaben mit Leichtigkeit, theils entwickelt worden sind, theils voraussichtlich sich entwickeln lassen, sondern welche auch eine ergiebige Quelle fernerer neuer Entdeckungen für die spätern Geometer bilden werden. Die Principien, von denen dieses, nicht so sehr durch die Neuheit der darin enthaltenen Resultate, als durch die grofsartige Einfachheit der Ansichtsweise und die concentrirende Umfassendheit der Methode ausgezeichnete Werk ausgeht, bestehen einerseits in einer eigenthümlichen Auflösung der einfachen, oder, wenn ich mich so ausdrücken darf, der geraden geometrischen Gestaltungen, nemlich des Puncts (Strahlenbüschels), der Geraden und der Ebene, in ihre Elemente. Durch diese Auffassungsweise wird zugleich das schon von *Gergonne* ausgesprochene Princip der Dualität allgemeiner und vollständiger hingestellt und auf einen höheren Standpunct gerückt. Andererseits werden von den genannten Gestaltungen diejenigen, welche in Bezug auf die Unendlichkeit ihrer Elemente als homolog anzusehen sind, paarweise auf eine bestimmte Art dergestalt auf einander bezogen, dafs jedem Elemente der einen

---

*) Diese Abhandlung ist eine der von dem leider viel zu früh verstorbenen Herrn Dr. *Göpel* nachgelassenen mathematischen Arbeiten, auf deren Gewinn für das Journal der Herausgeber desselben, wie Band 35 S. 318 gedacht, Hoffnung hatte. Sie ist ihm zur Bekanntmachung durch das Journal geneigtest mitgetheilt worden und er erlaubt sich, für diese gütige Mittheilung hierdurch öffentlich seinen Dank auszusprechen.

Der Herausgeber.

ein Element der andern entspricht oder zugehört. Ein besonderer Fall einer solchen Art der Beziehung und Zuhörigkeit ist in den bildenden Künsten längst bekannt und alltäglich geworden. Es ist diejenige, welche zwischen einem Gegenstande und seinem Abbilde obwaltet und unter dem Namen „Perspective oder centrale Projection" bekannt ist. Bei dieser Beziehungs-Art werden z. B. diejenigen Elemente, d. h. Puncte oder Gerade zweier Ebenen als zu einander gehörig betrachtet, welche, von dem Mittelpuncte der Perspective aus angesehen, einander decken würden. Von diesen Ebenen sagt Herr *Steiner*, dafs sie in Bezug auf ihre zugeordneten Elemente *projectivisch* sind, d. h. dafs die eine als ein perspectivisches Bild der andern angesehen werden kann. Die eben erwähnte allbekannte Beziehungs-Art, nebst der entsprechenden Terminologie der Perspectivlehre, hat Herr *Steiner* auch auf die Zuordnung aller andern Paare von Gebilden modificirend übertragen. Solchergestalt werden z. B. diejenigen Strahlen zweier Strahlenbüschel einander zugeordnet, welche durch einen und denselben Punct einer *Ebene* (ihres perspectivischen Durchschnitts) gehen, und die beiden Büschel werden in Bezug auf die genannten Elemente projectivisch genannt. Wenn man nun mit Herrn *Steiner* die Eigenschaften solcher projectivischen Gebilde untersucht, so gelangt man zu jener zusammenhangenden Reihe von Sätzen, welche wegen ihrer Allgemeinheit in den verschiedenartigsten Untersuchungen die ausgezeichnetsten Dienste leisten und den Schlüssel zu einer unübersehbaren Zahl von Theoremen und Aufgaben im Gebiete der elementaren, wie der höheren Geometrie liefern. — Handelt es sich z. B. (um einen einfachen Fall anzuführen) um einen Beweis des Satzes, dafs die drei Höhen eines Dreiecks $BB_1\mathfrak{a}$ (Fig. 1) sich in einem Puncte schneiden, so ziehe man die drei Höhen a_2, a_3 und $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$. Denkt man sich nun das Dreieck auf die Art veränderlich, dafs die Spitze $\mathfrak{a}$ sich die Höhe $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ entlang bewegt, so bilden sich um die Ecken B und B_1 je zwei Strahlenbüschel. Von diesen liegen zunächst die beiden Büschel B und B_1 perspectivisch, und sind in Bezug auf die Strahlen a und a_1 projectivisch. Dasjenige Büschel B aber, zu welchem der Strahl a_2 gehört, ist mit dem Büschel der Strahlen a_1 identisch, weil je zwei entsprechende Strahlen a_1 und a_2 einen rechten Winkel bilden. Dasselbe gilt von den Büscheln der Strahlen a und a_3. Folglich sind die Büschel der Strahlen a_2 und a_3 ebenfalls projectivisch. Rückt man nun die Spitze $\mathfrak{a}$ ins Unendliche, so werden die Strahlen a und a_1 auf BB_1 senkrecht; die beiden entsprechenden Strahlen a_2 und a_3 fallen daher auf BB_1 zusammen. Hieraus folgt, dafs die Büschel der Strahlen a_2 und a_3 eine per-

spectivische Lage, und mithin einen perspectivischen Durchschnitt haben, den man leicht erhält, wenn man zwei Puncte desselben aufsucht. Rückt man zu diesem Behufe die Spitze a in einen der beiden Puncte a_2 oder a_3, in denen die Höhe ab von dem Kreise über BB_1 als Durchmesser geschnitten wird, so fällt offenbar der Durchschnittspunct a_1 der Strahlen a_2 und a_3 beziehlich in dieselben Puncte a_2 und a_3. Der gesuchte perspectivische Durchschnitt ist daher die Gerade a_2a_3 oder ab. Folglich schneiden sich die beiden Strahlen oder Höhen a_2 und a_3 in a_1 auf der Höhe ab, w. z. b. w.

Die vorhin summarisch angeführten Grund-Ideen des genannten Werks können nun aber augenscheinlich viel allgemeiner aufgefafst werden, als es daselbst beabsichtigt worden ist. Sie bestanden, um es kurz zu wiederholen, in der Betrachtung der Ergebnisse, welche aus der Correlation zweier gerader Gebilde in Bezug auf ihre, mittels einer geraden (d. h. der Linearperspective entlehnten) Beziehungs-Art, als entsprechend gesetzte Elemente entspringen. Obgleich es sicherlich feststeht, dafs die aus der Betrachtung der einfacheren Figuren geschöpften Eigenschaften immerhin die Grundlage aller geometrischen Forschungen bleiben werden, so hindert uns doch nichts, krumme Gebilde anstatt gerader zu betrachten und z. B. zwei krumme Oberflächen an die Stelle der beiden oben erwähnten Ebenen zu setzen; so dafs die eine das perspectivische Abbild der andern wird. Auch braucht die Beziehungs-Art, mittels welcher jedem Elemente sein entsprechendes zugeordnet wird, keine gerade zu sein. Es könnten z. B. die Strahlen der beiden oben erwähnten Büschel mittels einer krummen Oberfläche, anstatt einer Ebene, zu einander in Beziehung gesetzt werden; oder es könnten die Puncte zweier Geraden dergestalt auf einander bezogen werden, dafs je zwei entsprechende Puncte mit zwei andern festen Puncten der beiden Geraden jedesmal auf einem Kreise lägen. Jedes dieser, in Betreff sowohl der Correlate, als der Correlationsweise unendlich mannigfaltigen Beziehungssysteme würde zu eigenthümlichen Sätzen führen können, deren Combination weiterhin vielfältige neue Resultate ergäbe. Hiervon geben unter andern schon die eleganten Lehrsätze Zeugnifs, die man in der mathematischen Optik über das Verhalten des einfallenden Lichtstrahls zu dem mehrfach gebrochenen oder reflectirten aufgefunden hat. Der Complex der zuletzt austretenden Strahlen ist im Allgemeinen ein krummes Strahlengebilde, dessen jeder Strahl einem bestimmten Strahle des Complexes der einfallenden Strahlen zugeordnet ist; und zwar vermittels einer Beziehungs-Art, die ebenfalls krumm zu nennen ist; im Gegensatz zu der geraden perspecti-

vischen, bei welcher ein gerades Gebilde die Vermittelung übernimmt. Auf diese Weise wäre die Möglichkeit eines aufzuführenden geometrischen Lehrgebäudes eröffnet, von welchem sich kaum erst die Basis, geschweige denn der Gipfel absehen läfst. Die leitende Idee für die hierdurch angeregten Untersuchungen könnte dann allgemein ausgesprochen werden: als die Erforschung der Correlationen der Figuren im weitesten Sinne.

Die folgenden Blätter enthalten die Bearbeitung eines kleinen Bruchstücks aus dem eben besprochenen Gebiete, deren Ausgangspunct mit wenig Worten angegeben werden mag. Man kennt schon viele geometrische Lehrsätze, die noch dann ihre Geltung behalten, wenn man in ihnen an die Stelle eines Systems zweier Geraden oder zweier Puncte einen Kegelschnitt setzt. Dahin gehören z. B. der *Carnot*sche Satz über ein von zwei Transversalen geschnittenes Polygon, und der *Désargues*sche Satz über die Involution, in welchem *Sturm* an die Stelle der drei zugeordneten Seitenpaare des vollständigen Vierecks drei Kegelschnitte hat treten lassen; und dergleichen mehr. In Erwägung dieser Thatsache betrachtete ich, anstatt zweier perspectivisch liegenden Geraden oder Strahlenbüschel, *einen* Kegelschnitt, der dann beziehlich als krumme Punctenreihe oder als krummes Strahlengebilde angesehen ward. Hieraus ergaben sich eine Reihe ganz einfacher Sätze, deren Anwendbarkeit sich auf ein sehr grofses Gebiet erstreckt. Ich gelangte zu einer Anzahl interessanter Lehrsätze, Aufgaben und Auflösungen, die ich für neu zu halten geneigt war. Ich fand jedoch nach vielem Suchen, dafs ein Theil davon, und namentlich die elegante Auflösung der berühmten Aufgabe: In einem Kegelschnitt ein Polygon zu beschreiben, dessen Seiten durch gegebene Puncte gehen, nebst der dazu gehörigen Neben-Aufgabe, schon in Herrn *Poncelets* erfindungsreichem Werke enthalten war. Da indessen der Weg, auf welchem derselbe zu diesen Resultaten gelangt ist, von dem in diesen Blättern betretenen völlig verschieden ist, so glaube ich, dafs der Leser, wenn ich ihn gleich zuweilen mit schon bekannten Ergebnissen unterhalte, nichtsdestoweniger mit Vergnügen ersehen wird, in welchem Zusammenhange dieselben mit jenen weit umfassenden Principien stehen, deren ersten Entwurf wir dem genialen Gedankenfluge des deutschen Geometers verdanken.

Bestimmung der Projectivität.

Haupt-Eigenschaften projectivischer Gebilde.

1. Die Fundamentalbeziehungen der Raumgebilde, welche Herr *Steiner* in seiner „Entwickelung der Abhängigkeit etc." als die eigentliche Grundlage der synthetischen (?) Geometrie aufstellt und welche demnach die Basis aller verwickelteren Beziehungen ausmachen, bestehen bekanntlich (insofern man sich auf solche Gebilde beschränkt, die in einer und derselben Ebene liegen) darin, dafs vermöge der durch eine geistreiche Anschauungsweise dargelegten Dualität in den Situations-Verhältnissen des Raumes

a) Einerseits diejenigen Elemente zweier Geraden A und A_1 (Fig. 2) paarweise ($\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ auf $\mathfrak{b}_1$ u. s. w.) auf einander bezogen und als entsprechend gedacht werden, welche mit einem beliebigen Puncte B in einer Geraden liegen, und

b) Andererseits diejenigen Elemente zweier Puncte (Strahlenbüschel) B und B_1 (Fig. 3) paarweise (a auf a_1, b auf b_1, ...) auf einander bezogen werden, welche sich mit einer beliebigen Geraden A in einem Puncte schneiden.

Im ersten Fall hat man ein System zweier Geraden A und A_1, welches von einem Strahlenbüschel B geschnitten wird, so dafs jeder Strahl ein Paar entsprechender Elemente auf den Gebilden A und A_1 erzeugt. Im andern Fall hat man ein System zweier Puncte B und B_1, welches mit einer Punctenreihe A verbunden wird, so, dafs jeder Punct ein Paar entsprechender Strahlen in den Gebilden B und B_1 erzeugt.

So wie nun häufig geometrische Sätze dadurch verallgemeinert werden können, dafs man an die Stelle eines Systems zweier Geraden oder zweier Puncte einen Kegelschnitt setzt, so sollen in dieser Abhandlung die eben erläuterten Beziehungs-Arten auf krumme Gebilde vom zweiten Grade übertragen werden.

2. Liegen nämlich je drei Puncte einer Punctenreihe auf einer Geraden, so ist diese Punctenreihe ein gerades Gebilde. Schneiden sich je drei Strahlen einer Strahlenschaar in einem Puncte, so schneiden sich alle in diesem Puncte; welcher daher als gerades (Strahlen-) Gebilde anzusehen ist. Finden die erwähnten Bedingungen nicht Statt, so erzeugt sowohl eine stetige Punctenreihe, als eine stetige Strahlenschaar, eine Curve, welche daher nicht nur als krumme Linie (d. h. Punctenreihe), sondern auch als krummes Strahlengebilde betrachtet

werden kann. Sollen also im Falle *a*) die beiden Puncte, in denen krumme Punctenreihen von den Strahlen eines Büschels *B* getroffen werden, als entsprechend gedacht werden, so mufs die Curve nur zweimal von einer Geraden geschnitten werden können und mithin von der 2ten Ordnung oder ein Kegelschnitt sein. Sollen im Fall *b*) die Geraden- (Tangenten-) Paare, welche krumme Strahlengebilde mit den Puncten einer Geraden *A* gemein haben, auf einander bezogen werden, so mufs die Curve von einem Puncte aus nur zweimal berührt werden können und also von der zweiten Classe, oder ebenfalls ein Kegelschnitt sein.

Demgemäfs sollen nun die Puncte eines Kegelschnitts *K* (Fig. 4) dergestalt paarweise auf einander bezogen werden, dafs diejenigen ($\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$, ...), welche auf demselben Strahle eines Büschels *B* liegen, entsprechende Puncte genannt werden, und

Von den Tangenten eines Kegelschnitts *K* (Fig. 5) sollen paarweise diejenigen entsprechende Strahlen heifsen, welche sich in einem Puncte einer Geraden *A* schneiden (a und a_1, b und b_1, ...).

Ferner sollen die krummen Gebilde $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... oder a, b, c, ... und beziehlich $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, ... oder a_1, b_1, c_1, ... perspectivische Gebilde heifsen.

3. Bevor ich auf die Entwickelung der Eigenschaften solcher Gebilde und deren Verbindungen eingehe, sind einige Bemerkungen über ihre Analogie mit geraden Gebilden vorauszuschicken.

Ähnlich wie bei geraden Gebilden haben wir hier in dem Kegelschnitte eine Schaar von Puncten ($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ...) oder Geraden (a, b, c, ...), die als Objecte fungiren, und eine entsprechende Schaar von Puncten ($\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, ...) oder Geraden (a_1, b_1, c_1, ...), die deren projicirte Bilder sind. In dieser Beziehung verhält sich also der *K*, wie die beiden Gebilde *A* und A_1 oder *B* und B_1 in (No. 1), d. h. wie zwei auseinanderliegende Gebilde, von denen eins die Projection des andern ist. Dahingegen ist aber die folgende wesentliche Verschiedenheit zwischen den krummen und den geraden Gebilden zu beachten. Die beiden geraden Gebilde in (No. 1) *A* und A_1 oder *B* und B_1 sind nemlich wesentlich unabhängig und getrennt von einander, insofern als das eine A_1 oder B_1 als Bild angesehen werden mufs, während das andere *A* oder *B* als Object betrachtet wird. Das eine Gebilde enthält die Elemente des Objects, das andere die entsprechenden des Bildes. Das krumme Gebilde *K* dagegen ist ein einiges und untrennbares, welches sein Object und Bild in sich selber

hat, da jedes Element a oder *a* desselben zugleich als Object und Bild betrachtet werden kann und als solches sein Bild und Object in $\mathfrak{a}_1$ oder a_1 hat. Das Gebilde K verhält sich also von diesem Gesichtspuncte aus fast wie zwei *auf*einander liegende projectivische Gebilde. Wir werden daher den K als eine Vereinigung zweier (und später mehrerer) aufeinander liegender Gebilde anzusehen haben, so dafs ein- und dasselbe Element verschiedene Namen tragen kann, je nachdem es als zur Schaar der Object- oder der Bild-Elemente gehörig betrachtet wird. Stellt z. B. a, b, c, ... die stetige, in sich zurückkehrende Reihe der Puncte des K vor, so wird einer derselben, z. B. p, nothwendig das Bild von a sein müssen und als solches den Namen $\mathfrak{a}_1$ tragen, während dann das Bild des Punctes p oder $\mathfrak{a}_1$ unter den obigen Verhältnissen wieder der Punct a ist und als solches mit $\mathfrak{p}_1$ bezeichnet wird.

Das eben erwähnte, in der Natur der Kegelschnitte begründete doppelte Verhalten desselben ist eine Quelle mannigfaltiger Ähnlichkeiten und Verschiedenheiten im Vergleich zu *zwei aus*- oder *auf*einander liegenden *geraden* Gebilden, in welche sich der Kegelschnitt, bei einer gewissen Specialisirung, als in seine trennbaren „Factoren" (Vergl. die Auflösbarkeit der algebraischen Ausdrücke für geometrische Örter in Factoren) zerspalten kann.

Wenn der Projectionsmittelpunct B (oder die Projectionsbasis A)*) innerhalb des Kegelschnitts liegt, und man sich das zu projicirende Element a (oder a) den ganzen K entlang bewegt denkt, so durchläuft dessen Bild $\mathfrak{a}_1$ (oder a_1) den ganzen K recht- (gleich-) läufig. Liegt aber der Mittelpunct B (die Basis A) aufserhalb des K, so bewegt sich das Bild von a (oder a) rückläufig. In diesem Falle mufs offenbar während eines ganzen Umlaufs Object und Bild zweimal sich begegnen, oder aufeinander fallen. Dies findet für diejenigen beiden Strahlen des Büschels B (Puncte der Basis A) Statt, welche den Kegelschnitt berühren oder in zwei zusammenfallenden Puncten schneiden (welche auf dem Kegelschnitte liegen, oder aus welchen die zwei an den K gelegten Tangenten zusammenfallen). Diese Berührungsstrahlen $B\mathfrak{m}$, $B\mathfrak{n}$ (Durchschnittspuncte Am, An) existiren, wenn B (oder A) innerhalb des K liegt, nicht auf reelle Weise, sondern nur in der Idee. Obgleich sie aber imaginär werden, so können sie doch denselben Schlufsfolgerungen

*) Von dieser Basis A wird der Analogie gemäfs gesagt werden, sie liege innerhalb des Strahlengebildes K, wenn durch jeden ihrer Puncte zwei Strahlen (Tangenten) des Gebildes K gehen; also wenn sie der K nicht schneidet; dagegen aufserhalb, wenn durch einige ihrer Puncte kein Strahlenpaar gehen kann, also wenn sie der K schneidet.

unterworfen werden, als wenn sie ein wirkliches Dasein hätten (*Poncelet* Stetigkeitsgesetz). Die ideelle Verbindungslinie der Puncte m, n (Durchschnittspunct der Strahlen *m*, *n*) ist bekanntlich jedenfalls reell, und zwar die Polare von *B* (Pol von *A*).

4. Da der Kegelschnitt, wie schon bemerkt worden, als ein ein- und untheilbares Ganze, nicht in Bild und Object zerrissen werden kann, so ist nicht wohl ohne Weiteres abzusehen, wie zwei perspectivische Gebilde in eine schiefe Lage gebracht werden können, oder wie zwei Gebilde, ohne perspectivisch zu liegen, doch eine Beziehung von der Art zu einander haben können, dafs man sie projectivisch zu nennen veranlafst wäre und dafs namentlich zwei Gebilde, deren jedes mit einem dritten projectivisch wäre, unter einander sich eben so verhielten. Auf der andern Seite läfst sich muthmafsen, dafs wenn das Gebilde *K* (nemlich $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, ... oder a_1, b_1, c_1, ...) von einem zweiten Mittelpuncte B_1 (oder Basis A_1) aus noch einmal auf den Kegelschnitt projicirt wird, so dafs ein Gebilde K_2, nemlich $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$, ... (oder a_2, b_2, c_2, ...) entsteht, u. s. w. K_3, K_4, ...: dafs alsdann die so entstehenden Gebilde unter sich und mit dem ersten in einer derartigen Beziehung stehen werden. Diese Muthmafsung wird gerechtfertigt und das Wesen einer solchen Projectivität dargethan mittels einer Haupt-Eigenschaft perspectivischer Gebilde, die im Folgenden gezeigt werden soll.

Verbindet man die Elemente $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, ... (Fig. 6) kreuzweise, so liegen die Durchschnitte der zusammengehörigen Verbindungslinien, nemlich von $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}$; $\mathfrak{a}\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1$....; $\mathfrak{b}\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$...., bekanntlich auf einer Geraden *A*, der Polaren von *B*. Betrachtet man daher irgend einen Punct des *K*, z. B. $\mathfrak{a}_1$, als Projectionspunct für das Gebilde $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... und den entsprechenden Punct $\mathfrak{a}$ als Projectionspunct für das Gebilde $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, ..., so ist jene Polare *A* der Durchschnitt der Strahlenbüschel $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}$, ... und $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$, ..., welche daher perspectivisch liegen und projectivisch sind. Nun bleibt aber jedes dieser Strahlenbüschel mit sich selbst projectivisch, wenn man seinen Mittelpunct beliebig den Kegelschnitt entlang sich bewegen läfst *); und folglich sind alle unter einander projectivisch. Es erzeugen also zwei beliebige perspectivische krumme Gebilde mit jedem Puncte des Kegelschnitts projectivische Strahlenbüschel.

Macht man die entsprechende Construction für den polaren Nebensatz,

*) Siehe *Steiner*, etc. No. 43. I. 1. und 2.

so gelangt man zu einem Puncte B, Pol der Projectionsbasis A, und dieser Punct B stellt sich als der Mittelpunct zweier perspectivischen Geraden dar; woraus eben so wie vorhin gefolgert werden kann, dafs alle Strahlen (Tangenten) des krummen Gebildes K, sowohl von dem Gebilde a, b, c, ... als auch von dem Gebilde a_1, b_1, c_1, ... projectivisch geschnitten werden *).

Diese Eigenschaft perspectivischer krummer Gebilde ist in ihrer Aussage von der perspectivischen Lage derselben unabhängig, und sie ist es, kraft der wir *zwei Gebilde* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ...; $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, ... *(oder* a, b, c, ...; a_1, b_1, c_1, ...*) fortan projectivisch nennen wollen, sobald beide, mit einem beliebigen Elemente* $\mathfrak{p}$ *(oder* p*) des* K *verbunden, projectivische gerade Gebilde erzeugen;* so dafs die letzteren so zu sagen das Maafs der Projectivität jener krummen Gebilde abgeben.

In der Festsetzung dieser Benennung ist uns Herr *Steiner* **) gewissermafsen mit einem speciellen Beispiele vorangegangen, indem er vier Puncte (Tangenten) eines Kegelschnitts, wenn sie um irgend einen fünften Punct (auf irgend einer fünften Tangente) desselben harmonische Strahlenbüschel (Punctenreihen) bilden, harmonische Puncte (Tangenten) nennt; ohne jedoch dabei auf die im Obigen ausgeführte Ansichtsweise hinzudeuten.

5. Die Zulässigkeit der eben gegebenen Definition ist die Ursache, weshalb wir alle über Kegelschnittsgebilde anzustellenden Untersuchungen auf die bekannten Lehrsätze über gerade Gebilde zurückführen und begründen können.

Namentlich darf fürs erste geschlossen werden, dafs *die Projectivität zweier krummer Gebilde feststeht, sobald drei Paare entsprechender Elemente gegeben sind; dafs dann zu jedem vierten Elemente des einen das entsprechende vierte Element des andern gefunden werden kann, und dafs zur Erzeugung zweier projectivischer Gebilde drei ursprüngliche Paare entsprechender Elemente nach Willkür auf dem* K *angenommen werden dürfen;* dafs also auch, *wenn drei Paare entsprechender Elemente auf einander fallen,* $\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ auf $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}$ auf $\mathfrak{c}_1$, *alle übrigen zusammen-*

*) Diese Eigenschaften finden, wie bekannt, auch bei geraden Gebilden Statt; nur mit dem Unterschiede, dafs die Mittelpuncte (Projectionsbasen) keiner Beschränkung unterworfen sind, sondern irgend wie in der Ebene gelegen sein können. Dies rührt offenbar daher, dafs ein Kegelschnitt in *beliebige* zwei gerade Gebilde (Gerade oder Puncte) ausarten und daher jeder Punct (Gerade) der Ebene als zum ausgearteten Kegelschnitt gehörig angesehen werden kann.

**) S. No. 43. II.

fallen und die beiden Gebilde identisch sind. Die Construction, mittels welcher zu jedem vierten Elemente das vierte gefunden wird, ist natürlich eben diejenige, welche uns zur Begriffsbestimmung der Projectivität geführt hat. Sind nämlich $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ und $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1$ (Fig. 7) projectivische Gebilde, so sind die Strahlenbüschel $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}, \mathfrak{a}_1\mathfrak{c}, \mathfrak{a}_1\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}\mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}\mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}\mathfrak{d}_1$ projectivisch, und weil sie zwei vereinigte entsprechende Elemente $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ haben, so liegen sie auch perspectivisch und haben also einen perspectivischen Durchschnitt A (auf dem nemlich die Schnittpuncte von $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{c}_1$; $\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{d}_1$ liegen). Will man daher zum Puncte $\mathfrak{d}$ den entsprechenden $\mathfrak{d}_1$ finden, so darf man nur jenen Durchschnitt A mittels der Durchschnittspuncte von $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{c}_1$ bestimmen. Zieht man nun den Strahl $\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}$, so bezeichnet dieser auf der Geraden A einen Punct δ, durch welchen man von $\mathfrak{a}$ aus einen Strahl $\mathfrak{a}\delta$ zu legen hat, um auf den gesuchten Punct $\mathfrak{d}_1$ zu treffen *). Es versteht sich von selbst, dafs man irgend einem andern Punctenpaare die in der obigen Construction von dem Paare $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$ gespielte Rolle zutheilen kann und immer zu demselben Puncte $\mathfrak{d}$ gelangen mufs. Hierbei ist der wesentliche Umstand zu beachten, dafs die perspectivischen Strahlenbüschel um $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}$ ($\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}$) zu einem und demselben Durchschnitte A führen. Um dies zu beweisen, betrachte man die beiden (reellen oder imaginären) Durchschnittspuncte $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ der Geraden A mit dem K. Den entsprechenden Punct für $\mathfrak{m}$, d. h. $\mathfrak{m}_1$, findet man, wenn man den Schnittpunct der beiden Geraden A und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{m}$, also den Punct $\mathfrak{m}$, mit $\mathfrak{a}$ verbindet. Der Durchschnittspunct von $\mathfrak{a}\mathfrak{m}$ mit dem K ist aber wieder $\mathfrak{m}$. Folglich fällt $\mathfrak{m}_1$ mit $\mathfrak{m}$ zusammen, und da dasselbe für $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n}_1$ gilt, so ist der Durchschnitt A die Verbindungslinie der beiden vereinigten Punctenpaare der beiden Gebilde. Da es aber nur zwei solcher Paare geben kann, indem sonst beide Gebilde identisch wären (S. diese No. zu Anfang), so folgt schliefslich, dafs man allemal zum selben Durchschnitt A geführt wird. Dieser letzte Schlufs kann auch so ausgesprochen werden: da $\mathfrak{m}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{n}$ und $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{n}_1$ projectivisch sind, so sind die Strah-

---

*) Diese Construction ist das Analogon zu der von Herrn *Steiner* in No. 24. III. angegebenen schiefen Projection zweier geraden Gebilde. Das eine wird nemlich mit Hülfe eines Mittelgliedes A (oder $\alpha, \beta, \gamma, \delta$) auf das andere projicirt. Hierbei liegen die Gebilde K und A, A und K, ganz *aus*einander; ja das eine ist ein krummes, das andere ein gerades Gebilde. Weiter unten wird noch eine Art der schiefen Projection erwähnt werden, in welcher der Kegelschnitt selbst das Mittelglied bildet; und noch eine dritte, in der ein zweiter Kegelschnitt die Projection vermittelt. Dasselbe ist vom polaren Nebensatz zu sagen.

lenbüschel $b_1 m$, $b_1 b$, $b_1 c$, $b_1 n$ und $b m_1$, $b b_1$, $b c_1$, $b n_1$ ebenfalls projectivisch und liegen wegen der vereinigten Elemente $b_1 b$ und $b b_1$ perspectivisch; mithin liegt der Durchschnittspunct von $b_1 c$ und $b c_1$ auf der Verbindungslinie der beiden andern Schnittpuncte m und n, d. h. auf der Geraden mn, oder A. Will man die Betrachtung der (möglicherweise imaginären) Puncte m und n vermeiden, so kann man den *Pascal*schen Satz auf das Sechseck $a b_1 c a_1 b c_1$ anwenden, wodurch man unmittelbar zum selben Resultate gelangt. Sind also p und p_1; q und q_1 irgend zwei entsprechende Punctenpaare, so liegt der Durchschnittspunct $p q_1$ und $p_1 q$ auf der Geraden A. Wegen dieses gleichförmigen Verhaltens dieser Geraden zu allen Elementenpaaren der beiden Gebilde, mag sie die *Richtlinie* für diese beiden Gebilde heifsen. Sie verbindet, wie schon gesagt, deren vereinigten Elemente $m(m_1)$ mit $n(n_1)$.

Der polare Nebensatz der so eben gegebenen Construction, welcher sich auf die Betrachtung des K, als zweier aufeinander liegender projectivischer Strahlen- (Tangenten-) Gebilde bezieht, führt zu einem entsprechenden Resultate. Sind p und p_1, q und q_1 (Fig. 8) irgend zwei Paare entsprechender Tangenten, so geht die Verbindungslinie der Puncte $p q_1$ und $p_1 q$ durch einen bestimmten Punct B, den *Richtpunct* der beiden Gebilde. In den aus dem Richtpuncte an den K gezogenen Tangenten sind dann je zwei entsprechende Strahlen vereinigt. Alles oben Gesagte gilt, mit gehöriger Abänderung, auch hier, und ich halte es für überflüssig, es zu wiederholen.

Zur Bestimmung der Projectivität können statt zweier beliebiger Paare entsprechender Elemente insbesondere die beiden vereinigten Elementenpaare gegeben werden oder, was Dasselbe ist, die Richtlinie (der Richtpunct), welche beide enthält. *Die Projectivität steht also fest, sobald aufser der Richtlinie (Richtpunct) noch ein Elementenpaar gegeben ist.*

Die Projectionsstrahlen $a a_1$, $b b_1$, u. s. w. schneiden sich im Allgemeinen nicht in einem Puncte; thun sie dies aber in einem besonderen Falle, oder liegen die Gebilde zugleich perspectivisch, so ist deren Projectionsmittelpunct der Pol der Richtlinie A, und man hat in diesem Falle offenbar wieder die Figur von No. 4. *Wenn sich irgend drei Projectionsstrahlen* $a a_1$, $b b_1$, $c c_1$ *in einem Puncte B schneiden, so sind die Gebilde* a, b, c, ...; a_1, b_1, c_1, ... *perspectivisch* und alle übrigen Projectionsstrahlen gehen durch denselben Punct, den Projectionsmittelpunct. *Wenn irgend drei Durchschnitte* $a a_1$, $b b_1$, $c c_1$ *auf einer Geraden A liegen, so sind die Gebilde* a, b, c, ...; a_1, b_1, c_1, ... *perspectivisch;* und jeder andere Durchschnitt

liegt auf derselben Geraden, der Projectionsbasis. Und zwar in beiden Fällen deshalb, weil die Projectivität jedesmal schon durch die drei gegebenen Elementenpaare festgestellt ist. Setzt man hier an die Stelle der Paare $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}_1$ (oder b, b_1; c, c_1) die vereinigten Paare $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}_1$; $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}_1$ (oder m, m_1; n, n_1), so folgt, daſs *die Gebilde perspectivisch liegen, wenn irgend ein Projectionsstrahl* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ *durch den Pol der Richtlinie geht, (wenn irgend ein Durchschnitt* aa_1 *auf der Polare des Richtpuncts liegt).* Denn da die Puncte $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}_1$; $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}_1$ (die Strahlen m, m_1; n, n_1) beziehlich zusammenfallen, so sind für die Projectionsstrahlen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}_1$ (die Durchschnitte m, m_1; n, n_1) beziehlich die Tangenten in $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ (die Berührungspuncte der Strahlen m und n) am K zu nehmen. Finden diese Bedingungen nicht Statt, so liegen die Gebilde schief.

Liegen zwei Elementenpaare $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ *und* $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$ *dergestalt, daſs* $\mathfrak{b}_1$ *auf* $\mathfrak{a}$ *fällt, während* $\mathfrak{a}_1$ *auf* $\mathfrak{b}$ *liegt, so sind die Strahlen* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ *und* $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$ *identisch. In diesem Falle schneiden sich die drei Projectionsstrahlen* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$ *und jeder beliebige dritte* $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$ *in einem Puncte, und die Gebilde sind nothwendig perspectivisch. Dasselbe gilt für den polaren Nebensatz.* Wenn zwei Gebilde nicht perspectivisch liegen, so können niemals Object und Bild ihre Rollen tauschen; d. h. das Bild des Puncts $\mathfrak{a}_1$, z. B. als zur Schaar der Objecte gehörig betrachtet, kann niemals der Punct $\mathfrak{a}$ sein. Der Umstand, ob eine solche Vertauschbarkeit zweier entsprechender Elemente Statt finde, oder nicht, entscheidet also über die perspectivische Lage.

6. In Folge der bisherigen Betrachtungen können nun, wie folgt, gerade Gebilde mit krummen, und zwar sowohl gleichartige als ungleichartige, mit einander verglichen und projectivisch genannt werden.

a. Ein gerades Strahlenbüschel B und eine krumme Punctenreihe K, oder eine gerade Punctenreihe A und ein krummes Strahlenbüschel K. Hierauf ist schon bei der schiefen Projection (No. 5. Anmerkung) hingedeutet worden. In der Figur z. B. das Strahlenbüschel $\mathfrak{a}_1$ oder $\mathfrak{a}$ und das krumme Gebilde K_1 oder K. Die Bedeutung der Projectivität liegt darin, daſs das krumme Gebilde K durch ein gerades gemessen wird, welches mit dem entsprechenden geraden Gebilde B oder A projectivisch ist.

Wenn drei entsprechende Elemente aufeinander liegen, so thun es auch alle übrigen, und die Gebilde sind in perspectivischer Lage. Dazu ist aber nöthig, daſs der Mittelpunct des geraden Büschels, oder die Richtung der Punctenreihe, ein Element des Kegelschnitts K ist. Vergl. die Figur.

b. Ein gerades und ein krummes Strahlenbüschel, oder eine gerade und eine krumme Punctenreihe. An der eben angeführten Stelle z. B. die Gerade A und die Reihe K oder K_1.

Die beiden Gebilde liegen perspectivisch, wenn drei Projectionsstrahlen sich in einem Puncte schneiden (oder drei Durchschnitte entsprechender Strahlen auf einer Geraden liegen). Dieser Punct (diese Gerade) mufs nothwendig ein Element des K sein.

c. Zwei krumme Punctenreihen, zwei krumme Strahlenbüschel. Sie bildeten den Ausgangspunct der obigen Betrachtungen.

d. Eine krumme Punctenreihe und ein krummes Strahlenbüschel sind projectivisch, wenn die geraden Gebilde, welche deren Projectivität messen, projectivisch sind. Liegen die entsprechenden Elemente aufeinander, so sind sie in perspectivischer Lage. Die Möglichkeit derselben geht aus dem folgenden Lehrsatz hervor.

Die Punctenreihe a, b, c, ... *und das Büschel a, b, c, ...* (Fig. 9), *dessen Strahlen den Kegelschnitt in jenen Puncten berühren, sind in Ansehung der genannten Elemente projectivisch.* Man braucht dies offenbar nur für vier Elementenpaare zu beweisen. Zu dem Ende werde das Büschel a, b, c, d von der Tangente d in den Puncten α, β, γ, δ geschnitten; wo δ der Berührungspunct b ist. Es bildet ferner die Reihe a, b, c, b mit dem Mittelpunct a ein Büschel, welches von der Diagonale ad, bc in α', β', γ', δ' geschnitten wird: dann sind die Gebilde α, β, γ, δ; α', β', γ', δ' perspectivisch. Sie haben in der That ein Element α und α' gemeinschaftlich. Aufserdem bilden nach einem bekannten Satze die drei Diagonalpuncte des Vierecks a, b, c, b die Durchschnittspuncte der drei Diagonalen des Vierseits a, b, c, d. Der Projectionsmittelpunct der Gebilde α, β, γ, δ; α', β', γ', δ' ist daher einer jener Diagonalpuncte. Folglich erzeugen die Elemente a, b, c, b und a, b, c, d, und mithin auch alle übrigen, mit irgend einem andern Elemente projectivische Gebilde. Die beiden krummen Gebilde sind daher projectivisch und liegen auch perspectivisch, weil jeder Punct auf seinem entsprechenden Strahle (der Tangente des K in diesem Puncte) liegt.

In allen vier Fällen ist die Projectivität mittels dreier Elementenpaare bestimmt und es ist leicht, dann zu jedem vierten das entsprechende Element zu construiren.

Aus dem Vorstehenden folgt allgemein, dafs, *wenn zwei Gebilde mit einem dritten projectivisch sind, sie es auch unter sich sind.* Hiermit steht

auch fest, dafs das erste und letzte Glied einer Kette von beliebig vielen projectivischen Gebilden ebenfalls projectivisch sind.

7. Alle diese Gebilde lassen sich augenscheinlich eben so combiniren und handhaben, wie die geraden Gebilde; auch lassen sich eine Unzahl von Aufgaben und Lehrsätzen von diesen auf jene übertragen. Diese Übertragung wird aber in Bezug auf Alles, was perspectivische Lage angeht, dadurch beschränkt, dafs einestheils bei zwei krummen (auf einander liegenden) Gebilden, z. B. zwei Punctenreihen, die Verbindungslinie zweier aufeinanderliegender entsprechender Elemente nicht, wie bei geraden Gebilden, unbestimmt und willkürlich ist, sondern der Tangente des K an jenem Puncte gleich zu achten ist. Dies ist der Grund, weshalb der Satz, dafs zwei Gebilde perspectivisch liegen, wenn ein Paar entsprechender Elemente vereinigt sind, bei krummen Gebilden *nicht* gilt. Und anderntheils: obgleich die genannte Verbindungslinie im Falle eines krummen und eines geraden Gebildes zwar willkürlich ist, so ist zur perspectivischen Lage beider Gebilde doch noch erforderlich, dafs sich irgend zwei andere Projectionsstrahlen *auf dem Kegelschnitte* schneiden; weshalb der erwähnte Satz hier ebenfalls im Allgemeinen nicht gilt.

Mit Berücksichtigung dieser Einschränkungen lassen sich leicht diejenigen Sätze über gerade Gebilde erkennen, welche ohne Weiteres auf Kegelschnitte übertragen werden können. Die folgenden No. No. sollen einige Beispiele enthalten, um die Anwendbarkeit der oben eingeleiteten Theorie zu zeigen. Jedes Beispiel wird seinen polaren Nebensatz haben, bei dem ich mich nicht weiter aufhalten werde, weil die aus diesem Correlations-Systeme zu schöpfenden Folgerungen auf der Hand liegen.

Beispiele zur Anwendung der vorgetragenen Theorie.

8. Es seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ (Fig. 10) vier harmonische Puncte eines Kegelschnitts, von denen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{d}$ einander zugeordnet sind. Wegen des auf diesen Puncten stehenden harmonischen Büschels kann man die beiden letzten mit einander vertauschen; so dafs das System $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ebenfalls harmonisch ist. Bezeichnet man die Puncte in dieser Aufeinanderfolge mit $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$, so hat man zwei Systeme projectivischer Puncte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$; in denen die Strahlen $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1$ aufeinanderliegen, und die deshalb (No. 5.) perspectivisch liegen. *Es schneiden sich daher die Projectionsstrahlen* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$, d. h. *die Gerade* $\mathfrak{b}\mathfrak{d}$ *und die Tangenten in* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{c}$, *in einem Puncte B;* wie bekannt. (S. *Steiner* No. 43. II. 3.)

Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ (Fig. 11) beliebige vier Puncte eines Kegelschnitts und bezeichnet man die Puncte $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$, so ist dies letztere System bekanntlich mit dem ersteren projectivisch. Auf der Richtlinie *A* der beiden Systeme liegen die Durchschnittspuncte (No. 5.) von

$\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}$,
$\mathfrak{a}\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}$,
$\mathfrak{a}\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}$,
$\mathfrak{b}\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}$,
$\mathfrak{b}\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{b}_1\mathfrak{d}$,
$\mathfrak{c}\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}$,

d. h. weil der erste und letzte, der dritte und vierte dieser Puncte identisch sind und $\mathfrak{a}\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{d}\mathfrak{b}_1$ beziehlich Tangenten in $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ sind. *Eine Diagonale* (*A*.) *des umschriebenen Vierseits enthält zwei von den Diagonalpuncten des an seinen Berührungspuncten eingeschriebenen Vierecks* ($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$) (S. *Steiner* No. 43. III. 3.): ein Satz, dessen wir uns schon in No. 6. bedient haben, der hier aber unabhängig davon bewiesen ist.

Da ich den Folgerungen, die Herr *Steiner* a. aa. OO. aus diesen beiden Fundamentalsätzen für die Theorie der Pole und Polaren gezogen hat, nichts hinzuzusetzen weifs, so gehe ich zu andern Beispielen über.

9. In der „Entwicklung der Abhängigkeit etc." lieset man No. 60. 3. folgenden Satz:

„*Wenn in einer Ebene zwei beliebige Gerade A, A_1 und in jeder irgend vier harmonische Puncte gegeben sind, so bestimmen die letztern, paarweise genommen, 16 Strahlen S; diese schneiden sich in 72 Puncten P u. s. w.: welche Eigenschaften haben die Strahlen S in Hinsicht ihrer gegenseitigen Lage, und welche die Puncte P? wie oft liegen von den letzteren 3, und wie oft 6 in einer Geraden? u. s. w. (Giebt es z. B. 8 Kegelschnitte, wovon jeder die gegebenen Geraden A, A_1 und 4 Strahlen S berührt? Liegen unter andern von den Puncten P, 8mal 6 in einer Geraden, und schneiden sich von diesen 4 und 4 in einem Punct? u. s. w.)*"

„*Die der vorstehenden ähnliche Aufgabe, wenn in einem Kegelschnitt zweimal vier harmonische Puncte gegeben sind.*"

Von dieser Aufgabe ist meines Wissens noch nirgends weder eine Auflösung erschienen, noch auch angedeutet worden, welche Eigenthümlichkeiten bei seiner Übertragung auf harmonische Puncte eines Kegelschnitts Statt finden. Übrigens ist der Beweis der in ihr enthaltenen Andeutungen für beide

Fälle derselbe und beruht darauf, dafs zwei harmonische Systeme auf achtfache Art durch Vertauschung ihrer Elemente auf einander bezogen werden können (S. *Steiner* No. 8. I. *β*.), nemlich in folgender Art:

	$\underbrace{\mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d}}$	und		$\underbrace{\mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d}}$,
mit	$\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{c}_1,\ \mathfrak{d}_1$,		mit	$\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{c}_1,\ \mathfrak{b}_1$,
oder	$\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{c}_1$,		oder	$\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{c}_1,\ \mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{a}_1$,
oder	$\mathfrak{c}_1,\ \mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{b}_1$,		oder	$\mathfrak{c}_1,\ \mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{d}_1$,
oder	$\mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{c}_1,\ \mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{a}_1$,		oder	$\mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{c}_1$.

Was nun jene erwähnten 8 Kegelschnitte betrifft, so ist die darauf bezügliche Behauptung durch die vorzüglichen Entdeckungen des Herrn *Steiner* selbst, für den Fall von zwei harmonischen Geraden schon zu bekannt geworden, als dafs ich bei deren Beweise zu verweilen nöthig hätte. Sie gilt auch für den Fall eines Kegelschnitts *K*, insofern von jenen 8 Kegelschnitten *jeder aufser 4 Strahlen auch noch den Kegelschnitt K doppelt berührt.* Diesen Umstand hebt Herr *Steiner* nicht hervor. Auch folgt die Wahrheit dieser Behauptung, so weit ich in der Sache sehen kann, nicht unmittelbar aus seinen Principien, sondern erst aus denjenigen Erweiterungen, die den Gegenstand dieser Abhandlung ausmachen, und namentlich *aus der weiter unten folgenden Betrachtung der Erzeugnisse schiefliegender krummer Gebilde;* worauf hiermit verwiesen wird.

Die Fragen über die Anzahl der durch 3 und 3 Puncte *P* gehenden Geraden beseitigend, da sie rein der Combinatorik angehören, beweise ich die übrigen Andeutungen der Aufgabe folgendermaafsen: Jede der aufgezählten 8 Zuordnungs-Arten der beiden Systeme $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$ führt zu einer *Richtlinie*, auf der, z. B. bei der Zuordnung von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ zu $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, die 6 Durchschnitte der Verbindungslinien

$\mathfrak{a}\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{c}_1$,	$\mathfrak{b}\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{c}\mathfrak{d}_1$
$\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$,	$\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1$
$\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{d}\mathfrak{c}_1$,	$\mathfrak{c}\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{d}\mathfrak{a}_1$

liegen (No. 5.). Diese Richtlinie mag durch die Combination ($\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$), zu der sie gehört, bezeichnet werden. Solcher Richtlinien giebt es daher 8. Vier derselben, nemlich

$$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_1),$$
$$(\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1\mathfrak{c}_1),$$
$$(\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1),$$
$$(\mathfrak{d}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1),$$

schneiden sich nur in einem Puncte und die vier andern,

$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1)$,
$(\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1\mathfrak{a}_1)$,
$(\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1)$,
$(\mathfrak{d}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1)$,

in einem andern. Um dies zu erkennen, betrachte man die beiden Vierseiten $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{d}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}\mathfrak{c}_1$ (Fig. 12); deren Seiten einander in der genannten Reihenfolge zugeordnet sein mögen. Die Durchschnittspuncte der entsprechenden Seiten, nemlich von $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{d}_1$, von $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{c}\mathfrak{a}_1$ u. s. w., liegen, wie leicht zu sehen, auf der Richtlinie $(\mathfrak{d}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1)$. Wendet man nun einen bekannten Satz (dafs die drei Paare entsprechender Ecken eines Dreiseits auf zusammenstofsenden Geraden liegen, wenn die drei Paare entsprechender Seiten desselben sich in drei Puncten einer Geraden schneiden) auf die in den genannten Vierseiten enthaltenen Paare entsprechender Dreiseite an, nemlich auf die Paare

$$\left.\begin{matrix}\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{b}\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{c}\mathfrak{c}_1\\ \text{und } \mathfrak{b}\mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{c}\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{d}\mathfrak{b}_1,\end{matrix}\right\}\ \text{ferner}\ \left.\begin{matrix}\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{b}\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{d}\mathfrak{d}_1\\ \text{und } \mathfrak{b}\mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{c}\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}\mathfrak{c}_1,\end{matrix}\right\}\ \text{u. s. w.},$$

so findet sich, dafs die drei Verbindungslinien der Ecken $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}\mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{d}\mathfrak{b}_1$; ferner die der Ecken $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{a}\mathfrak{c}_1$; $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{c}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}\mathfrak{c}_1$ u. s. w. je in einem Puncte zusammenstofsen. Von den Ecken jener beiden Vierseite bestimmen aber

die Ecken	nebst den entsprechenden	die Richtlinie
$\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1$;	$\mathfrak{c}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}\mathfrak{c}_1$;	$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_1)$,
$\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1$;	$\mathfrak{b}\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{d}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}\mathfrak{c}_1$;	$(\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1\mathfrak{c}_1)$,
$\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$;	$\mathfrak{b}\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}\mathfrak{b}_1$;	$(\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1)$,
$\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1$; $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$;	$\mathfrak{b}\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{a}\mathfrak{c}_1$; $\mathfrak{c}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{d}\mathfrak{b}_1$;	$(\mathfrak{d}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1)$.

Es schneiden sich daher die 2te, 3te, 4te; die 2te, 4te, 1te, u. s. w. in je einem Puncte. Folglich schneiden sich auch alle 4 in demselben Puncte. Ganz dasselbe läfst sich natürlich von den 4 andern Richtlinien der Figur beweisen.

Dieser Punct ist der Durchschnitt zweier Diagonalen des Vierseits $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1$, welche die 2te und 4te Richtlinie bilden; und von ihm aus laufen die 1te und 3te Richtlinie nach den beiden übrigen Ecken des Vierseits. *Die vier Richtlinien bilden* also *ein harmonisches Büschel; und zwar sind die 1te und 3te, die 2te und 4te einander zugeordnet.* Dieser leicht zu vermuthende und eben so leicht zu bestätigende Umstand wäre wohl der Erwähnung werth gewesen.

Überdies gehört jeder der folgenden 8 Durchschnitte von Projectionsstrahlen: $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$; $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1$; $\mathfrak{a}\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{b}\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}\mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{a}\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{b}\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}\mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{d}_1$; $\mathfrak{b}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{d}\mathfrak{c}_1$, zweien jener 8 Richtlinien an, welche beide nebst den ihn bestimmenden Projectionsstrahlen, wie man leicht findet, ein harmonisches Büschel um ihn bilden, das mit denen der 2mal 4 Richtlinien perspectivisch liegt und mit ihnen einen der Projectionsstrahlen zum perspectivischen Durchschnitt hat.

10. Wenn in der Ebene eines Kegelschnitts K (Fig. 13) ein beliebiger Punct B gegeben ist, so kann man die von ihm ausgehenden Leitstrahlen paarweise einander so zuordnen, dafs jeder durch den Pol des andern geht. Ist der Punct B der Mittelpunct des Kegelschnitts, so wird die Schaar zugeordneter Leitstrahlen offenbar zu der Schaar zugeordneter Durchmesser der Curve. Auch ist ersichtlich, dafs zwei zugeordnete Leitstrahlen mit einander vertauscht werden können, d. h. dafs jeder wieder seinem Zugeordneten zugeordnet ist. Nun kann allgemein bewiesen werden, dafs *zwei Strahlenbüschel um B, von denen das eine die den Strahlen des andern conjugirten Strahlen enthält, projectivisch sind.* Beschreibt man nemlich ein umschriebenes Vierseit uva_1a_3, welches den Punct B zum Diagonalpunct hat, so enthält jede der drei Diagonalen $B\mathfrak{a}$, $B\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ bekanntlich die Pole der beiden andern. Verändert man von diesem Vierseit nur die Seiten a_2 und a_3 dergestalt, dafs der Diagonalpunct B unverändert bleibt, so erhält man für jede Lage der Seite (Tangente) a_2 ein Paar zugeordneter Leitstrahlen $B\mathfrak{a}$, $B\mathfrak{a}_1$, oder a, a_1. Nun liegt aber das krumme Strahlenbüschel a_2, b_2, …., sowohl mit dem geraden a, b, …., als auch mit a_1, b_1, …. perspectivisch, da die Tangenten u und v deren perspectivische Durchschnitte sind: also sind die Strahlenbüschel a, b, …. und a_1, b_1, …. auch unter sich projectivisch, w. z. b. w.

Denkt man sich nun den Punct B auf der Peripherie eines zweiten Kegelschnitts K_1 (Fig. 14), so *erzeugt jedes Paar zugeordneter Leitstrahlen a, a_1 in diesem eine Sehne* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, *und alle diese Sehnen gehen durch einen und denselben Punct B_1, der auf demjenigen Leitstrahle p_1 liegt, welcher der Tangente des K_1 in B, als einem Leitstrahle p, zugeordnet ist.* Da nemlich die Büschel a, b, …. p und a_1, b_1, …. p_1 projectivisch sind, so sind es auch die Punctenreihen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, …. $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, …. $\mathfrak{p}_1$ des Kegelschnitts K_1. Da ferner die Strahlen a und a_1 vertauscht werden können, so können dies auch die Puncte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$ werden; d. h. der Punct $\mathfrak{a}_1$, als zum ersten Systeme gehörig betrachtet und deshalb b benannt, wird seinen zugeordneten Punct $\mathfrak{b}_1$ in $\mathfrak{a}$ haben. Deshalb liegen die beiden Punctenreihen perspectivisch (No. 5.) und ihr

Projectionspunct B_1 befindet sich auf dem beschriebenen Strahle p_1, insofern die Tangente p den K_1 in ihrem Berührungspuncte $\mathfrak{p}$ schneidet und demnach der Strahl p_1 oder $\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1$ der Schaar der Sehnen $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, ... zugehört.

Diesen letzteren Satz hat *Frégier* im 7ten Bande der „Annales des mathématiques p. 95" für den besondern Fall aufgestellt und algebraisch bewiesen, dafs B der Mittelpunct des Kegelschnitts K ist; wo dann, wie schon erwähnt worden, die zugeordneten Leitstrahlen zugeordnete Durchmesser werden. Über besonders merkwürdige Specialfälle dieses Satzes kann die angeführte Stelle nachgelesen werden. Herr *Poncelet* hat ihn schon so, wie er hier gegeben worden ist, verallgemeinert (Traité des propriétès etc. No. 465.) und auf geometrischem Wege bewiesen. Seine Hülfsmittel sind jedoch von den oben angewendeten gänzlich verschieden.

Der polare Nebensatz wird durch wechselseitige Vertauschung von Punct und Gerade offenbar auf dieselbe Weise bewiesen. In Bezug auf den Kegelschnitt K enthält nemlich jede Gerade A eine Schaar von conjugirten Punctenpaaren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$, u. s. w., von welchen Puncten jeder auf der Polaren seines zugeordneten Puncts liegt. Denkt man sich nun A als Tangente eines Kegelschnitts K_1, so erzeugt sowohl die Schaar $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ..., als auch die Schaar $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, ..., zwei krumme Strahlenbüschel in K_1; nemlich a, b, c, ... und a_1, b_1, c_1, ..., die perspectivisch liegen und deren Durchschnitt namentlich durch denjenigen Punct der Geraden A geht, der dem Berührungspuncte mit K_1 zugeordnet ist.

Diesen polaren Nebensatz habe ich nur deshalb erwähnt, um daran die völlige Verschiedenheit und gewissermaafsen Einseitigkeit der *Poncelet*schen Methode zu zeigen, welcher der Beweis dieses Nebensatzes nicht direct, sondern erst auf einem Umwege, vermittels der „Théorie des polaires réciproques" gelingen zu können scheint. Herrn *Poncelets* Methode besteht nemlich überhaupt darin, die fraglichen projectivischen Eigenschaften an einfacheren Figuren zu beweisen, von welchen die gegebenen die Projectionen sind. Auf diese Art projicirt er, um den obigen Satz zu beweisen, die Figur dergestalt, dafs der Kegelschnitt K ein Kreis b und B dessen Mittelpunct wird, wodurch die zugeordneten Leitstrahlen a und a_1, ... aufeinander senkrechte Durchmesser werden, und also nur noch zu beweisen bleibt, dafs, wenn sich ein rechter Winkel um einen Punct B eines Kegelschnitts K_2 (Projection von K_1) als Scheitel herumdreht, die entsprechenden Sehnen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, ... um einen Punct sich drehen werden. Zu dem Ende wird ein anderer Kreis b_1 an den Kegel-

schnitt K_2 in B berührend gelegt, in welchem die Sehnen der genannten rechten Winkel sich allerdings um einen Punct drehen, nemlich um den Mittelpunct von b_1. Projicirt man endlich den Kegelschnitt K_2 und den Kreis b_1 dergestalt, dafs beides Kreise K_3 und b_2 werden, so bleiben jene Winkel zwar keine rechten mehr, indessen werden deren Projectionen doch noch immer im Kreise b_2 Sehnen abschneiden, die sich in einem Puncte kreuzen. Da nun der Berührungspunct der beiden Kreise K_3 und b_2 deren innerer Ähnlichkeitspunct ist, so müssen auch die im Kreise K_3 abgeschnittenen Sehnen durch *einen* Punct gehen; folglich mufs dasselbe im Kegelschnitte K_2 Statt finden; w. z. b. w. Und folglich auch im ursprünglichen Kegelschnitte K_1.

Wollte man nun den polaren Nebensatz auf dieselbe Art beweisen, so müfste es in der Ebene eines Kreises eine Gerade geben, die nebst ihren zugeordneten Punctenpaaren ein eben so einfaches Verhalten zum Kreise hätte, wie es sein Mittelpunct, nebst den von ihm ausgehenden zugeordneten Leitstrahlen, d. h. rechtwinkeligen Durchmessern hat. Dies müfste deshalb Statt finden, damit man bei der ersten Projection den Kegelschnitt K und die Gerade A in einen solchen Kreis nebst einer solchen Geraden projiciren könnte. Eine solche Gerade dürfte es aber wohl nicht geben; mit Ausnahme der unendlich entfernten Geraden der Ebene; was aber zu nichts führen würde, weil der Kegelschnitt K_2 wegen seiner unendlich entfernten Tangente nothwendig zu einer Parabel würde, das System aber, dieses K_2, des Kreises b_1 und ihrer gemeinschaftlichen, unendlich entfernten Tangente niemals die Projection eines Systems zweier Kreise K_3 und b_2 nebst ihrer gemeinschaftlichen Tangente sein könnte, indem jede Projection des letztern Systems zu *zwei* Parabeln K_2 und b_1 mit parallelen Axen führen würde. Auch erwähnt Herr *Poncelet* des polaren Nebensatzes gar nicht. Aber, selbst abgesehen hiervon, gewährt die *Poncelet*sche Behandlungs-Art keinen eben so tiefen Blick in die Sache, als die hier befolgte, im wesentlichen *Steiner*sche Methode. Wenn nemlich Herr *Poncelet*, die Richtigkeit unseres Satzes für einen beständig rechten Winkel $\mathfrak{a}B\mathfrak{a}_1$ erkennend, fortfährt: „Il existe une circonstance générale pour laquelle la corde $(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1)$ de l'angle variable $(\mathfrak{a}B\mathfrak{a}_1)$ pivote, dans toutes ses positions, autour d'un point fixe; c'est celle où cet angle peut être considéré comme la projection, sur un autre plan, d'un angle constamment droit. Or cette circonstance particulière peut se reconnaître très simplement et se réproduire dans un grand nombre de cas": so ist aus den hier aufgestellten Principien leicht abzunehmen, dafs diese Worte den Gegenstand insofern

nicht erschöpfen, als jener Umstand kein besonderer ist, sondern *immer* Statt finden mufs. Denn da die Gebilde auf K_1, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, ... $\mathfrak{p}_1$ perspectivisch liegen sollen, so sind die in B concentrischen Strahlenbüschel a, b, c, ... p und a_1, b_1, c_1, ... p_1 so beschaffen, dafs irgend ein Paar zugeordneter Strahlen a und a_1 mit einander vertauscht werden kann. Da nun, erstens, die Projectivität derselben mittels dreier entsprechender Strahlenpaare a, b, c und a_1, b_1, c_1 feststeht, von denen b_1 und a_1 beziehlich mit a und b zusammenfallen, und da, zweitens, schon hingestellt worden ist, dafs die beiden Systeme zugeordneter Leitstrahlen projectivisch sind und deren Projectivität durch dieselben Bedingungen bestimmt ist, so braucht nur gezeigt zu werden, dafs zwei gegebene Paare von Strahlen a und a_1, c und c_1 zugeordnete Leitstrahlen in Bezug auf einen Kegelschnitt sein können; daraus wird dann folgen, dafs alle übrigen Paare p und p_1 u. s. w. es ebenfalls sind. Zu dem Ende ziehe man zwei beliebige Geraden u und v (Fig. 15) nebst den Verbindungslinien a_2, b_2, c_2 der von a und a_1, b und b_1, c und c_1 beziehlich auf u und v bestimmten Durchschnittspuncte, so wird der die 5 Geraden u, v, a_2, b_2, c_2 berührende Kegelschnitt K die verlangte Eigenschaft haben. Die Wahrheit dieser Behauptung leuchtet auf der Stelle ein, wenn man die umgekehrte Construction zu Anfang dieser Nummer betrachtet. Nun kann aber schliefslich dieser Kegelschnitt K so in einen Kreis projicirt werden, dafs B sein Mittelpunct wird und mithin die Leitstrahlen a, b, c, ... und a_1, b_1, c_1, ... zugeordnete rechtwinkelige Durchmesser werden. Folglich ist der veränderliche Winkel aa_1 oder $\mathfrak{a}B\mathfrak{a}_1$ *jedenfalls* als die Projection eines beständig rechten Winkels zu betrachten. Wollte man hier einwenden, dafs die letzterwähnte Projection unmöglich sei, wenn der Punct B aufserhalb des Kegelschnittes K fällt (was immer geschehen wird, wenn es in den concentrischen Büscheln B zwei aufeinanderfallende entsprechende Strahlenpaare giebt, die dann offenbar Tangenten am Kegelschnitt K sind), so dürfte dies wenigstens nicht zu Gunsten Herrn *Poncelets* geschehen, weil die Zulassung des Durchganges durch das Imaginäre keiner der am wenigsten genialen Züge seines inhaltvollen Werkes ist.

11. *Bewegen sich die Ecken eines n Ecks theils auf einem Kegelschnitt K, theils auf festen Geraden A, A_1, A_2, ..., die sich sämmtlich in einem Puncte b des Kegelschnitts schneiden, während sich n — 1 Seiten desselben um eben so viele feste Puncte drehen; und zwar diejenigen Seiten, deren beide Endpuncte auf dem K liegen, um beliebige Puncte der Tan-*

gente in b, und diejenigen Seiten, von denen nur ein Endpunct auf dem Kegelschnitt liegt, um beliebige Puncte des Kegelschnitts: so bewegen sich alle diejenigen Seiten des vollständigen n Ecks, deren Endpuncte auf den Geraden gleiten, um bestimmte feste Puncte.

Der Beweis folgt leicht aus der wiederholten Anwendung der bekannten Sätze, kraft deren offenbar alle geraden und krummen Gebilde A, A_1, A_2, ... K, in Ansehung der auf ihnen liegenden Ecken, der Reihe nach perspectivisch liegen. Überdies entspricht der gemeinschaftliche Punct in allen Gebiden sich selber; was besonders dadurch bewirkt worden ist, dafs der Übergang von einem krummen Gebilde zum andern durch einen auf der Tangente in b liegenden Punct geschieht. Folglich liegen alle Geraden unter einander perspectivisch; was zu erweisen war. Aus dem Zusammenfallen zweier entsprechenden Elemente in b läfst sich aber nicht auf die perspectivische Lage zweier krummer oder eines krummen und eines geraden Gebildes schliefsen (No. 7). Deshalb werden diejenigen Seiten des vollständigen n Ecks, deren einer Endpunct auf dem K_1 gleitet, sich im Allgemeinen nicht um einen Punct drehen.

Dieser Satz würde auch noch gelten, und eben so bewiesen werden, wenn sich einige Ecken auf verschiedenen durch b gehenden Kegelschnitten bewegten; wenn nur nicht zwei auf einander folgende Ecken auf verschiedenen Kegelschnitten gleiten. Ja, *diese letzte Einschränkung läfst sich auch noch aufheben, wenn man nur den Drehpuncten solcher Seiten, deren Ecken auf verschiedenen Kegelschnitten einherlaufen, gewisse bestimmte Orte anweiset.* Da dieser letztere Fall jedoch auf Grundsätzen beruht, die im Vorigen nicht entwickelt wurden und nicht entwickelt werden sollten, so mag seiner nur beiläufig gedacht werden.

Mittels der obigen Sätze kann auch sehr leicht die folgende Aufgabe gelöset werden: *Es soll ein n Eck construirt werden, dessen Ecken in bestimmter Reihenfolge auf beliebig gegebenen Geraden oder Kegelschnitten liegen und dessen Seiten durch n gegebene Puncte gehen, von welchen diejenigen, deren zugehörige Seiten einen ihrer Endpuncte auf einem Kegelschnitte haben, auf diesem Kegelschnitte liegen; diejenigen aber, deren zugehörige Seiten beide Endpuncte auf verschiedenen Kegelschnitten haben, auf beiden Kegelschnitten zugleich liegen.*

Man beschreibe von einer, beliebig auf einem der Kegelschnitte angenommenen Ecke a aus, den gegebenen Bedingungen gemäfs, ein Polygon von

n Seiten, dessen letzte oder $(n+1)^{te}$ Ecke $\mathfrak{a}_n$ augenscheinlich wieder auf demselben Kegelschnitte liegt. Eben so verfahre man mit zwei andern Ecken $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ und gelange mittels der vorgeschriebenen Züge beziehlich zu den Ecken $\mathfrak{b}_n$ und $\mathfrak{c}_n$. Dann sind offenbar alle Gebilde der Reihe nach perspectivisch, und folglich sind je zwei, und namentlich das erste $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und das letzte $\mathfrak{a}_n$, $\mathfrak{b}_n$, $\mathfrak{c}_n$ projectivisch. Schliefst sich nun das Polygon in allen drei Fällen, d. h. kommen die Puncte $\mathfrak{a}_n$, $\mathfrak{b}_n$, $\mathfrak{c}_n$ beziehlich auf $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ zu liegen, so wird die Aufgabe unbestimmt sein, und jeder beliebig gewählte Anfangspunct wird zu einem der Aufgabe genügenden n Ecke führen, weil die beiden Gebilde $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_n$, $\mathfrak{b}_n$, $\mathfrak{c}_n$ identisch sind (No. 5.). Schliefst sich das Polygon nur in zwei Fällen, so sind dies die beiden einzigen möglichen Auflösungen. Schliefst es sich nur in einem Falle, oder gar nicht, so hat man die vereinigten Elemente der Gebilde $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_n$, $\mathfrak{b}_n$, $\mathfrak{c}_n$ zu suchen. Dies geschieht mittels des Lineals allein, indem man die Richtlinie beider Gebilde aufsucht (nach No. 5.), welche den Kegelschnitt in den verlangten Puncten schneiden wird. Die Aufgabe hat also entweder zwei, oder eine doppelte, reelle, oder zwei imaginäre Auflösungen, je nachdem jene Richtlinie den Kegelschnitt schneidet, ihn berührt, oder aufserhalb desselben liegt.

Diese Aufgabe würde auch dann noch auf dieselbe Weise aufgelöset werden können, wenn diejenigen festen Puncte, deren Seiten ihre Endpuncte auf verschiedenen Kegelschnitten haben, nicht, wie oben angenommen wurde, in einem Durchschnitte der beiden Kegelschnitte liegen, sondern an einem der vorhin erwähnten bestimmten Orte, von welchen aus sich ein Kegelschnitt auf den andern projectivisch projiciren läfst.

12. Es ist schon darauf aufmerksam gemacht worden, dafs wenn in zwei krummen Gebilden auf dem Kegelschnitt K der Punct $\mathfrak{a}_1$ dem Puncte $\mathfrak{a}$ im ersten Systeme entspricht, alsdann dem Puncte $\mathfrak{a}_1$, als zum ersten Systeme gehörig betrachtet, nicht wieder der Punct $\mathfrak{a}$ entspreche, es wäre denn, dafs die beiden Gebilde perspectivisch lägen. Bezeichnet man also den Punct $\mathfrak{a}_1$ mit $\mathfrak{b}$, so wird ihm ein Punct $\mathfrak{b}_1$, von $\mathfrak{a}$ verschieden, entsprechen. Dieser Punct $\mathfrak{b}_1$ zum ersten Systeme gehörig betrachtet und mit $\mathfrak{c}$ bezeichnet, wird vielleicht den ersten Punct $\mathfrak{a}$ zu seinem entsprechenden $\mathfrak{c}_1$ haben. Sollte dies nicht der Fall sein, so könnte möglicherweise der entsprechende Punct von $\mathfrak{c}_1$ oder $\mathfrak{d}$, nemlich $\mathfrak{d}_1$, auf $\mathfrak{a}$ fallen u. s. w. Es kann also die Aufgabe gestellt werden: In dem ersten Gebilde einen solchen Punct $\mathfrak{a}$ zu finden, dafs man nach $n$maliger Wiederholung der erwähnten Operation wieder zu demselben

Puncte $\mathfrak{a}$ gelange. Ist die Projectivität beider Gebilde durch die Richtlinie A und ein Paar entsprechende Puncte B und B_1 gegeben, so schneiden sich $B\mathfrak{a}_1$ und $B_1\mathfrak{a}$ auf A. Die Aufgabe läfst sich also auch so aussprechen: *Es ist eine Gerade A und ein Kegelschnitt K, nebst zwei auf ihm liegenden Puncten B und B_1 gegeben. Man soll ein $2n$ Eck construiren, dessen Ecken abwechselnd auf K und A liegen und dessen Seiten abwechselnd durch B und B_1 gehen.* Nimmt man eine Reihe beliebiger Anfangspuncte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$ an, und sind $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \ldots$ deren entsprechende Puncte; ferner $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{c}_2, \ldots$ die der letzteren u. s. f., bis man nach $n$maliger Wiederholung zum Systeme $\mathfrak{a}_n, \mathfrak{b}_n, \mathfrak{c}_n, \ldots$ gelangt, so sind alle diese Gebilde projectivisch und es handelt sich nur darum, die zusammenfallenden Elemente des ersten und letzten Gliedes zu finden. Diese erhält man aber ohne weitere Construction; denn es ist klar, dafs die vereinigten Elemente der beiden ersten Systeme, nemlich $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$, auch die aller folgenden sein werden, und also auch des ersten und letzten. Für jeden dieser beiden Puncte fällt aber das verlangte $2n$ Eck in ein Paar gerader Linien, $B\mathfrak{m}$, $B_1\mathfrak{m}$ und $B\mathfrak{n}$, $B_1\mathfrak{n}$ zusammen. Ist daher ein wirkliches $2n$ Eck, den gegebenen Bedingungen gemäfs, möglich, so müssen 3 Paare entsprechender Elemente des ersten und letzten Systems zusammenfallen, und diese sind deshalb identisch. Hieraus folgt, dafs wenn man, von einem beliebigen Puncte $\mathfrak{a}$ ausgehend, ein $2n$ Eck beschreibt und dann die letzte Ecke nicht wieder auf $\mathfrak{a}$ fällt, die Aufgabe unmöglich ist; dafs aber, wenn die letzte Ecke auf $\mathfrak{a}$ fällt, jeder andere Anfangspunct den Bedingungen genügen und daher die Aufgabe unbestimmt sein wird.

Da die Möglichkeit der Aufgabe demnach lediglich von der anfänglichen Bestimmung der Projectivität abhangt, so kann verlangt werden, dieselbe dergestalt festzusetzen, dafs ein solches $2n$ Eck möglich wird. Diese Aufgabe hangt von der Kreistheilung in n Theile ab. Sind nemlich wie vorhin $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_{n-1}$, die n auf dem Kegelschnitte liegenden Ecken, so entsprechen ihnen beziehlich im 2ten Systeme die Ecken $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \ldots \mathfrak{a}_{n-1}, \mathfrak{a}$; diese beiden Systeme sind projectivisch und ihre vereinigten Elemente heifsen $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$. Projicirt man beide Systeme von einem beliebigen Puncte C des Kegelschnitts aus auf eine beliebige Gerade D, so entstehen auf derselben zwei aufeinanderliegende projectivische Gebilde, deren einzelne Elemente der Kürze wegen die obigen Namen behalten mögen. Also hat man wegen der besagten Projectivität:

$$\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}\mathfrak{a}} : \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{n}\mathfrak{a}_1} = \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{n}\mathfrak{a}_1} : \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}_2}{\mathfrak{n}\mathfrak{a}_2},$$

$$\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}\mathfrak{a}}:\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{n}\mathfrak{a}_1} = \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}_2}{\mathfrak{n}\mathfrak{a}_2}:\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}_3}{\mathfrak{n}\mathfrak{a}_3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}\mathfrak{a}}:\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{n}\mathfrak{a}_1} = \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}_{n-1}}{\mathfrak{n}\mathfrak{a}_{n-1}}:\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}\mathfrak{a}}.$$

Multiplicrt man diese $n-1$ Gleichungen zum Behufe der Elimination der Puncte $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \ldots \mathfrak{a}_{n-1}$ mit einander, so erhält man

$$\left(\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}\mathfrak{a}}:\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{n}\mathfrak{a}_1}\right)^n = 1.$$

Sind nun die Richtlinie und daher auch die Puncte $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ gegeben, so ist es ersichtlich: 1) dafs es hier bei Bestimmung einer solchen Projectivität auf eine Kreistheilung ankommt; 2) dafs die Puncte $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ nothwendig ein Paar conjugirter imaginärer Puncte sein müssen, oder mit andern Worten, dafs die Richtlinie A den Kegelschnitt K nicht treffen darf, wenn das verlangte $2n$ Eck reell sein soll; und 3) dafs dann der erste Punct $\mathfrak{a}$ ganz beliebig angenommen werden kann; wie schon gesagt worden.

Die Anzahl aller möglichen Auflösungen scheint dann $2n$ zu sein, da sich n Werthe für das Doppelverhältnifs $\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}\mathfrak{a}}:\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{n}\mathfrak{a}_1}$ und also auch für das Verhältnifs $\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{n}\mathfrak{a}_1}$ ergeben und ein jeder solcher Werth zwei Puncte für $\mathfrak{a}_1$ liefert, die einander in Bezug auf $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ harmonisch zugeordnet sind. Es kann aber gezeigt werden, dafs immer nur n derselben die Aufgabe wirklich lösen. Man hat zu dem Ende nur zu bedenken, dafs durch ein solches Verhältnifs $\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{p}}{\mathfrak{n}\mathfrak{p}}$ der Punct $\mathfrak{p}$ allerdings im allgemeinen doppeldeutig gegeben ist, dafs er aber in den Fällen näher bestimmt wird, wo er, nebst einem andern, in einer bestimmten Reihenfolge in Bezug auf $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ liegen mufs. Diese Fälle treten namentlich dann ein, wenn man zwei projectivische Gebilde vergleicht; denn alsdann mufs der Punct $\mathfrak{p}$ nicht allein $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ in einem gegebenen Verhältnisse schneiden, sondern auch der Bedingung genügen, dafs die beiden Quaternionen projectivischer Elemente dieselbe Reihenfolge beobachten *). Bezeichnet man daher mit $\mathfrak{a}_1$ einen Punct, der die Aufgabe löset und nach und nach zu den Ecken

$$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \ldots \mathfrak{a}_{n-1}, \mathfrak{a}$$

führt, und nennt man den ihm in Bezug auf $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ harmonisch zugeordneten

---

*) S. *Steiner* No. 6. I. und No. 10.

Punct α_1, der eben so die Ecken

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \alpha_3, \ \ldots . \ \alpha_{n-1}, \ \alpha_n$$

liefert, so können die Puncte α nur entweder mit den entsprechenden Puncten $\mathfrak{a}$ zusammenfallen, oder ihnen harmonisch zugeordnet sein, da sie die Gerade $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$ beziehlich in demselben Verhältnifs schneiden. Liegen nun die Puncte $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ in einer gewissen Reihenfolge, so liegen in derselben Reihenfolge auch: 1) deren entsprechende Puncte $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$; 2) die Puncte $\mathfrak{m}$, α_1, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{a}$, weil α_1, als harmonischer Punct von $\mathfrak{a}_1$, innerhalb $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$ liegt, wenn sich $\mathfrak{a}_1$ aufserhalb derselben befindet, und umgekehrt; 3) die Puncte $\mathfrak{m}$, α_2, $\mathfrak{n}$, α_1, als den vorigen entsprechend; 4) endlich die Puncte $\mathfrak{m}$, α_2, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{n}$, aus demselben Grunde wie bei 2). Diese Reihenfolge ist aber, rückwärts gelesen, mit $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{a}_1$, α_2 identisch und zeigt, mit 1) verglichen, dafs der Punct α_2 auf $\mathfrak{a}_2$ fällt. Geht man eben so zu α_3, α_4, ... weiter, so ergiebt sich, dafs die Puncte α mit geraden Zeigern auf die entsprechenden Puncte $\mathfrak{a}$ fallen, während die mit ungeraden Zeigern den entsprechenden $\mathfrak{a}$ harmonisch zugeordnet sind. Ist also *n ungerade,* so ist α_n dem $\mathfrak{a}$ harmonisch zugeordnet und es erhellet, dafs von jedem der gefundenen n Paare harmonischer Puncte $\mathfrak{a}_1$ und α_1 nur der eine die Aufgabe löset, mithin im Ganzen nur n Auflösungen existiren. Ist aber *n gerade,* so fällt α_n mit $\mathfrak{a}$ zusammen und der harmonische Punct α_1 löset die Aufgabe ebenfalls; allein in diesem Falle sind die n Werthe des Verhältnisses $\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{n}\mathfrak{a}_1}$ bekanntlich paarweise einander dem Vorzeichen nach entgegengesetzt. Wenn aber einer dieser Werthe zwei Puncte für $\mathfrak{a}_1$ liefert, so ergiebt sich aus dem entgegengesetzten Werthe kein Punct und man gelangt auf diese Art wieder nur zu n Auflösungen. Wenn man lieber mit Herrn *Möbius* (barycentrischer Calcul) die nähere Bestimmung der Lage eines Punctes $\mathfrak{p}$ durch das Vorzeichen des Verhältnisses $\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{p}}{\mathfrak{n}\mathfrak{p}}$ bewerkstelligen will, indem man ihm für die zwischen $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ liegenden Puncte das entgegengesetzte Zeichen des für die aufserhalb liegenden giebt, anstatt mit Herrn *Steiner* die Aufeinanderfolge der Puncte in Erwägung zu ziehen, so ist auf der Stelle klar, dafs es nur n Auflösungen für die obige Aufgabe giebt, weil man für das Verhältnifs $\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{n}\mathfrak{a}_1}$ eben so viele Werthe als für die $n$te Wurzel der Einheit erhält und jeder Werth nur eine Auflösung liefert.

Wenn in der vorigen Aufgabe die Bedingung gestellt würde, dafs die $(n+1)$te der auf dem Kegelschnitte liegenden Ecken, anstatt wieder auf die

erste $\mathfrak{a}$ zu fallen, vielmehr in einen gegebenen Punct $\mathfrak{p}$ falle, so würde man mittels der obigen Behandlungs-Art zur Bestimmung des Puncts $\mathfrak{a}_1$ die Gleichung

$$\left(\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}\mathfrak{a}}:\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{n}\mathfrak{a}_1}\right)^n = \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}\mathfrak{a}}:\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{p}}{\mathfrak{n}\mathfrak{p}}$$

erhalten. Trifft nun die Richtlinie A den Kegelschnitt K nicht, sind also $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ zwei conjugirte *imaginäre* Puncte, so ist $\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}\mathfrak{a}}:\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{p}}{\mathfrak{n}\mathfrak{p}}$ eine imaginäre Zahl vom Modulus 1, weil die ihr conjugirte Zahl durch Vertauschung von $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ entsteht und daher das Product beider der Einheit gleich wird. Das Problem hangt folglich in diesem Falle von der Theilung des Winkels in n Theile ab, und hat n Auflösungen. Schneidet hingegen die Richtlinie A den Kegelschnitt in zwei reellen Puncten, so ist $\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}\mathfrak{a}}:\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{p}}{\mathfrak{n}\mathfrak{p}}$ reell, und zwar *positiv*, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{p}$ beide auf derselben Seite der Geraden $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$ oder A liegen: *negativ* im entgegengesetzten Falle. Das Problem wird daher durch Theilung eines Ausschnitts einer (gleichseitigen) Hyperbel gelöset. Ist nun n *ungerade*, so hat es eine, aber jedenfalls nur eine Auflösung. Das Doppelverhältnifs $\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}\mathfrak{a}}:\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{n}\mathfrak{a}_1}$ hat dasselbe Vorzeichen, wie $\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}\mathfrak{a}}:\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{p}}{\mathfrak{n}\mathfrak{p}}$, und daher liegt der Punct $\mathfrak{a}_1$ mit dem Puncte $\mathfrak{p}$ auf derselben Seite der Richtlinie A. Ist jenes Verhältnifs *positiv*, so liegen die Ecken $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{p}$ und daher auch sämmtliche Ecken $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$, ... diesseits der Richtlinie A. Ist es *negativ*, so liegen die Ecken $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, ... $\mathfrak{p}$ abwechselnd dies- und jenseits. Ist ferner n *gerade*, so hat das Problem keine reelle Auflösung, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{p}$ auf verschiedenen Seiten von A liegen; dagegen zwei, wenn auf derselben. Die beiden Puncte, welche man dann für $\mathfrak{a}_1$ erhält, sind einander harmonisch zugeordnet; und desgleichen sämmtliche andere Ecken von ungerader Stellenzahl, so dafs in der einen Auflösung alle Ecken diesseits der Richtlinie liegen, in der andern aber nur die geradstelligen Puncte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_2$, ... $\mathfrak{p}$, während die ungeradstelligen jenseits derselben liegen und denen der ersten Auflösung beziehlich harmonisch zugeordnet sind. Die in Bezug auf $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ harmonischen Punctenpaare der Geraden D rühren natürlich von harmonischen Paaren des Kegelschnitts K her (No. 6. *b.*); die letzteren liegen deshalb auf dem Kegelschnitt, in Beziehung auf den Pol der Richtlinie A einander diametral gegenüber (No. 8.).

Man kann die Auflösungen der eben erörterten Aufgaben auch mittels der Projection auf eine andere Ebene erhalten. Im Allgemeinen läfst sich nem-

lich nach Herrn *Poncelet* der Kegelschnitt K so in einen Kreis projiciren, dafs die Gerade A ins Unendliche fällt. Diese Projection wird aber imaginär, wenn A den K wirklich schneidet. Da nun auch in der Projection die Tangente in $\mathfrak{a}_1$ und die Verbindungslinie $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_2$, wo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ irgend drei auf einander folgende Ecken sind, im Unendlichen auf der Richtlinie A sich entweder schneiden, oder parallel sind, so ist klar, dafs die genannten drei Puncte auf dem Kreise gleiche Bogen abschneiden, dafs die obigen Probleme also auf die Theilung, sei es des ganzen Umfangs, sei es eines Kreisbogens, in n Theile, zurückgeführt sind. Wenn die Richtlinie A den Kegelschnitt K nicht schneidet, so ist die erwähnte Projection reell, und folglich haben beide Aufgaben in diesem Falle allemal n reelle Auflösungen. Wenn aber die Puncte $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ reell sind, so ist der Übergang vom Kegelschnitt K zum Kreise imaginär; und da der Kreis selbst imaginär ist, so läfst sich auf diese Weise die Realität der Auflösungen nicht leicht ermitteln. In diesem Falle kann hingegen der Kegelschnitt K mittels einer reellen Projection in eine gleichseitige Hyperbel verwandelt werden, während die Richtlinie wieder ins Unendliche fällt. Auf dieser gleichseitigen Hyperbel werden nun wieder für je drei auf einander folgende Ecken $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ die Tangente in $\mathfrak{a}_1$ und die Verbindungslinie $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_2$ parallel sein. Es werden aber auch bei der Hyperbel von irgend zwei Parallellinien solche Bogen abgeschnitten, dafs (nicht sie selbst, sondern) die ihnen entsprechenden Hyperbel-Ausschnitte gleich sind. Folglich sind die beiden Probleme auf die Theilung, sei es des ganzen Hyperbelraumes, sei es eines Hyperbel-Ausschnitts, zurückgeführt. Das erste Problem ist daher unmöglich, und für das zweite ergeben sich mit Leichtigkeit die schon bezeichneten Unterscheidungen in die besondern Fälle.

13. ***Es sind zwei schiefliegende Gebilde auf einem Kegelschnitt gegeben und man verlangt ein drittes, welches mit beiden perspectivisch liegt.***

Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$ und $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \ldots$ (Fig. 16) die beiden gegebenen Gebilde, und $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$, ... das gesuchte; ferner B und B_1 die Projectionsmittelpuncte: so müssen sich die Strahlen $B\mathfrak{a}$ und $B_1\mathfrak{a}_1$ auf dem Kegelschnitte in $\mathfrak{a}_2$ treffen. Wählt man hier statt $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$ die vereinigten Elemente $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}_1$, oder $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n}_1$, so müssen also die Puncte B und B_1 sowohl mit $\mathfrak{m}$, als auch mit $\mathfrak{n}$, auf einer Geraden und folglich auf der Richtlinie $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$ liegen. Auf dieser kann man den einen, z. B. B, beliebig annehmen, und dann ist der andere durch die Züge $B\mathfrak{a}\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_1 B_1$ bestimmt. Projicirt man nemlich das Gebilde $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... von B aus, so kommt der Punct $\mathfrak{m}_2$ auf $\mathfrak{n}$ oder $\mathfrak{n}_1$, dagegen der Punct $\mathfrak{n}_2$ auf $\mathfrak{m}$ oder $\mathfrak{m}_1$

zu liegen. Da nun die Strahlen m_1, m_2 und n_1, n_2 identisch sind, so liegen die Gebilde a_1, b_1, c_1, ... und a_2, b_2, c_2, ... perspectivisch (No. 5.); und zwar liegt ihr Projectionspunct B_1 auf dem Durchschnitte zweier Strahlen $a_1 a_2$ und $m_1 m_2$, oder auf der Richtlinie mn, w. z. b. w.

Nimmt man statt B einen andern Punct C (Fig. 17) willkürlich auf mn an und bestimmt durch die Züge Caa_3, $a_3 a_1 C_1$ den zugehörigen Punct C_1, so müssen sich, dem Obigen zufolge, bei einem beliebigen Puncte b die Geraden Cb und $C_1 b_1$ in b_2 auf dem Kegelschnitt treffen. Man hat also, als Corollar, den bekannten Lehrsatz:

Sind zwei Vierecke $a a_2 a_1 a_3$ *und* $b b_2 b_1 b_3$ *in einem Kegelschnitte eingeschrieben, und liegen die Durchschnittspuncte dreier Seitenpaare auf einer Geraden, so liegt der Durchschnittspunct des vierten Seitenpaares auf derselben Geraden.* Oder:

Bewegen sich drei Seiten eines eingeschriebenen Vierecks um drei in einer Geraden liegenden Puncte, so bewegt sich die vierte Seite auch um einen in derselben Geraden liegenden Punct.

Liegen die beiden gegebenen Systeme perspectivisch, so ist ihr Projectionspunct B_2 der Pol der Richtlinie mn, d. h. der Geraden BB_1. Nun liegen aber alle drei Systeme perspectivisch: mithin gilt Dasselbe von den beiden andern Puncten, und B ist der Pol von $B_1 B_2$, so wie B_1 von BB_2. Diese Bedingung ist nöthig und ausreichend, damit alle drei Systeme perspectivisch liegen; oder mit andern Worten:

Soll ein eingeschriebenes Dreieck sich so bewegen können, dafs sich seine drei Seiten um feste Puncte drehen, so mufs von diesen jeder auf der Polaren des andern liegen.

14. *Man soll in einen Kegelschnitt K ein n Eck einschreiben, dessen Seiten durch n gegebene Puncte* B, B_1, B_2, ... *gehen.*

Betrachtet man den Kegelschnitt als $n+1$ aufeinanderliegende Punctenreihen, von denen je zwei aufeinanderfolgende perspectivisch liegen und beziehlich die Puncte B, B_1, ... zu Projectionsmittelpuncten haben, so ist nach dem Vorhergehenden jedes Gebilde mit jedem, und namentlich das erste mit dem letzten, projectivisch. Die Aufgabe wird also gelöset sein, sobald man deren beide vereinigten Elemente gefunden hat; denn diese Puncte werden die homologen Ecken zweier der Aufgabe genügenden Polygone sein. Man hat demnach folgende Auflösung. Man beschreibe aus einer beliebig gewählten Ecke a durch die Züge Baa_1, $B_1 a_1 a_2$, u. s. w. einen offenen Polygontheil von

n Seiten, dessen $(n+1)$te Ecke $\mathfrak{a}_n$ durch den Zug $B_{n-1}\mathfrak{a}_{n-1}\mathfrak{a}_n$ bestimmt wird. Eben so verfahre man von zwei beliebigen andern Ecken $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ aus; wodurch man zu den Puncten $\mathfrak{b}_n$, $\mathfrak{c}_n$ gelangt. Nun construire man nach No. 5. die Richtlinie der beiden Gebilde $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_n$, $\mathfrak{b}_n$, $\mathfrak{c}_n$. Diese wird den Kegelschnitt in denjenigen beiden Puncten $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ schneiden, welche, statt $\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{b}$ als Anfangs-Ecken genommen, die Aufgabe lösen. Bei dieser Construction können dieselben besonderen Fälle eintreten, wie bei der Aufgabe von No. 11.; und namentlich wird die Aufgabe unendlich viele Lösungen zulassen, wenn die Puncte $\mathfrak{a}_n$, $\mathfrak{b}_n$, $\mathfrak{c}_n$ beziehlich auf $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ fallen.

Ein besonders merkwürdiger Fall dieser Aufgabe ist es, wenn die gegebenen Puncte B, B_1, B_2, ... auf einer Geraden liegen. Die Durchschnittspuncte derselben mit dem Kegelschnitte gehören dann offenbar den verschiedenen Gebilden abwechselnd als entsprechende Puncte an. Ist nun die Anzahl jener Puncte *ungerade,* und nennt man jene Durchschnittspuncte $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$, so wird $\mathfrak{m}_n$ auf den Punct $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n}_n$ auf den Punct $\mathfrak{m}$ fallen. Es liegen demnach (No. 5.) das erste und das letzte Gebilde perspectivisch und man braucht nur ein einziges Polygonstück zu zeichnen, dessen Eckpuncte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_n$ sein mögen. Der Durchschnittspunct von $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_n$ mit der Geraden BB_1, ... ist dann der Projectionspunct, oder der Pol der gesuchten Richtlinie; womit die Aufgabe gelöset ist. Diese Richtlinie oder Verbindungslinie der entsprechenden Ecken der beiden gesuchten Polygone geht also durch den Pol der Geraden BB_1, ..., und da Dasselbe von allen andern solchen Verbindungslinien gilt, so folgt der bekannte Satz (S. *Poncelet* No. 564.):

Wenn die n Durchschnittspuncte der entsprechenden Seitenpaare zweier eingeschriebenen Polygone von ungerader Seitenzahl auf einer Geraden liegen, so schneiden sich die n Verbindungslinien der n entsprechenden Eckenpaare in dem Pole jener Geraden.

Ist aber die Anzahl der Puncte B, B_1, ... *gerade,* so fällt der Punct $\mathfrak{m}_n$ auf $\mathfrak{m}$ und der Punct $\mathfrak{n}_n$ auf $\mathfrak{n}$, und die beiden äufserten Gebilde haben zwei zusammenfallende Elementenpaare. Die Seiten des gesuchten Polygons würden also im Allgemeinen in die Gerade BB_1 .... hineinfallen. Wenn jedoch, von irgend einem Anfangspunct $\mathfrak{a}$ ausgehend, das n Eck sich von selbst schliefst, indem auch das Element $\mathfrak{a}_n$ auf $\mathfrak{a}$ fällt, so wird das Polygon auch bei jedem andern Anfangspuncte von selbst sich schliefsen. Aufserdem wird die Verbindungslinie irgend einer geradstelligen und einer ungeradstelligen Ecke durch einen bestimmten Punct der Geraden BB_1 .... gehen, weil jedes gerade, mit jedem

ungeradstelligen Gebilde perspectivisch liegt, indem die Gerade mn zwei Projectionsstrahlen derselben z. B. m_3m_6 und n_3n_6 enthält, weshalb deren Projectionsmittelpunct auf der Geraden mn liegt. Also:

Bewegen sich alle Seiten eines geradzahligen eingeschriebenen Polygons, außer der letzten, um feste, in einer Geraden liegende Puncte, so dreht sich auch die letzte Seite, und überhaupt jede Verbindungslinie einer geradstelligen mit einer ungeradstelligen Ecke, um irgend einen festen Punct jener Geraden.

Die Aufgabe dieser Nummer, von der seit alten Zeiten besondere Fälle viel behandelt worden sind, hat endlich Herr *Poncelet* (S. No. 557.) in ihrer ganzen Allgemeinheit auf zwei Arten gelöset, die im Wesentlichen identisch sind. Eine derselben stimmt buchstäblich mit der obigen überein, obwohl sie aus ganz verschiedenen Principien und durch eine viel verwickeltere Kettenfolge von Schlüssen hergeleitet ist. Sie beruht auf der Betrachtung derjenigen Curve, welche die letzte Seite aa_n des veränderlichen n Ecks in allen ihren Lagen einhüllt und die (wie auch in der folgenden Nummer gezeigt werden soll) ein Kegelschnitt ist, der mit dem gegebenen eine doppelte Berührung hat. Es handelt sich nun darum, die Berührungssehne zu construiren, weil deren Endpuncte die gesuchten Anfangs-Ecken des Polygons sind, insofern in ihnen das von dem gegebenen Kegelschnitt abgeschnittene Stück der Tangente verschwindet und mithin die Puncte a und a_n zusammenfallen. Daſs jene Curve ein Kegelschnitt ist, der den gegebenen doppelt berührt, wird zunächst für den Fall eines Dreiecks bewiesen, indem die Figur dergestalt projicirt wird, daſs der gegebene Kegelschnitt ein Kreis wird und die Verbindungslinie der beiden festen Puncte ins Unendliche fällt. Dann ist leicht zu übersehen, daſs die Einhüllungs-Curve ein concentrischer Kreis wird. Da nun überhaupt zwei ähnliche und ähnlich liegende concentrische Kegelschnitte als eine doppelte ideale Berührung im Unendlichen habend angesehen werden, so entspricht diesem Kreise ein doppelt-berührender Kegelschnitt, dessen Berührungssehne die Verbindungslinie der beiden Drehpuncte ist. Daſs sich nun im Allgemeinen die $n+1$te Seite eines veränderlichen $(n+1)$ Ecks, von welchem n Seiten sich um n feste Puncte drehen, eben so bewegt, als wäre sie die 3te Seite eines Dreiecks, wird durch eine allmälige (von Herrn *Brianchon* herrührende) Elimination der Seiten nebst ihren Drehpuncten nachgewiesen, bis beziehlich nur drei und zwei derselben übrig bleiben. Das Eliminationsverfahren ist in den Auflösungen der beiden Aufgaben in No. 13 *a.* enthalten. Die erste *Ponceletsche* Auf-

lösung beruht auf dieser Elimination, indem die Verbindungslinie der beiden zuletzt übrig bleibenden Drehpuncte unsere verlangte Richtlinie ist. Durch diese Construction werden nicht nur die Richtlinie hergestellt, sondern auch die beiden Puncte derselben, um welche sich zwei Seiten des Dreiecks drehen; als dessen dritte Seite die letzte Seite des Polygons $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_n$ anzusehen ist. Seine zweite Auflösung, die viel eleganter ist, beruht auf der Aufgabe, aus drei gegebenen Tangenten den Kegelschnitt zu finden, der den gegebenen doppelt berührt. Die oben gegebene Herleitung ist aufserordentlich viel einfacher, als die *Poncelet*sche. Denn erstens ist die Betrachtung der Einhüllungscurve der $n+1$ten Seiten durchaus nicht erforderlich, und zweitens läfst die Aufgabe, dieselbe aus drei Tangenten zu bestimmen, eine vierfache Auflösung zu, je nachdem man die auf dem gegebenen Kegelschnitte liegenden Endpuncte der Tangenten, nemlich $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}_n$, $\mathfrak{b}_n$, $\mathfrak{c}_n$ einander zuordnet. Von diesen vier Auflösungen kann natürlich nur eine der Aufgabe genügen, da die Einhüllungscurve auch alle übrigen $n+1$ten Seiten berühren mufs. Die Determination der Auflösung im Sinne des *Traité* etc. unterliegt einiger Verwickelung. Auch geht Herr *Poncelet* selbst oberflächlich darüber hin und sagt nur zur Rechtfertigung derselben: „Or, cette courbe (die Einhüllungscurve) devant nécessairement être intérieure à la proposée, il sera facile de voir, que les premières extrémités a des trois portions de polygones qui ont donné trois cordes aK devront être prises pour les trois sommets de rang impair de l'hexagone ci-dessus, et les dernières K pour les trois sommets de rang pair qui leur sont opposés respectivement." Dies ist aber offenbar eine kleine Übereilung, wie man leicht für den Fall *eines Dreiecks* einsieht, *wenn von den beiden Drehpuncten der eine innerhalb und der andere aufserhalb des gegebnen Kegelschnitts liegt;* denn alsdann berührt die Einhüllungscurve denselben äufserlich doppelt. Da die in dieser Nummer gegebene Auflösung einer solchen Determination nicht bedarf, und geradezu die richtige Construction anweiset, so möchte sie nicht unwesentliche Vorzüge vor der *Poncelet*schen haben.

15. Zum Schlusse soll noch das Erzeugnifs zweier schiefliegenden krummen Gebilde betrachtet werden, welches entsteht, wenn man die entsprechenden Elemente beider paarweise verbindet. Sind die genannten Gebilde zwei Punctreihen, so erhält man durch Verbindung der entsprechenden Elementenpaare eine Schaar Gerader, welche eine gewisse Curve einhüllen werden. Sind die Gebilde zwei Strahlenbüschel, so ergiebt die paarweise Verbindung derselben eine Punctenreihe, die eine bestimmte Curve bilden wird. Es handelt sich nun

die Ermittelung dieser eben definirten Curven; da jedoch der zweite Fall nur der polare Nebensatz des erstern ist, so soll, wie in den vorigen Nummern, nur dieser letztere berücksichtigt werden.

Es mögen sich also auf dem Kegelschnitte K (Fig. 18) die beiden projectivischen Gebilde B, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$, ... und B_1, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}_1$, ... befinden, deren Richtlinie A ist; dann sind BB_1, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, ... Tangenten der erzeugten Curve. Ich behaupte nun, dafs *diese Curve ein Kegelschnitt ist, welcher den gegebenen K doppelt berührt; und zwar in den Puncten* m *und* n, *in welchen die vereinigten entsprechenden Elemente der beiden Gebilde liegen.* Diese Behauptung liefse sich mit Hülfe eines leicht zu findenden Lemmas dadurch bestätigen, dafs man zeigte, wie irgend zwei Tangenten, namentlich die in den Puncten m und n, von den übrigen projectivisch geschnitten werden. Es soll hier jedoch ein anderer Beweis gegeben werden, der von der Realität der Berührungspuncte m und n unabhängig ist.

Vermöge der Bedeutung der entsprechenden Elemente B, B_1; $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$; u. s. w. schneiden sich die Linien $B\mathfrak{b}_1$ und $B_1\mathfrak{b}$; $B\mathfrak{a}_1$ und $B_1\mathfrak{a}$; $C\mathfrak{a}_1$ und $C_1\mathfrak{a}$; u. s. w. auf der Richtlinie A beziehlich in γ (oder β_1), α, α_1, u. s. w. Betrachtet man nun auf jedem Strahle BB_1, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, u. s. w. die ihren beziehlichen Durchschnittspuncten mit der Richtlinie zugeordneten harmonischen Puncte, nemlich B_2, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{a}_2$, ..., so werden diese Puncte 1) auf einem Kegelschnitte liegen und 2) wird dieser Kegelschnitt in ihnen von den zugehörigen Strahlen BB_1, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, ... berührt werden; so dafs also der genannte Kegelschnitt die gesuchte erzeugte Curve ist.

1) Die Richtlinie A und die Geraden $B\mathfrak{a}_1$, $B_1\mathfrak{a}$ und $B_2\mathfrak{a}_2$ schneiden die beiden Strahlen BB_1 und $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ harmonisch. Die drei ersten schneiden sich in einem Puncte α: folglich geht auch $B_2\mathfrak{a}_2$ durch denselben Punct α. Aus ähnlichen Gründen liegen $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{a}_2$, α_1 einerseits und B_2, γ, $\mathfrak{b}_2$ andrerseits auf einer Geraden. Der Punct $\mathfrak{a}_2$ wird also durch den Durchschnitt der beiden Geraden $B_2\alpha$ und $\mathfrak{b}_2\alpha_1$ bestimmt. Stellt man sich nun das Element $\mathfrak{a}$, und demgemäfs auch $\mathfrak{a}_1$, veränderlich vor, so entstehen dadurch auf der Richtlinie zwei Gebilde α, β, γ, ... und α_1, β_1, γ_1, ..., welche beziehlich mit dem krummen Gebilde $\mathfrak{a}_1$, ... von den festen Projectionspuncten B und C aus perspectivisch liegen, also auch unter sich projectivisch sind. Folglich sind auch die Strahlenbüschel B_2 und C_2 in Ansehung der Strahlen $B_2\alpha$ und $C_2\alpha_1$ projectivisch. Sie erzeugen daher einen Kegelschnitt, der auch durch die Puncte B_2 und C_2 geht.

2) In dem Puncte B_2 berührt diesen Kegelschnitt derjenige Strahl des Büschels B_2, welcher dem Strahle C_2B_2 oder $C_2\beta_1$ zugeordnet ist. Dem Puncte β_1 der Richtlinie entspricht aber offenbar der Punct β (Durchschnittspunct von BB_1) derselben Richtlinie, da $C\beta_1$ und $B\beta$ sich in B_1 auf dem Kegelschnitte schneiden. Der dem Strahle $C_2\beta_1$ zugeordnete Strahl im Büschel B_2, oder die Tangente des erzeugten Kegelschnitts in B_2, ist daher $B_2\beta$ oder BB_1. Aus demselben Grunde berührt den Kegelschnitt in $\mathfrak{b}_2$ der Strahl $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, in $\mathfrak{a}_2$ der Strahl $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, u. s. w. Folglich umhüllen schliefslich die gesammten Strahlen $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ den durch die Puncte $\mathfrak{a}_2$ gehenden Kegelschnitt. Für die Strahlen $\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{n}\mathfrak{n}_1$ fallen offenbar die Berührungspuncte $\mathfrak{m}_2$ und $\mathfrak{n}_2$ in die Puncte $\mathfrak{m}(\mathfrak{m}_1)$ und $\mathfrak{n}(\mathfrak{n}_1)$ selbst. Der erzeugte Kegelschnitt hat daher eine (reelle oder ideale) doppelte Berührung mit dem Kegelschnitt K, längs der Berührungssehne A.

Dem so eben aufgestellten Beweise könnte auch eine etwas verschiedene Wendung gegeben werden, wenn man zuerst bewiese, dafs der Punct B_2 der Berührungspunct des Strahles BB_1 ist. Dies gelingt mittels einer häufig benutzten Betrachtung des Unendlichkleinen. Da nemlich die Tangente BB_1 von den nächstanliegenden in ihrem Berührungspuncte geschnitten wird, so darf man sich nur die Tangente $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ der Tangente BB_1 unendlich nahe gerückt vorstellen. Man erkennt alsdann sehr leicht, dafs sich der Durchschnittspunct von $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ und BB_1 allmälig demjenigen Puncte zu bewegt, welcher dem Durchschnittspuncte von $B\mathfrak{a}_1$ und $B_1\mathfrak{a}$ auf $B\mathfrak{a}_1$ oder BB_1 harmonisch zugeordnet ist. Sind nemlich überhaupt $\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{q}\mathfrak{q}_1$ irgend zwei zusammenfallende Geraden, so sind die Durchschnittspuncte von $\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{q}\mathfrak{q}_1$ und von $\mathfrak{p}\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}$ einander sowohl in Bezug auf $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$, als in Bezug auf $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}_1$ harmonisch zugeordnet. Hierauf würde dann der Beweis wie oben unter 1) weiter geführt werden.

Übrigens konnte auch von vorn herein eine andere Betrachtung angestellt werden, aus welcher sich nicht nur der Berührungspunct eines jeden Strahls, sondern auch die Beschaffenheit der gesuchten Curve ergaben; und zwar ohne Betrachtung des Unendlichkleinen. Durch irgend einen Punct P der Ebene können nemlich *nur* zwei Projectionsstrahlen, wie $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ (Fig. 19), gehen, weil die Gebilde sonst perspectivisch lägen (No. 5.). Es werden aber im Allgemeinen zwei Projectionsstrahlen durch ihn gehen, und man findet diese, wenn man von P aus das Gebilde $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ... auf denselben Kegelschnitt K projicirt und die vereinigten Puncte $\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2$ des so entstehenden Gebildes $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, ... und des

Gebildes $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, ... sucht*); alsdann sind offenbar $P\mathfrak{p}_2$ und $P\mathfrak{q}_2$ die gesuchten Projectionsstrahlen. Da sich also von P aus zwei, und nur zwei Tangenten an die Curve legen lassen, so ist diese von der zweiten Ordnung, oder ein Kegelschnitt. Will man nun auf irgend einem Strahle $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ den Berührungspunct finden, so hat man nur denjenigen Punct desselben zu suchen, aus welchem sich nur eine Tangente (also $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$) legen läfst, oder für den, besser gesagt, beide Tangenten zusammenfallen. Für diesen Punct P darf das entstehende Gebilde $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, ... mit dem Gebilde $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, ... nur *einen* zusammenfallenden entsprechenden Punct haben: deren Richtlinie mufs also die Tangente $Q\mathfrak{a}_1$ an den Kegelschnitt K in $\mathfrak{a}_1$ sein. Der Punct P mufs deshalb so auf $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ liegen, dafs wenn man noch die Puncte $\mathfrak{m}_2$ und $\mathfrak{n}_2$ zeichnet, die Geraden $\mathfrak{m}_1\mathfrak{n}_2$ und $\mathfrak{m}_2\mathfrak{n}_1$ sich in einen Punct Q dieser Tangente schneiden. Aus einem ähnlichen Grunde müssen sich die genannten Geraden auch auf der Tangente in $\mathfrak{a}$ an den Kegelschnitt schneiden, und folglich mufs Q der Durchschnittspunct dieser Tangenten oder der Pol von $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ sein. Hieraus folgt wegen des eingeschriebenen Vierecks $\mathfrak{m}\mathfrak{n}\mathfrak{m}_2\mathfrak{n}_2$ leicht, dafs der Punct P dem Durchschnittspuncte von $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ mit $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$ harmonisch zugeordnet sein mufs; u. s. w.

16. Der eben bewiesene Satz läfst sich auch umkehren: *Wenn zwei Kegelschnitte eine doppelte (ideale oder reelle) Berührung haben, so wird jeder von den Tangenten des andern projectivisch geschnitten.* Heifst nemlich A die Berührungssehne der beiden Kegelschnitte K und K_1, und schneidet irgend eine Tangente des einen K_1 den andern K in den beiden Puncten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, so ist durch diese Data die Projectivität zweier Gebilde $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ...; $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, ... auf dem Kegelschnitt K vollständig bestimmt; und diese beiden Gebilde bestimmen wiederum, der vorigen No. zufolge, einen Kegelschnitt, der den Kegelschnitt K in seinen Durchschnittspuncten mit der Geraden A, und aufserdem die Gerade $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ berührt. Es kann aber *nur einen* solchen Kegelschnitt geben; woraus folgt, dafs der erwähnte Kegelschnitt mit dem Kegelschnitt K_1 identisch ist. Hiermit wäre der obige Satz erwiesen.

17. Aus diesen beiden Lehrsätzen kann, namentlich mit Berücksichtigung des oben bewiesenen Umstandes, dafs jede Tangente des einen Kegelschnitts von ihrem Berührungspuncte, von dem andern Kegelschnitte und der Berührungssehne beider Kegelschnitte harmonisch getheilt wird, die ganze *Poncelet*sche Theorie der doppelten Berührung entwickelt, erweitert und vervollständigt werden. Unter andern ergiebt sich insbesondere der folgende Satz:

*) Vergl. *Steiner* No. 18 und No. 41. III.

Wenn der Kegelschnitt K von zwei andern K_1 und K_2 doppelt berührt wird, so schneiden sich die beiden Berührungssehnen und zwei zusammengehörige gemeinschaftliche Secanten der beiden Kegelschnitte K_1 und K_2 in einem Punct; und diese vier Geraden bilden ein harmonisches Büschel, in welchem die beiden Berührungssehnen einander zugeordnet sind.

Die erste Hälfte dieses Satzes findet man schon im „Traité sur les prop. proj." Mit Berücksichtigung des polaren Nebensatzes kann dann noch hinzugefügt werden, dafs *auch die beiden Berührungspole und zwei zusammengehörige Durchschnitte gemeinschaftlicher Tangenten der beiden Kegelschnitte K_1, K_2 auf einer Geraden liegen und dieselbe harmonisch theilen, so dafs die beiden Berührungspole einander zugeordnet sind; dafs diese Gerade in Bezug auf beide Kegelschnitte K_1 und K_2 die Polare des oben erwähnten Punctes ist; und endlich, dafs die so eben genannten beiden zusammengehörigen Durchschnitte gemeinschaftlicher Tangenten von allen sechs existirenden diejenigen beiden sind, welche den obigen gemeinschaftlichen Secanten zugeordnet sind.*

Wenn man diese Sätze specialisirt, so gelangt man wieder zu bekannten Sätzen. Artet z. B. der Kegelschnitt K in ein System zweier Geraden aus, welche die zwei Kegelschnitte K_1 und K_2 berühren, so hat man den bekannten Satz, dafs die beiden Berührungssehnen und zwei gemeinschaftliche Secanten der beiden Kegelschnitte sich in einem und demselben Puncte schneiden und um ihn ein harmonisches Büschel bilden.

Läfst man, eben so, in dem Satze von No. 15. beide Gebilde des Kegelschnitts K identisch sein, so verwandeln sich die Projectionsstrahlen in Tangenten an diesen Kegelschnitt, und der erzeugte Kegelschnitt fällt mit jenem zusammen; daher werden zwei Tangenten eines Kegelschnitts von den übrigen projectivisch geschnitten: der bekannte Satz, von dem wir ausgegangen sind. Läfst man beide Gebilde perspectivisch liegen, so ist das Erzeugnifs ein Punct, nemlich der Pol der Richtlinie; daher wird jede Gerade durch irgend einen Punct, durch dessen Polare und durch den Kegelschnitt harmonisch getheilt; wie bekannt. Läfst man den erzeugenden Kegelschnitt in ein System zweier geraden ausarten, so folgt, dafs jede Tangente eines Kegelschnitts von ihrem Berührungspunct, von zweien andern Tangenten und von deren Berührungssehne harmonisch geschnitten wird, wie bekannt. U. s. w.

Auf die speciellen Fälle der gegebenen Sätze, so wie auf die Entwickelung der zu Anfang dieser No. aufgestellten, will ich mich an diesem

Orte nicht weiter einlassen, weil ich in dem Vorhergehenden die Anwendbarkeit und Fruchtbarkeit der in dieser Abhandlung vorgetragenen neuen Theorie genügend ins Licht gestellt zu haben glaube. Ich kann mir jedoch nicht versagen, eines der merkwürdigsten Resultate derselben hier vorläufig ohne Beweis mitzutheilen.

18. *I. Wenn drei Kegelschnitte K, K_1, K_2, einen vierten K_3 doppelt berühren, so schneiden sich viermal drei ihrer gemeinschaftlichen Sehnen je in einem Puncte, und viermal drei ihrer Durchschnittspuncte gemeinschaftlicher Tangenten liegen je auf einer Geraden. Von den jedesmaligen drei Sehnen und den jedesmaligen drei Durchschnittspuncten gemeinschaftlicher Tangenten gehört jeder einer andern paarweisen Verbindung jener drei Kegelschnitte an; und zwar sind*

p und q zwei zugeordnete gemeinschaftliche Sehnen der Kegelschnitte . . . . K_1 und K_2,
p_1 und q_1 derer . . . . K_2 und K;
p_2 und q_2 derer . . . . K und K_1;

und schneiden sich die drei ersteren p, p_1 und p_2 in einem Punct, so schneiden sich p, q_1, q_2; p_1, q, q_2; p_2, q, q_1 in den drei andern Puncten. Und eben so heifsen

$\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ zwei zugeordnete Durchschnitte gemeinschaftlicher Tangenten von . . . . K_1 und K_2,
$\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{q}_1$ von . . . . K_2 und K,
$\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{q}_2$ von . . . . K und K_1

und liegen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ auf einer Geraden, so liegen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$; $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}_2$; $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}_1$ auf den drei andern Geraden. Diese Durchschnittspuncte gemeinschaftlicher Tangenten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$; $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{q}_1$; $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{q}_2$ sind, als solche, jenen gemeinschaftlichen Sehnen p, q; p_1, q_1; p_2, q_2 beziehlich in Hinsicht der Kegelschnittspaare, zu denen sie gehören, zugeordnet. Jene sechs Durchschnittspuncte sind die Ecken eines vollständigen Vierseits, dessen drei Diagonalen die drei Berührungssehnen sind; die sechs Secanten sind die Seiten eines vollständigen Vierecks, dessen drei Diagonalpuncte die drei Berührungspuncte sind.

Dieser Satz enthält das *Pascal*sche Sechseck, das *Brianchon*sche Sechsseit, eine grofse Zahl der in Herrn *Brianchon's* „Mémoire sur les lignes du second ordre" gegebenen Sätze, die ganze *Poncelet*sche Theorie der Homologie, u. s. w.

II. Damit drei Kegelschnitte von einem vierten doppelt berührt werden können, ist es nothwendig und ausreichend, dafs entweder drei ihrer gemeinschaftlichen Secanten in einen Punct zusammenstofsen, oder dafs drei ihrer Durchschnittspuncte gemeinschaftlicher Tangenten auf einer Geraden liegen.

Hieraus fliefst als Corollar der folgende Satz, zu welchem ich mich Herrn *Poncelets* Terminologie bediene:

III. Wenn drei Homologiepuncte dreier paarweise zusammengestellten Kegelschnitte auf einer Geraden liegen, so befindet sich jeder derselben mit den den beiden übrigen zugeordneten Homologiepuncten ebenfalls auf einer Geraden; und von den diesen 6 Homologiepuncten zugeordneten sechs Homologie-Axen schneiden sich viermal drei je in einem Puncte, so dafs jede von ihnen, welche durch den Durchschnittspunct zweier andern geht, auch den Durschchnittspunct der den beiden letztern zugeordneten Homologie-Axen enthält. Jene sechs Homologiepuncte sind die Ecken eines vollständigen Vierseits, dessen drei Diagonalpuncte, jeder in Bezug auf ein Kegelschnittpaar, die Pole der drei Diagonalen desjenigen Vierecks sind, von welchem jene sechs Homologie-Axen die Seiten sind, u. s. w.

Und umgekehrt:

Wenn drei Homologie-Axen dreier paarweise zusammengestellten Kegelschnitte sich in einem Puncte schneiden, so schneidet sich jede derselben mit den den beiden andern zugeordneten Homologie-Axen ebenfalls in einem Puncte; und von den diesen sechs Homologie-Axen zugeordneten sechs Homologiepuncten liegen viermal drei je auf einer Geraden, so dafs jeder von ihnen, der mit zwei andern auf einer Geraden liegt, auch mit den den beiden letzteren zugeordneten Homologiepuncten auf einer Geraden liegt. Diese sechs Homologiepuncte und sechs zugehörigen Homologie-Axen stehen in dem oben beschriebenen Verhältnisse zu den drei Kegelschnitten.

Dieser Satz enthält viele merkwürdige Fälle. In ihm ist unter andern ein höherer Grund sichtbar, weshalb die drei gemeinschaftlichen Sehnen irgend dreier Kreise in einem Puncte zusammentreffen u. s. w.

Wie man für drei der angegebenen Bedingung genügende Kegelschnitte einen gemeinschaftlich doppelt berührenden Kegelschnitt finde, ergiebt sich aus I. und III. Für jedes System solcher sechs Homologiepuncte und Axen, wie oben beschrieben worden, erhält man einen Kegelschnitt. Dafs die drei gegebenen Kegelschnitte mehr als ein solches System haben können, ist leicht zu

sehen. Man darf nur, dem Obigen gemäfs, drei Kegelschnitte K, K_1, K_2 beschreiben, von denen jeder zwei beliebig angenommene Kegelschnitte C und C_1 doppelt berührt. Die drei ersteren haben dann nothwendig zwei solche Systeme.

Nachtrag.

13. *a. Man soll auf dem Kegelschnitte* K (Fig. 20) *ein Gebilde construiren, welches mit drei gegebenen Gebilden perspectivisch liegt.*

Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ...; $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, ...; $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$, ... die gegebenen Gebilde, sind B, B_1, B_2 die Mittelpuncte, in Bezug auf welche sie beziehlich mit dem gesuchten Gebilde $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{b}_3$, $\mathfrak{c}_3$, ... perspectivisch liegen, und heifsen A, A_1, A_2 die Richtlinien beziehlich des 2ten und 3ten, des 3ten und 1ten, des 1ten und 2ten Gebildes, so müssen, der vorigen Nummer zufolge, B und B_1, auf der Richtlinie A_2, B und B_2 auf A_1 und B_1 und B_2 auf A liegen. Mithin ist B der Durchschnittspunct von A_1 und A_2, B_1 der von A_2 und A, und B_2 der von A und A_1; womit das gesuchte Gebilde bestimmt ist.

Das Gebilde $\mathfrak{a}_3$ ist schon hinlänglich durch einen der Projectionsmittelpuncte, z. B. durch B_1, bestimmt. Man braucht also nur die beiden Richtlinien A_2 und A zu kennen und kann die obige Construction benutzen, um die Mittelpuncte B und B_2 oder die Richtlinie A_1 des 1ten und 3ten Systems zu finden. Man zieht zu dem Ende von B_1, dem Durchschnittspuncte von A und A_2, die Gerade $B_1\mathfrak{a}_1$ und erhält auf ihr den Punct $\mathfrak{a}_3$; zieht man nun noch $\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_2$, so liegen auf diesen Linien beziehlich die Projectionsmittelpuncte B und B_2. Diese liegen aber auch beziehlich auf den Richtlinien A_2 und A. Folglich ist der Punct B der Durchschnittspunct von $\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}$ und A_2, und der Punct B_2 derjenige von $\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_2$ und A. Die Verbindungslinie BB_2 ist dann die gesuchte Richtlinie A_1. Z. B.:

Die vier Gebilde $\mathfrak{a}$, ...; $\mathfrak{a}_1$, ...; $\mathfrak{a}_2$, ...; $\mathfrak{a}_3$, ... *liegen, jedes mit dem folgenden, nach den Mittelpuncten* B, B_1, B_2 *perspectivisch:* man soll *ein Gebilde* $\mathfrak{a}_4$, ... *finden, welches mit dem ersten und letzten perspectivisch liegt.*

Um diese Aufgabe zu lösen, ohne die Richtlinie des ersten und letzten Systems zu kennen, bestimme man, dafs das gesuchte Gebilde auch noch mit dem Gebilde $\mathfrak{a}_1$, ... perspectivisch liegen solle. Dann ist die Richtlinie der Gebilde $\mathfrak{a}$, ... und $\mathfrak{a}_1$, ... die Polare des Puncts B. Die Richtlinie der Gebilde $\mathfrak{a}_1$, ... und $\mathfrak{a}_3$, ... ist die Verbindungslinie der Drehpuncte B_1, B_2.

Den Durchschnitt dieser beiden Richtlinien verbinde man mit $\mathfrak{a}_1$ und es ergebe sich auf ihr der Punct $\mathfrak{a}_4$. Dann bestimmt die Gerade $\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}$ auf der Polaren von B den Projectionsmittelpunct C, und die Gerade $\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_3$ auf der Linie B_1B_2 den Projectionsmittelpunct C_1, in Bezug auf welche beziehlich die Gebilde $\mathfrak{a}$.... und $\mathfrak{a}_3$ mit $\mathfrak{a}_4$, ... perspectivisch liegen.

Die fünf Gebilde $\mathfrak{a}$, ...; $\mathfrak{a}_1$, ...; $\mathfrak{a}_2$, ...; $\mathfrak{a}_3$, ...; $\mathfrak{a}_4$; .... (Fig. 21) *liegen, jedes mit dem folgenden, nach den Mittelpuncten* B, B_1, B_2, B_3 *perspectivisch: man soll ein Gebilde* $\mathfrak{a}_5$, ... *finden, welches mit dem ersten und letzten perspectivisch liegt.*

Man bestimme zu dem Ende, dafs das gesuchte Gebilde auch mit $\mathfrak{a}_2$, ... perspectivisch liege. Nun ist BB_1 die Richtlinie von $\mathfrak{a}$, ... und $\mathfrak{a}_2$, ...; B_2B_3 die Richtlinie von $\mathfrak{a}_2$, ... und $\mathfrak{a}_4$, ... Aus deren Durchschnittspunct B_4 ziehe man die Gerade $B_4\mathfrak{a}_2$; den dadurch erhaltenen Punct $\mathfrak{a}_5$ verbinde man mit $\mathfrak{a}$ und mit $\mathfrak{a}_4$, so erhält man, beziehlich auf BB_1 und B_2B_3, die verlangten Mittelpuncte C und C_1.

Berlin, im Jahre 1844.

20.

Note sur la réduction des fonctions homogènes à coefficients entiers et à deux indéterminées.

(Par Mr. *C. Hermite* à Paris.)

Soit

$$f(y,x) = Ay^n + Bxy^{n-1} + Cx^2y^{n-2} + \dots + Kx^{n-1}y + Lx^n$$

la forme proposée; nommons:

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \dots \quad \alpha_n$$

les racines, supposées d'abord toutes réelles, de l'équation

$$Az^n + Bz^{n-1} + Cz^{n-2} + \dots + Kz + L = 0,$$

je définirai le déterminant de $f(y,x)$, la plus petite des valeurs que peut prendre l'expression

$$D = A\frac{\left\{\frac{1}{2}\sum_1^n{}_i\sum_1^n{}_j \varDelta_i\varDelta_j(\alpha_i-\alpha_j)^2\right\}^{\frac{1}{2}n}}{(\varDelta_1\varDelta_2\dots\varDelta_n)^{\frac{1}{2}}},$$

lorsque les quantités $\varDelta_1, \varDelta_2, \dots \varDelta_n$, prennent toutes les valeurs réelles et positives depuis zéro jusqu'à l'infini. Et d'abord un tel minimum existe toujours, car il est aisé de voir que D est infiniment grand, pour des valeurs infiniment petites et infiniment grandes des variables; posant donc les équations:

$$\frac{dD}{d\varDelta_1} = 0, \quad \frac{dD}{d\varDelta_2} = 0, \quad \dots \quad \frac{dD}{d\varDelta_n} = 0,$$

on est assuré d'avance, qu'elles seront satisfaites, au moins par un système de déterminations réelles et positives de $\varDelta_1, \varDelta_2, \dots \varDelta_n$. Ces équations deviennent en prenant:

$$2\varDelta = \sum_j\sum_i \varDelta_i\varDelta_j(\alpha_i-\alpha_j)^2,$$

$$(1.) \quad 2\varDelta = n\varDelta_1\frac{d\varDelta}{d\varDelta_1}, \quad 2\varDelta = n\varDelta_2\frac{d\varDelta}{d\varDelta_2}, \quad \dots \quad 2\varDelta = n\varDelta_n\frac{d\varDelta}{d\varDelta_n},$$

et à proprement parler, elles ne contiennent que les rapports $\frac{\varDelta_2}{\varDelta_1}, \frac{\varDelta_3}{\varDelta_1}$, etc. Leur somme d'ailleurs donne l'identité:

$$2\varDelta = \varDelta_1\frac{d\varDelta}{d\varDelta_1} + \varDelta_2\frac{d\varDelta}{d\varDelta_2} + \dots + \varDelta_n\frac{d\varDelta}{d\varDelta_n}.$$

Cette définition du déterminant pour une forme $f(y,x)$ de degré quelconque, comprend comme il est aisé de le voir, le cas particulier des formes binaires; mais en passant aux valeurs suivantes de n, la détermination de D, en fonction des coefficients $A, B, \ldots L$ exige la résolution d'équations algébriques de degré de plus en plus élevé, et dont voici le caractère essentiel. Représentons en général leur premier membre par

$$F(\mathrm{D}, A, B, C, \ldots K, L)$$

le coefficient de la plus haute puissance de D étant l'unité, je dis qu'il ne changera pas de valeur, si l'on y remplace respectivement

$$A, B, C, \ldots K, L$$

par les coefficients

$$A', B', C', \ldots K', L'$$

de la transformée

$$f(my'+m^0x', ny'+n^0x') = f_1(y',x')$$
$$= A'y'^n + B'x'y'^{n-1} + \ldots + K'x'^{n-1}y' + L'y'^n,$$

les entiers m, m^0; n, n^0 étant soumis à la condition $mn^0 - nm^0 = \pm 1$. Pour le faire voir, soit

$$f(y,x) = A(y-\alpha_1 x)(y-\alpha_2 x)\ldots(y-\alpha_n x),$$

en posant

$$\alpha_i' = \frac{n_0\alpha_i - m_0}{m - n\alpha_i},$$

on aura

$$f_1(y',x') = A'(y'-\alpha_1'x')(y'-\alpha_2'x')\ldots(y'-\alpha_n'x')$$

et

$$A' = A(m-n\alpha_1)(m-n\alpha_2)\ldots(m-n\alpha_n).$$

Or si l'on substitue dans les équations (1.) α_i' à α_i pour obtenir les valeurs des quantités Δ, relatives au déterminant de la nouvelle forme $f_1(y',x')$, comme les différences $(\alpha_i'-\alpha_j')^2$ deviennent: $\frac{(\alpha_i-\alpha_j)^2}{(m-n\alpha_i)^2(m-n\alpha_j)^2}$, on voit immédiatement que cela revient à prendre pour inconnue, en général, $\frac{\Delta_i}{(m-n\alpha_i)^2}$ au lieu de Δ_i; donc par cette substitution, $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n$ deviennent, simplement, à un facteur constant près, $(m-n\alpha_1)^2\Delta_1$, $(m-n\alpha_2)^2\Delta_2$, etc. Soit λ ce facteur indéterminé, il en résulte que par la substitution de α_i' à α_i, $\Delta = \frac{1}{2}\Sigma\Sigma\Delta_i\Delta_j(\alpha_i-\alpha_j)^2$

se changera en $\lambda^2 \varDelta$, mais la valeur de D, reste absolument la même, le produit $\lambda^{\frac{1}{2}n}(m-n\alpha_1)(m-n\alpha_2)\ldots(m-n\alpha_n)$, disparaissant comme facteur commun au numérateur d'après la valeur ci-dessus de A'. Ainsi les deux équations en D, qui sont relatives à la forme proposée, et à sa transformée, ont les mêmes racines, et sont par conséquent identiques.

Voici maintenant quelques exemples du calcul de D:

$$1^\circ.\qquad n=3,\qquad f(y,x) = Ay^3 + By^2x + Cyx^2 + Dx^3.$$

On trouve

$$\varDelta = \varDelta_1\varDelta_2(\alpha_1-\alpha_2)^2 + \varDelta_1\varDelta_3(\alpha_1-\alpha_3)^2 + \varDelta_2\varDelta_3(\alpha_2-\alpha_3)^2,$$

et les équations (1.) deviennent:

$$\begin{aligned} 2\varDelta &= 3\varDelta_1(\varDelta_2(\alpha_1-\alpha_2)^2 + \varDelta_3(\alpha_1-\alpha_3)^2),\\ 2\varDelta &= 3\varDelta_2(\varDelta_1(\alpha_2-\alpha_1)^2 + \varDelta_3(\alpha_2-\alpha_3)^2),\\ 2\varDelta &= 3\varDelta_3(\varDelta_1(\alpha_3-\alpha_1)^2 + \varDelta_2(\alpha_3-\alpha_2)^2), \end{aligned}$$

d'où on tire

$$\varDelta_1\varDelta_3(\alpha_1-\alpha_3)^2 = \varDelta_2\varDelta_3(\alpha_2-\alpha_3)^2,\qquad \varDelta_2\varDelta_1(\alpha_2-\alpha_1)^2 = \varDelta_3\varDelta_1(\alpha_3-\alpha_1)^2,$$

ou bien

$$\frac{\varDelta_2}{\varDelta_1} = \frac{(\alpha_1-\alpha_3)^2}{(\alpha_2-\alpha_3)^2},\qquad \frac{\varDelta_3}{\varDelta_1} = \frac{(\alpha_1-\alpha_2)^2}{(\alpha_2-\alpha_3)^2}.$$

Soit donc

$$\varDelta_1 = (\alpha_2-\alpha_3)^2,\qquad \varDelta_2 = (\alpha_1-\alpha_3)^2,\qquad \varDelta_3 = (\alpha_1-\alpha_2)^2,$$

on obtiendra successivement:

$$\begin{aligned} \varDelta &= 3(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_3-\alpha_1)^2,\\ \varDelta_1\varDelta_2\varDelta_3 &= (\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_3-\alpha_1)^2, \end{aligned}$$

et par suite:

$$\begin{aligned} \mathrm{D} = A\frac{\varDelta^{\frac{3}{4}}}{(\varDelta_1\varDelta_2\varDelta_3)^{\frac{1}{2}}} &= \{(27A^4(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_3-\alpha_1)^2\}^{\frac{1}{4}}\\ &= \{27(B^2C^2-4B^3D-4C^3A-27A^2D^2+18ABCD)\}^{\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

$$2^\circ.\qquad n=4,\qquad f(y,x) = Ay^4 + By^3x + Cy^2x^2 + Dyx^3 + Ex^4.$$

Il vient alors:

$$\begin{aligned} \varDelta &= 2\varDelta_1(\varDelta_2(\alpha_1-\alpha_2)^2 + \varDelta_3(\alpha_1-\alpha_3)^2 + \varDelta_4(\alpha_1-\alpha_4)^2),\\ \varDelta &= 2\varDelta_2(\varDelta_1(\alpha_2-\alpha_1)^2 + \varDelta_3(\alpha_2-\alpha_3)^2 + \varDelta_4(\alpha_2-\alpha_4)^2),\\ \varDelta &= 2\varDelta_3(\varDelta_1(\alpha_3-\alpha_1)^2 + \varDelta_2(\alpha_3-\alpha_2)^2 + \varDelta_4(\alpha_3-\alpha_4)^2),\\ \varDelta &= 2\varDelta_4(\varDelta_1(\alpha_4-\alpha_1)^2 + \varDelta_2(\alpha_4-\alpha_2)^2 + \varDelta_3(\alpha_4-\alpha_3)^2), \end{aligned}$$

*

on en déduit par une combinaison facile:

$$\Delta_1\Delta_2(\alpha_1-\alpha_2)^2 = \Delta_3\Delta_4(\alpha_3-\alpha_4)^2,$$
$$\Delta_2\Delta_3(\alpha_2-\alpha_3)^2 = \Delta_4\Delta_1(\alpha_4-\alpha_1)^2,$$
$$\Delta_1\Delta_3(\alpha_1-\alpha_3)^2 = \Delta_2\Delta_4(\alpha_2-\alpha_4)^2,$$

ou bien encore:

$$\Delta_1^2(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_4)^2 = \Delta_3^2(\alpha_3-\alpha_2)^2(\alpha_3-\alpha_4)^2,$$
$$\Delta_2^2(\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_2-\alpha_4)^2 = \Delta_1^2(\alpha_1-\alpha_4)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2,$$
$$\Delta_4^2(\alpha_4-\alpha_2)^2(\alpha_4-\alpha_3)^2 = \Delta_1^2(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2.$$

Ainsi nous prendrons:

$$\Delta_1^2 = (\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_3-\alpha_4)^2(\alpha_4-\alpha_2)^2,$$
$$\Delta_2^2 = (\alpha_3-\alpha_4)^2(\alpha_4-\alpha_1)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2,$$
$$\Delta_3^2 = (\alpha_4-\alpha_1)^2(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_2-\alpha_4)^2,$$
$$\Delta_4^2 = (\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_3-\alpha_1)^2,$$

et pour avoir comme la question l'exige, des déterminations positives, nous supposons,

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4,$$

ce qui donnera:

$$\Delta_1 = -(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_4-\alpha_2),$$
$$\Delta_2 = -(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_3),$$
$$\Delta_3 = -(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_4),$$
$$\Delta_4 = -(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_1).$$

Soit pour abréger l'écriture, Ω le carré du produit des six différences des racines prises deux à deux, on conclura de ce qui précède:

$$\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4 = \Omega,$$
$$\Delta = 4\Omega^{\frac{1}{2}}(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4),$$
$$\mathrm{D} = \frac{A.\Delta}{(\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4)^{\frac{1}{2}}} = 4A(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4).$$

La détermination de D, en fonction des coefficients de $f(y,x)$, se ramène aisément à la résolution d'une équation du 3e degré; en représentant par $\Phi(A,B,C,D,E)$ la fonction rationnelle et entière de ces coefficients qu'on obtient pour le produit symmétrique $A^6\Omega$, cette équation sera:

$$D^3 - 4^2.D(C^2 - 3BD + 12AE) + 4^3\Phi^{\frac{1}{2}} = 0,$$

et ses trois racines:

$$4A(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4),$$
$$4A(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_2),$$
$$4A(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_3).$$

Voici maintenant, la méthode générale de réduction; ayant déterminé par la théorie précédente, les quantités $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n$, soit

$$y = my'+m^0x',$$
$$x = ny'+n^0x'$$

la substitution propre à réduire la forme binaire,

$$\Delta_1(y-\alpha_1x)^2+\Delta_2(y-\alpha_2x)^2+\ldots+\Delta_n(y-\alpha_nx)^2$$

dont le déterminant changé de signe, est la quantité désignée ci-dessus par Δ, je dis que cette même substitution effectuée dans la forme proposée $f(y,x)$ conduira à une transformée $f_1(y',x')$ dont touts les coefficients auront des valeurs limitées qui dépendront seulement du déterminant D, et de l'exposant n. Soit

$$\mathrm{a} = \Delta_1(m-n\alpha_1)^2+\Delta_2(m-n\alpha_2)^2+\ldots+\Delta_n(m-n\alpha_n)^2,$$
$$\mathrm{a}_0 = \Delta_1(m^0-n^0\alpha_1)^2+\Delta_2(m^0-n^0\alpha_2)^2+\ldots+\Delta_n(m^0-n^0\alpha_n)^2,$$

d'après le principal caractère des formes binaires réduites, on aura

$$\mathrm{a}\,\mathrm{a}_0 < \tfrac{4}{3}\Delta,$$

ce qui donne en supposant $\mathrm{a}<\mathrm{a}_0$, la limite $\mathrm{a}^2<\frac{4}{3}\Delta$; or voici les conséquences qui s'en déduisent. En premier lieu, le produit des quantités positives, $\Delta_1(m-\alpha_1n)^2$, $\Delta_2(m-\alpha_2n)^2$ etc., ne pouvant dépasser son maximum $\left(\frac{\mathrm{a}}{n}\right)^n$, on aura:

$$\Delta_1\Delta_2\ldots\Delta_n.(m-\alpha_1n)^2(m-\alpha_2n)^2\ldots(m-\alpha_nn)^2<\left(\frac{\mathrm{a}}{n}\right)^n,$$

d'où l'on tire aisément

$$A(m-\alpha_1n)(m-\alpha_2n)\ldots(m-\alpha_nn)<\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}n}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}n}\mathrm{D}.$$

Secondement, si l'on omet dans a, le terme $\Delta_i(m-n\alpha_i)^2$, en raisonnant comme tout-à-l'heure, on trouvera

$$\Delta_1\Delta_2\ldots\Delta_{i-1}.\Delta_{i+1}\Delta_{i+2}\ldots\Delta_n.(m-n\alpha_1)^2\ldots(m-n\alpha_{i-1})^2(m-n\alpha_{i+1})^2\ldots(m-n\alpha_n)^2$$
$$<\left(\frac{\mathrm{a}}{n-1}\right)^{n-1},$$

multipliant membre à membre avec l'inégalité $\Delta_i(m_0-n_0\alpha_i)^2 < \mathrm{a}_0$ et posant pour abréger

$$(\alpha_i) = (m-n\alpha_1)(m-n\alpha_2)\dots(m_0-n_0\alpha_i)\dots(m-n\alpha_n),$$

on obtiendra aisément

$$A(\alpha_i) < \left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)} \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}n} \mathrm{D}.$$

Ces deux conclusions auxquelles nous sommes arrivés, démontrent immédiatement la proposition annoncée; en effet, soit comme précedemment:

$$f_1(y',x') = A'(y'-\alpha_1'x')(y'-\alpha_2'x')\dots(y'-\alpha_n'x'),$$

on aura

$$A' = A(m-\alpha_1 n)(m-\alpha_2 n)\dots(m-\alpha_n n) < \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}n}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}n}\mathrm{D}$$

et

$$\alpha_i' = \frac{n_0\alpha_i - m_0}{m-n\alpha_i} = -\frac{A(\alpha_i)}{A'} < \frac{1}{A'}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}n}\mathrm{D},$$

ainsi, le nombre entier A', d'une part, et toutes les quantités α_1', α_2' etc. de l'autre sont limitées, donc il en est de même encore de touts les autres coefficients B', C', ... L'. Entre autres relations qu'on peut établir à cet égard, on doit remarquer la suivante qui fournit une limite du produit des coefficients extrêmes, savoir

$$A'L' < \left(\frac{1}{n}\right)^n \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}n}\mathrm{D}^2.$$

Je vais maintenant considérer les formes $f(y,x)$, où les racines de l'équation $f(z,1)=0$ sont en partie réelles et en partie imaginaires; nommant donc

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \dots\ \alpha_\mu$$

les racines réelles et

$$\beta_1,\ \gamma_1;\ \beta_2,\ \gamma_2;\ \dots\ \beta_\nu,\ \gamma_\nu,$$

les divers couples de racines imaginaires conjuguées, de sorte que $\mu+2\nu=n$, posons:

$$\Delta = \tfrac{1}{2}\sum_1^\mu{}_j\sum_1^\mu{}_i\Delta_i\Delta_j(\alpha_i-\alpha_j)^2 + \tfrac{1}{2}\sum_1^\nu{}_j\sum_1^\nu{}_i\Delta_i'\Delta_j'\{(\beta_i-\beta_j)(\gamma_i-\gamma_j)-(\beta_i-\gamma_j)(\beta_j-\gamma_i)\}$$
$$+\sum_1^\nu{}_j\sum_1^\mu{}_i\Delta_i\Delta_j'(\alpha_i-\beta_j)(\alpha_i-\gamma_j),$$

je définirai le déterminant de $f(y,x)$, la plus petite des valeurs que peut prendre l'expression

$$D = \frac{\Delta^{\frac{1}{2}n}}{(\Delta_1 \ldots \Delta_\mu)^{\frac{1}{2}} (\Delta_1' \Delta_2' \ldots \Delta_\nu')},$$

lorsque les quantités, $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_\mu; \Delta_1', \Delta_2', \ldots \Delta_\nu'$, passent par toutes les valeurs réelles et positives, depuis zéro, jusqu'à l'infini. On obtiendra alors pour le minimum cherché, les équations:

$$2\Delta = n\Delta_1 \frac{d\Delta}{d\Delta_1}, \quad 2\Delta = n\Delta_2 \frac{d\Delta}{d\Delta_2}, \quad \ldots \quad 2\Delta = n\Delta_\mu \frac{d\Delta}{d\Delta_\mu},$$

$$4\Delta = n\Delta_1' \frac{d\Delta}{d\Delta_1'}, \quad 4\Delta = n\Delta_2' \frac{d\Delta}{d\Delta_2'}, \quad \ldots \quad 4\Delta = n\Delta_\nu' \frac{d\Delta}{d\Delta_\nu'},$$

et un raisonnement semblable à celui qui a été employé ci-dessus, prouve que toutes les transformées $f_1(y', x')$, équivalentes à la forme proposée conduiront à la même équation pour déterminer D en fonction de leurs coefficients.

D'après cela, je fais dans $f(y,x)$ la substitution

$$y = my' + m^0 x',$$
$$x = ny' + n^0 x'$$

propre à réduire la forme binaire quadratique

$$\Delta_1(y-\alpha_1 x)^2 + \Delta_2(y-\alpha_2 x)^2 + \ldots + \Delta_\mu(y-\alpha_\mu x)^2$$
$$+ \Delta_1'(y-\beta_1 x)(y-\gamma_1 x) + \Delta_2'(y-\beta_2 x)(y-\gamma_2 x) + \ldots + \Delta_\nu'(y-\beta_\nu x)(y-\gamma_\nu x)$$

de déterminant $-\Delta$, et je dis que touts les coefficients de la transformée $f_1(y', x')$ auront des valeurs finies, limitées seulement au moyen de D, et des nombres μ, ν. Soit

$$f_1(y', x') = A'(y'-\alpha_1' x')(y'-\alpha_2' x') \ldots (y'-\alpha_\mu' x')$$
$$\times (y'-\beta_1' x')(y'-\beta_2' x') \ldots (y'-\beta_\nu' x')$$
$$\times (y'-\gamma_1' x')(y'-\gamma_2' x') \ldots (y'-\gamma_\nu' x')$$

et

$$A' = A(m-n\alpha_1)(m-n\alpha_2) \ldots (m-n\alpha_\mu)$$
$$\times (m-n\beta_1)(m-n\beta_2) \ldots (m-n\beta_\nu)$$
$$\times (m-n\gamma_1)(m-n\gamma_2) \ldots (m-n\gamma_\nu).$$

On pourra comme précédemment faire:

$$\alpha_i' = -\frac{A(\alpha_i)}{A'}, \quad \beta_i' = -\frac{A(\beta_i)}{A'}, \quad \gamma_i' = -\frac{A(\gamma_i)}{A'},$$

et l'on obtiendra par des raisonnements analogues

$$A' < 2^{\nu}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}n}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}n} \mathrm{D},$$

en partant de la relation:

$$\Delta_1(m-n\alpha_1)^2+\Delta_2(m-n\alpha_1)^2+\dots+\Delta_\mu(m-n\alpha_\mu)^2$$
$$+\Delta_1'(m-n\beta_1)(m-n\gamma_1)+\Delta_2'(m-n\beta_2)(m-n\gamma_2)+\dots+\Delta_\nu'(m-n\beta_\nu)(m-n\gamma_\nu)$$
$$<\sqrt{(\tfrac{4}{3}\Delta)}.$$

On aura encore les deux limites suivantes:

$$A(\alpha_i) < 2^{\nu}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}n} \mathrm{D},$$

$$A^2.(\beta_i).(\gamma_i) < \left(\frac{1}{n-\nu}\right)^{n-\nu}.\left(\frac{1}{\nu-1}\right)^{\nu-1}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}n}.\mathrm{D}^2,$$

ainsi le coefficient A', les racines réelles et les modules des racines imaginaires, sont limités comme je l'ai annoncé, donc il en est de même de touts les nombres entiers qui forment les coefficients de la transformée $f_1(y', x')$.

Les principes précédents s'appliquent avec beaucoup de facilité aux formes cubiques et biquadratiques; on observe alors cette circonstance remarquable, que pour chaque degré, c'est toujours la même équation en D, qui vient s'offrir, bien que les calculs par lesquels on y arrive, diffèrent beaucoup, suivant le nombre des racines réelles et imaginaires, mais je n'ai pu jusqu'à présent découvrir la raison générale de ce fait important.

Le cas des formes binaires du second degré à facteurs réels, si distinct des autres, se rattache à une théorie très étendue fondée sur la réduction des formes quadratiques à un nombre quelconque d'indéterminées, et qui embrasse toutes les irrationnelles algébriques, je la soumettrai dans un prochain mémoire au jugement des géomètres.

Paris. Mars 1848.

Aux lecteurs de ce journal, et aux amis des mathématiques.

A partir du tome 23 de ce journal, comme cela est connu de ses lecteurs, on a ajouté à chaque cahier un fac-simile de l'écriture de quelque celèbre mathématicien *décédé*. Voici par ordre alphabétique les noms des géomètres dont le journal a publié dans les 13 tomes 23—35 des autographes en fac-simile:

Abel, d'Alembert, Ampère, Dan. Bernoulli, Joh. Bernoulli, Nic. Bernoulli, Bessel, Carnot, Condorcet, Copernicus, Cramer, Descartes, L. Euler, Fermat, Ferrari, Ferroni, Fontana, Fourier, Fufs, Gal. Galilei, Dem. ***S. Germain, W. Herschel, Hevel, Huyghens, Kant, Kästner, Karsten, Kepler, Lagrange, Lalande, Lambert, Laplace, Legendre, Leibnitz, Lexell, Maupertuis, Méchain, Monge, Newton, Oriani, Paoli, Pfaff, Poisson, Réaumur, Roberval, Schröter, Torricelli, Tralles, Tycho de Brahe, Viviani, et Chr. de Wolff.***

Le directeur du journal a encore dans ce moment en réserve les fac-simile des autographes de

Boscovich, Castelli, Cavalieri, Frisi, Grandi, Manfredi, Montanari, Riccioli et Vandermonde

que l'on trouvera dans les prochains cahiers du journal. Excepté les autographes de ***Abel, Bessel,*** Dem. ***Germain, Legendre*** et ***Poisson*** qu'il a tirés de sa propre correspondance avec ces géomètres, il doit tous les autres, nommés ci-dessus, à la bonté et à la complaisance de ses amis et des amis des mathématiques, auxquels il s'est adressé pour cela séparément, et il leur en exprime ici publiquement sa bien sincère reconnaissance.

Il désire beaucoup de pouvoir continuer ultérieurement dans le journal la publication d'autographes de célèbres géomètres ***décédés,*** étant persuadé que cette collection sera agréable aux lecteurs du journal, et à tous les amis des mathématiques, puisque l'écriture d'un savant, à défaut de son portrait, contribue fort bien à le caractériser, et qu'un autographe a même la préférence sur un portrait qui est rarement bien ressemblant, et coûte très cher, quand il a ce mérite, tandis que la conformité du fac-simile de l'écriture est presque absolue, et que le fac-simile coûte très peu.

Il y a encore un grand nombre de géomètres célèbres ***décédés,*** qui ne se trouvent pas compris parmi ceux dénommés ci-dessus, par ex.:

Agnesi, Arbogast, d'Aubuisson, Bachet, Bacon, Bailly, Th. Baker, Barrow, F. de Beaune, Belidor, Bérard, Bertrand, Bézout, Bombelli, Borda, Borelli, L. di Borgo, Bouguer, J. Bradley, Briggs, Brook-Taylor, Brownker, Buzengeiger, Cagnoli, De la Caille, Cardan, J. D. Cassini, C. F. Cassini, J. Ceva, L. v. Ceulen, Clairaut, Clavius, Condamine, Condillac, Coriolis, R. Cotes, Coulomb, J. A. J. Cousin, J. Craig, G. Cramer, Da Cunha, J. Dée, Delambre, J. Dollond, C. v. Drebbel, Dubuat, A. Dürer, Fagnani, Flamstead, Franchini, Frenicle, Galvani, Gellibrand, v. Gerstner, Alb. Girard, S'Gravesande, J. Gregory, Guldin, Halley, Harriot, Harrison, Hindenburg, L'Hôpital, L'Huilier, Hutton,

J. Juan, Ivory, J. Keill, A. Kircher, Klügel, Kramp, Lacroix, Lagny, Lahire, Landen, Lorenz, Lorgna, Maclaurin, Malfatti, Mascheroni, Maskelyne, Tob. Mayer, Mercator, A. Metius, Moivre, Montucla, Navier, Neper, Nonius (Nuñez), Oughthred, Pascal, Pasquich, Pell, v. Prasse, Prony, Purbach, Regiomontanus (J. Müller), Riccati, Robins, Robison, Ruffini, Salomon de Caus, Saunderson, J. Sauveur, v. Segner, Servois, Rob. Simpson, Th. Simpson, Stevin, Stiefel, Stirling, E. Stone, Tacquet, Tartalea, Thibaut, Trembley, v. Tschirnhausen, Varignon, Vega, Venturi, Vieta, Volta, Wallis, Walmesley, Waring, J. Watt, Wilson, Th. Wrenn etc. etc.

et il serait sans doute intéressant de posséder encore les fac-simile de l'écriture de ces auteurs; mais le directeur du journal n'a pu réussir à s'en procurer. Il ne lui reste d'autre voie pour y parvenir que d'adresser, comme il le fait ici, la prière aux lecteurs de ce journal eux-mêmes, ainsi qu'à tous les amis des mathématiques, d'avoir l'obligeance de lui communiquer une copie de l'écriture qu'ils peuvent avoir entre les mains (ou qui leur soit accessible dans une bibliothéque ou chez leurs amis), des géomètres ci-dessus nommés. Il ne demande pas de lui envoyer les autographes eux-mêmes: cela serait difficile, et peut-être même dans la plupart des cas, impossible; mais aussi cela n'est pas nécessaire; il ne s'agit que d'une *copie* exacte, faite par un lithographe ou un autre dessinateur, sur un papier transparent, huilé ou de soie, qu'on couche sur l'original; ce qui ne fait pas le moindre tort à celui-ci. Il prie seulement de vouloir bien lui faire parvenir une *telle copie*, de la grandeur d'une feuille in-quarto, contenant quelque échantillon intéressant de l'autographe, surtout, ci cela se peut, avec des formules mathématiques, si non, une partie de quelque lettre, mais, s'il est possible, avec la signature de l'auteur, et la date. Les frais occasionnés par cette copie, et ceux de leur envoi, seront remboursés sûr le champ et avec la plus grande reconnaissance. Afin que quelque copie ne soit pas expédiée peut-être plusieurs fois, plus tard, et par plusieurs personnes, on nommera dans chaque cahier du journal celles qui seront arrivées jusque là; mais si même plusieurs personnes vouloient envoyer des copies de l'écriture du même auteur, ce ne serait pas un mal, mais plutôt un avantage, de sorte qu'on est prié de ne pas retarder les envois, par crainte d'envoyer des doubles.

Le directeur du journal exprime ici par avance sa gratitude à ceux qui voudront bien avoir la bonté d'accéder à son désir, et il croit le pouvoir faire au nom du public qui leur sera également reconnaissant de leur complaisance.

Berlin, Septbr. 1847.

A. L. Crelle.

En conséquence de la prière ci-dessus, Mr. *Grunert*, prof. ord. des math. à l'université de Greifswald, a eu la bonté de me transmettre des authographes de *Buzengeiger, Klügel, Mollweide, J. F. Pfaff* et *Pfleiderer*. Je lui offre ici publiquement l'expression de ma vive reconnaissance. Qu'il me soit permis d'exprimer le voeu que cet exemple trouvera bientôt des imitateurs. *C.*

Crelle, Journal d. Math. Bd. 36. Heft 4.

Fac-simile einer Handschrift von Boscovich.

Monsieur

2e lettre du même au même

Chez Mons.r Bergeret a Nointele près Beaumont
sur l'Oise ce 21 Mai 1777.

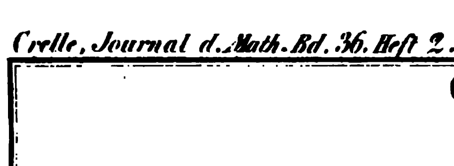
Après ma reponse à la lettre, que vous m'avés fait l'honneur de m'écrire,
j'en vient de recevoir une par la poste d'aujourdhui d'un ami, qui me mande, que M.
l'Abbé Rochon va se plaindre à tout le monde au sujét de mon memoire, disant
d'avoir donné il y a quelques années une memoire sur ma decouverte, qu'il dit être
la sienne. Je comprend à present quel étoit l'objét du jugement, au quel on
me demandoit, si je voulois me soumettre. Comme j'ai exprimé tres clairement dans
ma lettre les raisons, qui m'ont engagé de rendre publique au plus tôt une decou-
verte, que je croyois nouvelle, et qui est absolument utile a l'Astronomie, pouvant
l'être aussi à la Marine, on voit bien, que je n'avois aucune envie d'avoir un
procés devant l'illustre compagnie, de la quelle vous est le Secretaire. Si reelle-
ment M. l'Abbé Rochon a deja donné la même decouverte depuis plusieurs an-
nées, je ne lui en conteste pas l'invention, et je suis bien flatté d'avoir contribué au
bien public, en la faisant connoitre par la voix de plusieurs journaux plus tôt, qu'el-
le ne l'aurroit été. J'ai dit dans mon memoire, comment la chose s'etoit passé.
Quand on a tant parlé dans Paris de son micrometre objectif fondé sur les deux
refractions du cristal de roche, qui jusque alors n'avoit, que le mouvement circulaire
des deux pieces, j'en ai parlé à M. l'Abbé Fontana, qui n'en sçavoit rien de plus.
Quand je lui ai fait voir l'effét du prisme de verre commun à la main, avant
de faire construire une espece de modelle de l'instrument, et d'écrire mon memoi-
re il n'avoit eu connoissence du sien. J'en avois parlé à M. de la Lande, qui n'en sça-
voit rien, puisqu'il ne m'en a dit un mot, et il n'aurroit pas porté le mien à l'Academie.
Après l'avoir presenté au Ministre, j'en ai parlé a M.r le Chev: de Borda, et a
M.r Messier, en disant, que j'allois le publier dans les journaux, et ils ne m'ont
pas donné la moindre marque d'en avoir connoissence. Le second m'a dit seule-
ment, que M. l'Abbé Rochon disoit, que le mien etoit une addition, mais que le
fond etoit à lui. Je lui repondit, que je croyois, que cette addition avoit quelque
merite, mais que je ne cherchois autre chose, que l'utilité publique. Si son memoire
a existé, il etoit donc absolument ignoré de ces Messrs. [illegible] que j'ai nom-

més, demeurans a Paris. A plus forte raison il étoit ignoré ailleurs. J'avois ecrit le 13 du mois dernier à M. Slop Astronome de l'Université de Pise l'usage, que M. l'Abbé Rochon faisoit de la double refraction du cristal de roche, le changement bien essentiel, que j'y avois fait, et les avantages, qu'il avoit à cause de la facilité d'avoir la matiere, et de la travailler, et de l'usage beaucoup plus etendu [illegible] pour les grands angles: tout cela lui a paru nouveaux. voici ces paroles tirées de sa lettre écrite en Italien le 1 de ce mois. Io mi ralegro con lei dell'ingegnosissima invenzione, che per l'ampiezza delle vedute, e per le molte aggiunte può dirsi sua, del nuovo istromento da lei descrittomi, il quale sarà sicuramente publicato nel primo tomo di questo giornale. Gradirò moltissimo la memoria di quest' istesso micrometro quando ella l'avrà publicato. Si son memoire etoit ignoré par tant d'Astronomes du premier ordre, il n'est pas surprenant, que je n'en eus pas connoisence; et j'ai rendu un service essentiel au public, en donnant l'occasion de connoître cet instrument si utile par un memoire, dans lequel j'ai dit tout ce, que je sçavois de son invention, en en faisant l'eloge. Pourtant je ne conçois pas, comment il n'a rien dit de cette maniere immensement plus simple, et facile de se procurer pour parvenir au même but, quand il a fait voir avec tant d'empressement, et d'enthousiasme l'autre par le moyen du cristal de roche, et pourquoi n'a t-il point taché de le rendre public en tant d'années.

A tout evenement j'espere, qu'aprés tant d'ouvrages, que j'ai donnés au public dans une longue suitte d'années, et un grand nombre d'autres, que je prepare actuellement, on ne me supçonnera pas de vouloir me parer des decouvertes d'autrui. Je vous prie, Monsieur, de faire part de cette lettre à votre illustre compagnie, et de vous persuader de la sincerité des sentiments, avec les quels je suis

Monsieur

Votre tres humble, et tres obeissant
Serviteur l'Abbé Boscovich.



1.

2.

1.

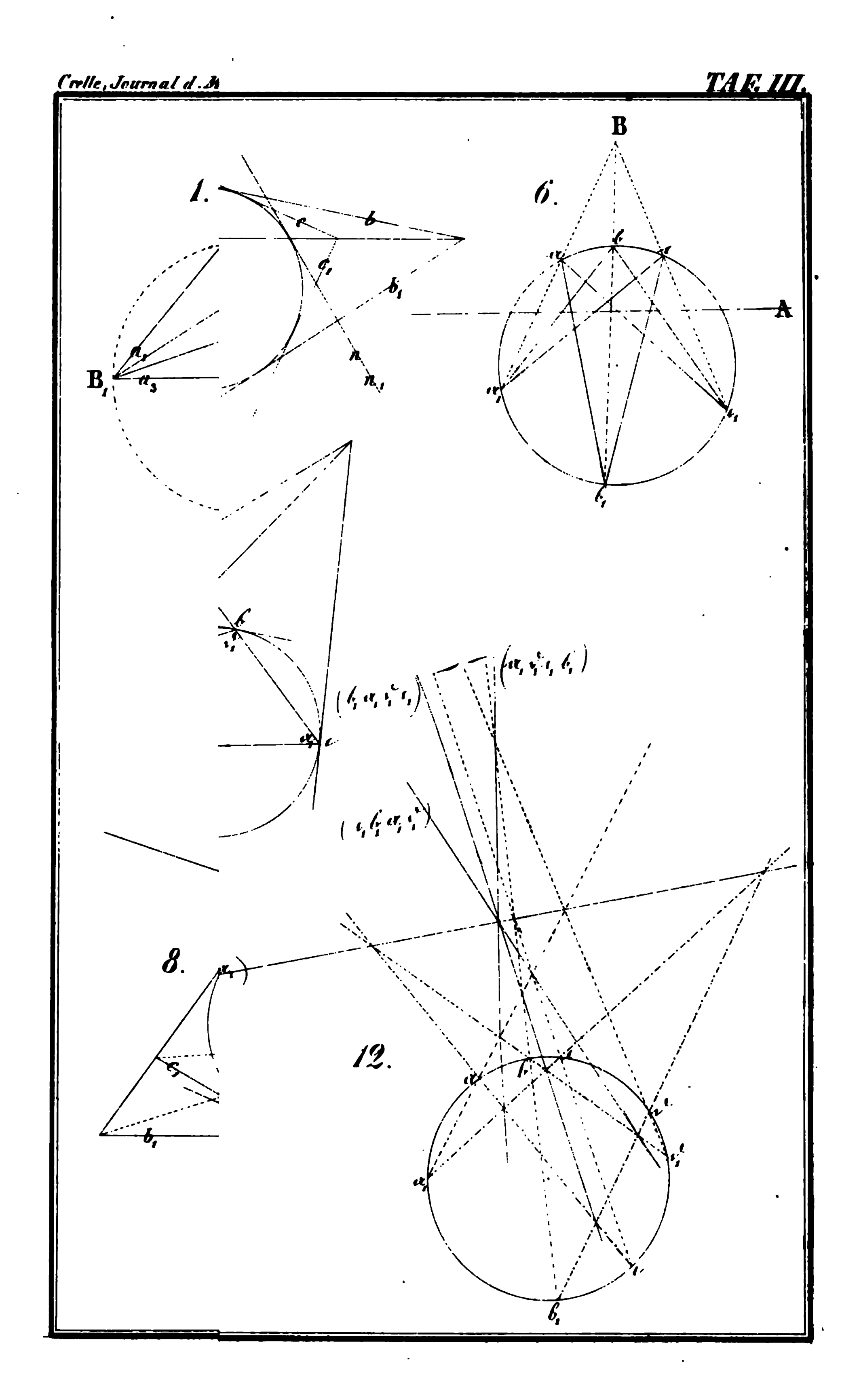
2.

3.

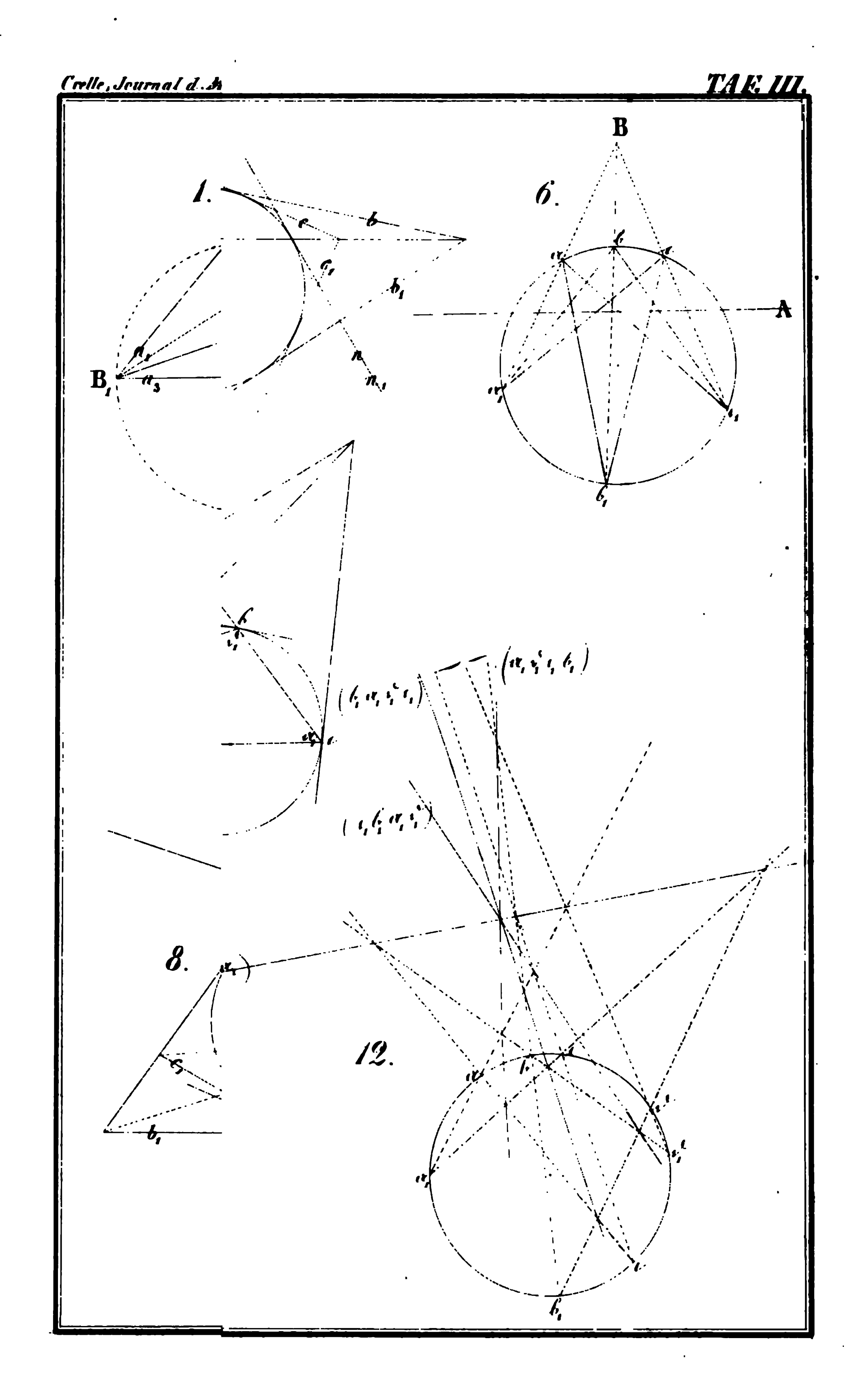
4.

5.

6.



1.
6.
8.
12.
B
A
B,


1.
6.
8.
12.
B
A
B₁

15.

16.

20.

21.

STORAGE AREA

